

文章编号: 0253-2239(2007)09-1700-6

# 双模激发压缩真空态的维格纳函数\*

孟祥国 王继锁 梁宝龙

(聊城大学物理系, 聊城 252059)

**摘要:** 利用纠缠态表象下的维格纳(Wigner)算符,构造了双模激发压缩真空态的维格纳函数,并根据该函数在相空间  $\rho$ - $\gamma$  中随参量  $m, n$  和  $r$  的变化关系,讨论了双模激发压缩真空态的量子干涉特性和压缩效应。结果表明,对于参量  $m, n$  不同的取值,双模激发压缩真空态的量子干涉效应的强弱不同;而对于不同的压缩参量  $r$ ,双模激发压缩真空态呈现出不同程度的压缩效应。最后,根据双模激发压缩真空态的维格纳函数的边缘分布,阐明了此维格纳函数的物理意义。

**关键词:** 量子光学; 双模激发压缩真空态; 纠缠态表象; 维格纳函数; 边缘分布函数

中图分类号: O431.2 文献标识码: A

## Wigner Functions of Two-Mode Excited Squeezed Vacuum States

Meng Xiangguo Wang Jisuo Liang Baolong

(Department of Physics, Liaocheng University, Liaocheng 252059)

**Abstract:** Using the Wigner operator in the entangled-state representation we construct the Wigner functions of the two-mode excited squeezed vacuum states (TESVS). In term of the variations of the Wigner functions with respect to the parameters  $m, n$  and  $r$  in the  $\rho$ - $\gamma$  phase space, the quantum interference properties and squeezing effects of the TESVS are discussed. The results show that, for different values of  $m$  and  $n$ , the TESVS have different quantum interference effects, however for different squeezing parameters  $r$  the TESVS exhibit different squeezing effects. Furthermore, the physical meaning of the Wigner functions is identified according to the marginal distributions of the Wigner functions for the TESVS.

**Key words:** quantum optics; two-mode excited squeezed vacuum state; entangled-state representation; Wigner function; marginal distribution function

## 1 引 言

众所周知,一个量子态的维格纳(Wigner)函数包含了该量子态在整个相空间演化过程中的全部信息,因此量子态的演化可以用它的维格纳函数来描述。但由于量子态的维格纳函数一般不能被直接测量,因此人们希望通过一些可观测量来重构各种量子态的维格纳函数,并通过这些可观测量来实现对它们的有效测量。故此,量子态维格纳函数的重构和测量对研究量子体系的演化过程有着重要的意义。目前,不论在理论上还是在实验上,人们已提出了多种重构和测量量子态维格纳函数的方法<sup>[1~5]</sup>。它们的提出极大地激发了物理学工作者们的研究兴趣。

由于受激原子通过初态为双模压缩真空态的强场时,非线性相互作用会在双模压缩真空态上产生激发,从而在此过程中产生双模激发压缩真空态<sup>[6~8]</sup>。因此重构它的维格纳函数具有较高的实践意义,这有助于找到一些可观测量在实验上实现对它的测量,从而获得此量子态在演化过程中的有关信息。本文利用纠缠态表象下的维格纳算符,获得了双模激发压缩真空态的维格纳函数。并根据该函数在相空间  $\rho$ - $\gamma$  中随参量  $m, n$  和  $r$  的变化关系,讨论了双模激发压缩真空态的量子干涉特性和压缩效应。然后,根据双模激发压缩真空态的维格纳函数的边缘分布,阐明了该函数的物理意义。

\* 国家自然科学基金(10574060)和山东省自然科学基金(Y2004A09)资助的课题。

作者简介: 孟祥国(1978—),男,山东青州人,讲师,硕士研究生,主要从事理论物理教学和量子光学方面的研究。

E-mail: xgmeng@lcu.edu.cn

导师简介: 王继锁(1960—),男,山东阳谷人,教授,理学博士(后),主要从事量子光学和量子信息方面的研究。

E-mail: jswang@lcu.edu.cn

收稿日期: 2006-11-17; 收到修改稿日期: 2007-01-24

## 2 双模激发压缩真空态的定义

双模压缩真空态可由压缩算符  $S(r) = \exp[r(a_1^+ a_2^+ - a_1 a_2)]$  作用到真空态  $|00\rangle$  上而获得, 即

$$S_2(r) |00\rangle = \text{sech } r \exp[a_1^+ a_2^+ \tanh r] |00\rangle. \quad (1)$$

据此, 可定义双模激发压缩真空态为<sup>[8]</sup>

$$a_1^{+n} a_2^{+m} S_2(r) |00\rangle = |r, n, m\rangle, \quad (2)$$

其归一化系数为

$$\langle r, n, m | r, n, m \rangle = n! m! (\cosh r)^{2n} P_m^{(0, n-m)}(\cosh 2r), \quad (3)$$

