

文章编号: 0253-2239(2007)09-1543-5

# 湍流大气中光波闪烁的圆环孔径平均因子\*

马晓珊 朱文越 饶瑞中

(中国科学院安徽光学精密机械研究所大气光学实验室, 合肥 230031)

**摘要:** 利用弱起伏条件下球面波在大气湍流中传输的光强起伏(闪烁)理论和圆环孔径滤波函数, 获得了圆环孔径平均因子的精确表达式。将圆环孔径平均因子关于一个无量纲参量(孔径半径与菲涅耳尺度的比值)拟合成 2 阶多项式, 再找出多项式系数与孔径内外径之比的函数关系, 获得了圆环孔径平均因子关于该参量和孔径内外径之比的函数关系式。通过误差分析确定了拟合关系式的适用范围, 在此范围内, 拟合式与精确式的相对误差小于 25%。分别用 Tatarskii 谱和修正 Hill 谱分析了湍流内尺度对圆环孔径平均因子的影响, 结果显示: 在其他条件不变的情况下, 内尺度越大, 孔径平均效应相对越小。

**关键词:** 大气光学; 孔径平均效应; 数据拟合; 圆环孔径

中图分类号: P427.1 文献标识码: A

## Annular-Aperture Averaging Factor of Optical Scintillations in Turbulent Atmosphere

Ma Xiaoshan Zhu Wenyue Rao Ruizhong

(Laboratory for Atmospheric Optics, Anhui Institute