式中  $P_m^{(0, n-m)}(\cosh 2r)$  为雅可比多项式, 其表达式为

$$P_m^{(0, n-m)}(\cosh 2r) = (\cosh r)^{2m} \sum_{l=0}^m \frac{m! n!}{(l!)^2 (m-l)! (n-l)!} (\tanh r)^{2l}. \quad (4)$$

利用(2)式和(3)式, 归一化的双模激发压缩真空态为

$$[n! m! (\cosh r)^{2n} P_m^{(0, n-m)}(\cosh 2r)]^{-1/2} a_1^{+n} a_2^{+m} S_2(r) |00\rangle \equiv ||r, n, m\rangle. \quad (5)$$

## 3 纠缠态 $|\eta\rangle$ 表象和双模压缩维格纳算符

为了求出双模激发压缩真空态的维格纳函数, 先引入纠缠态  $|\eta\rangle$  表象和双模压缩维格纳算符.

在双模福克(Fock)表象中, 引入纠缠态<sup>[9,10]</sup>

$$|\eta\rangle = \exp\left[-\frac{|\eta|^2}{2} + \eta a_1^+ - \eta^* a_2^+ + a_1^+ a_2^+\right] |00\rangle, \quad \eta = \eta_1 + i\eta_2. \quad (6)$$

把算符  $a_1, a_2$  分别作用于态  $|\eta\rangle$  上, 不难得到

$$a_1 |\eta\rangle = (\eta + a_2^+) |\eta\rangle, \quad a_2 |\eta\rangle = -(\eta^* - a_1^+) |\eta\rangle. \quad (7)$$

由此可导出下面的本征方程

$$(\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_2) |\eta\rangle = \sqrt{2} \eta_1 |\eta\rangle, \quad (P_1 + P_2) |\eta\rangle = \sqrt{2} \eta_2 |\eta\rangle. \quad (8)$$

可见, 纠缠态  $|\eta\rangle$  为处于纠缠的两粒子的相对位置  $(\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_2)$  和总动量  $(P_1 + P_2)$  的共同本征态. 借助于双模真空态投影算符的正规乘积形式<sup>[11]</sup>

$$|00\rangle\langle 00| = : \exp(-a_1^+ a_1 - a_2^+ a_2) : , \quad (9)$$

式中  $::$  符号表示正规乘积, 可知纠缠态  $|\eta\rangle$  具有完备性

$$\int \frac{d^2 \eta}{\pi} |\eta\rangle\langle \eta| = \int \frac{d^2 \eta}{\pi} : \exp[-|\eta|^2 + \eta a_1^+ - \eta^* a_2^+ + a_1^+ a_2^+ - a_1^+ a_1 - a_2^+ a_2 + \eta^* a_1 - \eta a_2 + a_1 a_2] : = 1, \quad (10)$$

和“正交归一性”

$$\langle \eta | \eta' \rangle = \pi \delta(\eta - \eta') \delta(\eta^* - \eta'^*) = \pi \delta^{(2)}(\eta - \eta'). \quad (11)$$

在纠缠态  $|\eta\rangle$  表象下, 双模的维格纳算符  $\Delta(\rho, \gamma)$  表示为<sup>[9,10]</sup>

$$\Delta(\rho, \gamma) = \int \frac{d^2 \eta}{\pi^3} |\gamma - \eta\rangle\langle \gamma + \eta| \exp(\eta \rho^* - \eta^* \rho), \quad (12)$$

式中  $\gamma = \alpha - \beta^*, \rho = \alpha + \beta^*, \alpha = (x_1 + ip_1)/\sqrt{2}, \beta = (x_0 + ip_2)/\sqrt{2}$ . 而  $x_1, x_2, p_1, p_2$  分别为处于纠缠态  $|\eta\rangle$  下两粒子的坐标和动量. 利用(2)式和(12)式, 则态  $|r, n, m\rangle$  的维格纳函数为

$$\langle r, n, m | \Delta(\rho, \gamma) | r, n, m \rangle = \langle 00 | S_2^{-1}(r) a_2^m a_1^n \Delta(\rho, \gamma) a_1^{+n} a_2^{+m} S_2(r) | 00 \rangle. \quad (13)$$

由于

$$b_1^{+n} = S_2^{-1}(r) a_1^{+n} S_2(r) = (a_1^+ \cosh r + a_2 \sinh r)^n, \quad (14)$$

$$b_2^{+m} = S_2^{-1}(r) a_2^{+m} S_2(r) = (a_2^+ \cosh r + a_1 \sinh r)^m, \quad (15)$$

那么

$$a_1^{+n} a_2^{+m} S_2(r) | 00 \rangle = S_2(r) b_1^{+n} b_2^{+m} | 00 \rangle. \quad (16)$$

因此, 态  $|r, n, m\rangle$  的维格纳函数变为

$$\langle r, n, m | \Delta(\rho, \gamma) | r, n, m \rangle = \langle 00 | b_2^m b_1^n S_2^{-1}(r) \Delta(\rho, \gamma) S_2(r) b_1^{+n} b_2^{+m} | 00 \rangle. \quad (17)$$

由于双模压缩算符  $S_2(r)$  可表示为<sup>[9,10]</sup>

$$S_2(r) = \frac{1}{\mu} \int \frac{d^2 \eta}{\pi} |\eta/\mu\rangle\langle \eta|, \quad (18)$$

且它作用于纠缠态  $|\eta\rangle$  时, 满足  $S_2(r)|\eta\rangle = \frac{1}{\mu}|\eta/\mu\rangle$ , (19)

则双模压缩维格纳算符为

$$S_2^{-1}(r)\Delta(\rho, \gamma)S_2(r) = \mu^2 \int \frac{d^2\eta}{\pi^3} |\mu(\gamma - \eta)\rangle \langle \mu(\gamma + \eta)| \exp(\eta\rho^* - \eta^*\rho), \quad (20)$$

式中  $\mu = e^r$  为压缩参量。利用(13)式 ~ (16)式和(20)式, 态  $|r, n, m\rangle$  的维格纳函数可改写为

$$\langle r, n, m | \Delta(\rho, \gamma) | r, n, m \rangle = \mu^2 (\cosh^2 r)^{m+n} \langle 00 | \int \frac{d^2\eta}{\pi^3} a_2^m a_1^n |\mu(\gamma - \eta)\rangle \langle \mu(\gamma + \eta)| \times \exp(\eta\rho^* - \eta^*\rho) a_1^{+n} a_2^{+m} | 00 \rangle. \quad (21)$$

#### 4 双模激发压缩真空态的维格纳函数

为了得到双模激发压缩真空态的维格纳函数, 引入一个称之为双变量厄米多项式  $H_{m,n}(\eta, \eta^*)$  的生成函数公式<sup>[11]</sup>

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{t^m t'^n}{m!n!} H_{m,n}(\eta, \eta^*) = \exp(tt' + t\eta + t'\eta^*), \quad (22)$$

$$\text{式中 } H_{m,n}(\eta, \eta^*) = \sum_{l=0}^{\min(m,n)} \frac{(-)^l m!n!}{l!(m-l)!(n-l)!} \eta^{m-l} \eta^{*n-l} = \frac{\partial^{m+n}}{\partial t^m \partial t'^n} \exp(-tt' + t\eta + t'\eta^*) \Big|_{t=t'=0}, \quad (23)$$

$$\text{它满足以下关系式 } H_{m,n}^*(\eta, \eta^*) = H_{n,m}(\eta, \eta^*) = H_{m,n}(\eta^*, \eta). \quad (24)$$

利用(6)式和(23)式, 在双模福克空间中, 可把纠缠态  $|\eta\rangle$  写成

$$|\eta\rangle = \exp(-|\eta|^2/2) \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{(-)^j}{\sqrt{i!j!}} H_{i,j}(\eta, \eta^*) |i, j\rangle, \quad (25)$$

$$\text{式中 } |i, j\rangle \text{ 为双模福克态, 即 } |i, j\rangle = \frac{a_1^{+i} a_2^{+j}}{\sqrt{i!j!}} |00\rangle. \quad (26)$$

经过简单的计算, 得到内积

$$\begin{aligned} \langle \mu(\gamma + \eta) | a_1^{+n} a_2^{+m} | 00 \rangle &= \\ \exp[-|\mu(\gamma + \eta)|^2/2] \sum_{i,j=0}^{\infty} \sqrt{n!m!} \frac{(-)^j}{\sqrt{i!j!}} H_{i,j}[\mu(\gamma + \eta), \mu(\gamma + \eta)^*] \langle i, j | n, m \rangle &= \\ \exp[-|\mu(\gamma + \eta)|^2/2] (-)^m H_{m,n}[\mu(\gamma + \eta), \mu(\gamma + \eta)^*], & \end{aligned} \quad (27)$$

$$\langle 00 | a_1^n a_2^m | \mu(\gamma - \eta) \rangle = \exp[-|\mu(\gamma - \eta)|^2/2] (-)^m H_{n,m}[\mu(\gamma - \eta), \mu(\gamma - \eta)^*]. \quad (28)$$

把(27)式和(28)式代入(21)式, 并利用(23)式, 可得态  $|r, n, m\rangle$  的维格纳函数

$$\begin{aligned} \langle r, n, m | \Delta(\rho, \gamma) | r, n, m \rangle &= \mu^2 (\cosh^2 r)^{n+m} \frac{\partial^{m+n}}{\partial t^m \partial t'^n} \frac{\partial^{m+n}}{\partial s^n \partial s'^m} \int \frac{d^2\eta}{\pi^3} \exp(-\mu^2|\gamma|^2 - \mu^2|\eta|^2 + \eta\rho^* - \eta^*\rho) \times \\ \exp[-tt' + t\mu(\gamma + \eta) + t'\mu(\gamma + \eta)^* - ss' + s\mu(\gamma - \eta) + s'\mu(\gamma - \eta)^*] &= \\ \frac{\mu^2 (\cosh^2 r)^{n+m}}{\pi^2} \frac{\partial^{m+n}}{\partial t^m \partial t'^n} \frac{\partial^{m+n}}{\partial s^n \partial s'^m} \int \frac{d^2\eta}{\pi} \exp[-\mu^2|\eta|^2 + \eta(\rho^* + t\mu - s\mu) + \eta^*(-\rho + t'\mu - s'\mu)] \times \\ \exp[-tt' + t\mu\gamma + t'\mu\gamma^* - ss' + s\mu\gamma + s'\mu\gamma^* - \mu^2|\gamma|^2] &= \frac{(\cosh^2 r)^{n+m}}{\pi^2} \frac{\partial^{m+n}}{\partial t^m \partial t'^n} \frac{\partial^{m+n}}{\partial s^n \partial s'^m} \\ \exp\left[\left(\mu\gamma - \frac{\rho}{\mu} - s'\right)t + \left(\mu\gamma^* + \frac{\rho^*}{\mu} - s\right)t' + \left(\mu\gamma + \frac{\rho}{\mu}\right)s + \left(\mu\gamma^* - \frac{\rho^*}{\mu}\right)s' - \mu^2|\gamma|^2 - \frac{|\rho|^2}{\mu^2}\right] &= \\ \frac{(\cosh^2 r)^{n+m}}{\pi^2} \sum_{l=0}^m \sum_{k=0}^n \left[ \binom{m}{l} \binom{n}{k} \right]^2 l!k! \left| \left(\mu\gamma + \frac{\rho}{\mu}\right) \right|^{2(m-l)} \left| \left(\mu\gamma^* - \frac{\rho^*}{\mu}\right) \right|^{2(n-k)} \exp\left[-\mu^2|\gamma|^2 - \frac{|\rho|^2}{\mu^2}\right], & \end{aligned} \quad (29)$$

以上计算利用了积分公式<sup>[12]</sup>

$$\int \frac{d^2z}{\pi} \exp(\zeta|z|^2 + \zeta z + \eta z^* + fz^2 + gz^{*2}) = \frac{1}{\sqrt{\zeta^2 - 4fg}} \exp\left(\frac{-\zeta\xi\eta + \xi^2g + \eta^2f}{\zeta^2 - 4fg}\right), \quad (30)$$

此积分公式成立的条件为

$$\operatorname{Re}(\zeta \pm f \pm g) < 0, \quad \operatorname{Re}\left(\frac{\zeta^2 - 4fg}{\zeta \pm f \pm g}\right) < 0. \quad (31)$$

考虑到(3)式,则可得到态  $|r, n, m\rangle$  的维格纳函数为

$$W(\rho, \gamma) = \langle r, n, m | \Delta(\rho, \gamma) | r, n, m \rangle = \frac{\cosh^{2m} r}{n! m! \pi^2 P_m^{(0, n-m)}(\cosh 2r)} \sum_{l=0}^m \sum_{k=0}^n \left[ \binom{m}{l} \binom{n}{k} \right]^2 l! k! \left| \left( \mu \gamma + \frac{\rho}{\mu} \right) \right|^{2(m-l)} \times \left| \left( \mu \gamma^* - \frac{\rho^*}{\mu} \right) \right|^{2(n-k)} \exp\left(-\mu^2 |\gamma|^2 - \frac{|\rho|^2}{\mu^2}\right). \quad (32)$$

将(4)式代入(32)式,在  $m, n$  和  $r$  取不同值时,借助于数值计算,可以分别得到双模激发压缩真空态的维格纳函数随复变量  $\rho$  和  $\gamma$  的变化关系如图 1 至图 3 所示。

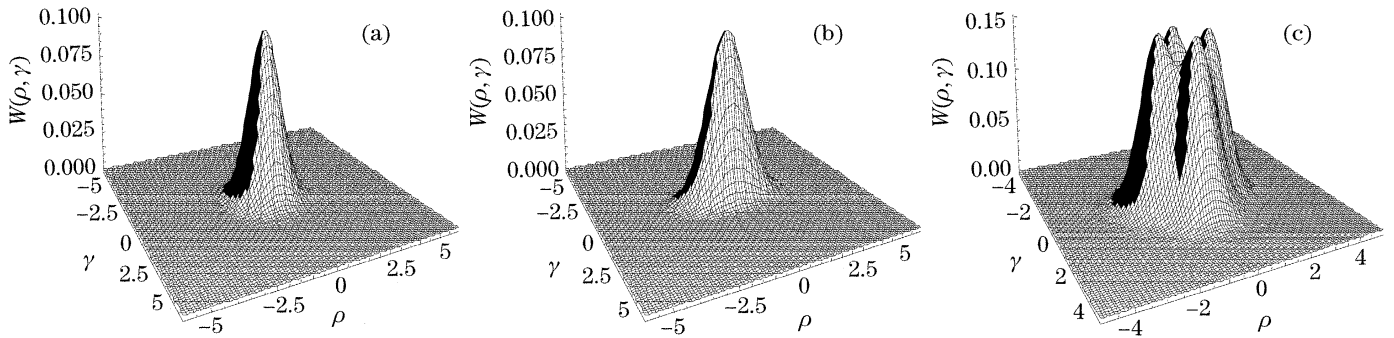


图 1 双模激发压缩真空态的维格纳函数(a)  $m=n=0$  且  $r=0$ , (b)  $m=n=0$  且  $r=0.3$ , (c)  $m=n=1, r=0$

Fig. 1 Wigner function of two-mode excited squeezed vacuum state for (a)  $m=n=0$  and  $r=0$ , (b)  $m=n=0$  and  $r=0.3$ , (c)  $m=n=1, r=0$

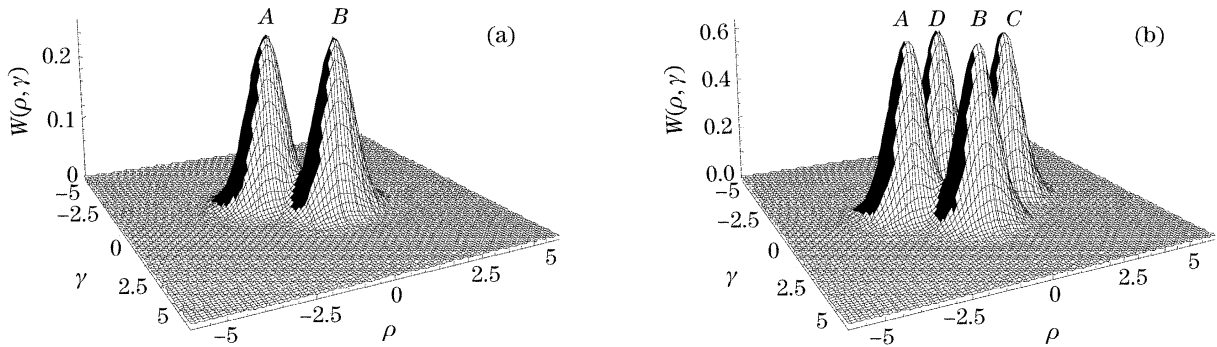


图 2 双模激发压缩真空态的维格纳函数(a)  $m=2, n=0$  且  $r=0.1$ , (b)  $m=n=2$  且  $r=0.1$

Fig. 2 Wigner function of two-mode excited squeezed vacuum state for (a)  $m=2, n=0$  and  $r=0.1$ , (b)  $m=n=2$  and  $r=0.1$

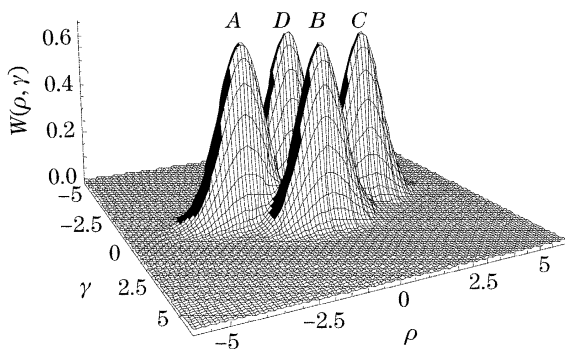


图 3 当  $m=n=2$  且  $r=0.3$  时双模激发压缩真空态的维格纳函数

Fig. 3 Wigner function of two-mode excited squeezed vacuum state for  $m=n=2$  and  $r=0.3$

当  $m=n=0$  且  $r=0$  时,双模激发压缩真空态的维格纳函数的波包在相空间中呈高斯型,与双模真空态的波包类似[图 1(a)]. 当  $m=n=0$  且  $r \neq 0$  时,其维格纳函数的波包被压扁,与双模压缩态的波包类似[图 1(b),这里取  $r=0.3$ ]. 当  $m=n \neq 0$  且  $r=0$  时,其维格纳函数由非独立的四个波包叠加而成,与双模数态的波包类似[图 1(c),这里取  $m=n=1$ ].

从图 2 可以看出,双模激发压缩真空态的维格纳函数的波包高度、数目和波包扩散的方向以及两个波包之间的距离均与双模被激发次数  $m, n$  有关。例如,当  $m=2, n=0$  且  $r=0.1$  时,其维格纳函数由在相空间中心的单个波包沿  $AB$  方向开始扩散,并逐渐成

为两个独立波包的叠加,但其高度较小[图 2(a)];随着  $n$  值的逐渐增大,叠加的两个波包  $A$  和  $B$  一直沿  $AD$  和  $BC$  方向处于扩散状态,最后发展成为四个独立波包  $A$ 、 $B$ 、 $C$  和  $D$  的叠加,并且波包的高度随之增加,波包  $A$  和  $D$ 、 $B$  和  $C$  之间的距离随之增大,但波包  $A$  和  $B$ 、 $C$  和  $D$  之间的距离保持不变[图 2(b)].可见,模 1 的被激发次数  $n$  决定波包  $A$  和  $D$ 、 $B$  和  $C$  之间的扩散距离。同样,由数值模拟的结论可知,当模 2 的被激发次数变化时,波包  $A$  和  $D$  分别沿  $AB$  和  $CD$  方向扩散,并且  $m$  值的大小决定波包  $A$  和  $B$ 、 $C$  和  $D$  之间的扩散距离。由上可见,对于  $m, n$  不同的取值,双模激发压缩真空态呈现出明显不同的维格纳函数分布,即在  $m, n$  取不同值此双模光场具有不同强度的量子干涉效应。

比较图 3 与图 2(b)可知,在压缩参量  $r$  较小的情况下,维格纳函数在相空间内为四个独立且稳定的圆锥状波包,但随着  $r$  的逐渐增大,波包在  $\gamma$  方向被压扁,并开始沿  $\rho$  方向扩散,包峰逐渐变宽,整个波包由圆锥状逐渐变扁成为椭圆状。波包随压缩参量  $r$  的这一变化规律正是此双模光场具有压缩效应的反映。综上所述,(32)式中的维格纳函数与体系所处的双模光场的激发压缩真空态之间存在一一对应关系。因此,研究此维格纳函数能够间接地掌握双模激发压缩

真空态的量子干涉特性和压缩效应随参量  $m, n$  和  $r$  的变化关系。

下面讨论双模激发压缩真空态维格纳函数的边缘分布。对于给定的单模态的密度矩阵  $\rho(q, p)$ ,则其对应的维格纳函数的两个边缘分布为<sup>[13]</sup>

在  $q$  方向:

$$P(q) = \frac{1}{2\pi} \int dp W(p, q) = \langle q | \rho(q, p) | q \rangle, \quad (33)$$

在  $p$  方向:

$$P(p) = \frac{1}{2\pi} \int dq W(p, q) = \langle p | \rho(q, p) | p \rangle, \quad (34)$$

对于双模激发压缩真空态,由于处于此态的两粒子具有很强的纠缠性,因此可以利用纠缠态来获得它的边缘分布函数。

在  $\rho \sim \gamma$  相位空间中,若对维格纳算符  $\Delta_{1,2}(\rho, \gamma)$  中变量  $\rho$  进行积分,可得到此积分与纠缠态  $|\eta\rangle$  的投影算符的关系为<sup>[9,10]</sup>

$$\int d^2 \rho \Delta_{1,2}(\rho, \gamma) = \frac{1}{\pi} |\eta\rangle \langle \eta|_{\eta=\gamma}. \quad (35)$$

因此,双模激发压缩真空态的维格纳函数  $W_{\pm}(\rho, \gamma)$  在  $\gamma$  方向的边缘分布函数为

$$P(\gamma) = \int d^2 \rho W(\rho, \gamma) = \frac{1}{\pi} |\langle \eta | r, n, m \rangle|^2_{\eta=\gamma}. \quad (36)$$

由于

$$\begin{aligned} \langle \eta | r, n, m \rangle &= \langle 00 | \int \frac{d^2 z_1 d^2 z_2}{\pi^2} \exp\left(-\frac{|\eta|^2}{2} + \eta^* a_1 - \eta a_2 + a_1 a_2\right) | z_1 z_2 \rangle \langle z_1 z_2 | a_1^{\dagger n} a_2^{\dagger m} \exp(a_1^{\dagger} a_2^{\dagger} \tanh r) | 00 \rangle = \\ &= \int \frac{d^2 z_1 d^2 z_2}{\pi^2} z_1^{*n} z_2^{*m} \exp\left(-|z_1|^2 - |z_2|^2 - \frac{|\eta|^2}{2} + \eta^* z_1 - \eta z_2 + z_1 z_2 + z_1^* z_2^* \tanh r\right) = \\ &= \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \eta^{*n-l} \int \frac{d^2 z_2}{\pi} z_2^l z_2^{*m} \exp\left[(\tanh r - 1)|z_2|^2 - z_2 \eta + z_2^* \eta^* \tanh r - \frac{|\eta|^2}{2}\right] = \\ &= \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \eta^{*n-l} \exp\left[\frac{3 - \tanh r}{2(\tanh r - 1)} |\eta|^2\right] \sum_{k=0}^{\min(m, l)} \frac{m! l! (-\eta)^{m-k} \eta^{*l-k}}{k! (m-k)! (l-k)! (1 - \tanh r)^{m+l-k+1}} = \\ &= \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \frac{(-\eta)^m \eta^{*n-l}}{(1 - \tanh r)^{l+1}} H_{m, l}\left(\frac{\eta}{1 - \tanh r}, \eta^*\right) \exp\left[\frac{3 - \tanh r}{2(\tanh r - 1)} |\eta|^2\right]. \end{aligned} \quad (37)$$

$$\text{则} \quad P(\gamma) = \frac{1}{\pi} \left| \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \frac{(-\gamma)^m \gamma^{*n-l}}{(1 - \tanh r)^{l+1}} H_{m, l}\left(\frac{\gamma}{1 - \tanh r}, \gamma^*\right) \exp\left[\frac{3 - \tanh r}{2(\tanh r - 1)} |\gamma|^2\right] \right|^2. \quad (38)$$

由此可见,  $P(\gamma)$  表示具有相对坐标  $\sqrt{2}\gamma_1$ , 同时具有总动量  $\sqrt{2}\gamma_2$  的纠缠双粒子在双模激发压缩真空态中找到的几率。

另外,在纠缠态  $|\zeta\rangle$  表象下,双模的维格纳算符  $\Delta_{1,2}(\rho, \gamma)$  可表示为<sup>[9,10]</sup>

$$\Delta_{1,2}(\rho, \gamma) = \int \frac{d^2 \zeta}{\pi^3} |\rho - \zeta\rangle \langle \rho + \zeta | \exp(\zeta^* \gamma - \zeta \gamma^*), \quad (39)$$

$$\text{式中} \quad |\zeta\rangle = \exp\left[-\frac{1}{2} |\zeta|^2 + \zeta a_1^{\dagger} + \zeta^* a_2^{\dagger} - a_1^{\dagger} a_2^{\dagger}\right] | 00 \rangle, \quad \zeta = \zeta_1 + i\zeta_2, \quad (40)$$

$$\text{满足下列方程:} \quad (X_1 + X_2) |\zeta\rangle = \sqrt{2}\zeta_1 |\zeta\rangle, \quad (P_1 - P_2) |\zeta\rangle = \sqrt{2}\zeta_2 |\zeta\rangle. \quad (41)$$

可见,纠缠态 $|\zeta\rangle$ 是处于纠缠的两粒子的质心坐标 $(X_1 + X_2)$ 和相对动量 $(P_1 - P_2)$ 的共同本征态。在 $\rho-\gamma$ 相位空间中,若对维格纳算符 $\Delta_{1,2}(\rho, \gamma)$ 中变量 $\gamma$ 进行积分,可得到此积分与纠缠态 $|\zeta\rangle$ 的投影算符的关系:

$$\int d^2\gamma \Delta_{1,2}(\rho, \gamma) = \frac{1}{\pi} |\zeta\rangle\langle\zeta|_{\zeta=\rho}. \quad (42)$$

同样,双模激发压缩真空态的维格纳函数 $W(\rho, \gamma)$ 在 $\rho$ 方向的边缘分布函数为

$$P(\rho) = \int d^2\gamma W(\rho, \gamma) = \frac{1}{\pi} |\langle\zeta|r, n, m\rangle|_{\gamma=\rho}^2 = \frac{1}{\pi} \left| \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \frac{\rho^{*n-l}}{(1+\tanh r)^{l+1}} H_{m,l} \left( \frac{\rho}{1+\tanh r}, \rho^* \right) \exp \left[ \frac{1-\tanh r}{2(1+\tanh r)} |\rho|^2 \right] \right|^2. \quad (43)$$

在上面的计算过程中,利用了纠缠态 $|\zeta\rangle$ 在双模福克空间中的展开形式:

$$|\zeta\rangle = \exp(-|\zeta|^2/2) \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{i!j!}} H_{i,j}(\zeta, \zeta^*) |i, j\rangle. \quad (44)$$

由此可见,  $P(\rho)$  表示具有质心坐标 $\sqrt{2}\rho_1$ , 同时具有相对动量 $\sqrt{2}\rho_2$  的纠缠双粒子在双模激发压缩真空态中找到的概率。因此, 双模激发压缩真空态的维格纳函数  $W(\rho, \gamma)$  的物理意义就在于: 它的边缘分布函数给出具有相对坐标 $\sqrt{2}\gamma_i$  (或质心坐标 $\sqrt{2}\rho_i$ ) 而同时具有总动量 $\sqrt{2}\gamma_2$  (或相对动量 $\sqrt{2}\rho_2$ ) 的纠缠双粒子在双模激发压缩真空态中出现的几率。由于在相空间  $\rho-\gamma$  中, 只要将维格纳函数分布作投影, 即可获得该函数在  $\rho$  (或  $\gamma$ ) 方向的边缘分布函数。因此, 由图 1 ~ 图 3 还可看出, 处于纠缠的双粒子在双模激发压缩真空态中出现的概率分布也与此态的双模被激发次数  $m, n$  和压缩参量  $r$  有关。

## 5 结 论

本文利用纠缠态表象下的维格纳算符, 构造出了双模激发压缩真空态的维格纳函数, 并根据该函数在相空间  $\rho-\gamma$  中随参量  $m, n$  和  $r$  的变化关系, 发现双模激发压缩真空态的维格纳分布函数的波包高度、数目和波包扩散的方向以及两个波包之间的距离均与双模被激发次数  $m, n$  有关, 即对于  $m, n$  不同的取值, 双模激发压缩真空态的量子干涉效应的强弱不同; 而其所呈现的压缩效应的强弱与压缩参量  $r$  有关。由于维格纳函数由量子态的密度矩阵来定义, 而密度矩阵包含了量子态的所有信息, 所以对维格纳函数进行测量即可获得量子态在演化过程中的所有信息和性质。因此, 在纠缠态表象下, 构造双模激发压缩真空态的维格纳函数对研究此双模态的演化过程有着重要的学术价值。

## 参 考 文 献

- Conditional large Fock state preparation and field state reconstruction in cavity QED [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2001, **87**(9): 093601
- 2 Zhang Zhiming. Reconstructing the Wigner function of cavity fields with the micromaser [J]. *Acta Physics Sinica*, 2004, **53**(1): 70~74 (in Chinese)  
张智明. 利用微脉塞重构腔场的 Wigner 函数 [J]. *物理学报*, 2004, **53**(1): 70~74
- 3 Zhang Zhiming. Measuring the Wigner functions of two-mode cavity fields and testing the Bell's inequalities [J]. *Chin. Phys. Lett.*, 2004, **21**(1): 5~8
- 4 K. Banaszek, C. Radzewicz, K. Wodkiewicz *et al.*. Direct measurement of the Wigner function by photon counting [J]. *Phys. Rev. A*, 1999, **60**(1): 674~677
- 5 G. Noguez, A. Rauschenbeutel, S. Osnaghi *et al.*. Measurement of a negative value for the Wigner function of radiation [J]. *Phys. Rev. A*, 2000, **62**(5): 054101
- 6 Xu Jingping, Yang Yaping. The time-dependent atom-field coupling J-C model with an initial squeezing state: two-photon process [J]. *Acta Optica Sinica*, 2005, **25**(2): 251~255 (in Chinese)  
许静平, 羊亚平. 压缩光场变耦合系数双光子 J-C 模型的性质 [J]. *光学学报*, 2005, **25**(2): 251~255
- 7 Xu Jingping, Yang Yaping. Time-dependent atom-field coupling Jaynes-Cummings model under an initial squeezing state [J]. *Acta Optica Sinica*, 2004, **24**(11): 1577~1580 (in Chinese)  
许静平, 羊亚平. 压缩态初始光场下变耦合系数的 Jaynes-Cummings 模型 [J]. *光学学报*, 2004, **24**(11): 1577~1580
- 8 Zhongxi Zhang, Hongyi Fan. Some properties of states engendered by the excitations on a two-mode squeezed vacuum state [J]. *Phys. Lett. A*, 1993, **174**(3): 206~209
- 9 Wu Hejun, Fan Hongyi. Two-mode Wigner operator in representation [J]. *Mod. Phys. Lett. B*, 1997, **11**(13): 549~554
- 10 Fan Hongyi, Fan Yue. Weyl correspondence and path integral for two-mode correlated system [J]. *Mod. Phys. Lett. A*, 1998, **13**(6): 433~439
- 11 Hongyi Fan, Junhua Chen. EPR entangled state and generalized Bargmann transformation [J]. *Phys. Lett. A*, 2002, **303**(5~6): 311~317
- 12 Fan Hongyi. *Representation and Transformation Theory in Quantum Mechanics* [M]. Shanghai: Shanghai Scientific & Technical Publishers, 1997. 110 (in Chinese)  
范洪义. 量子力学表象与变换论 [M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1997. 110
- 13 E. Wigner. On the quantum correction for thermodynamic equilibrium [J]. *Phys. Rev.*, 1932, **40**(5): 749~759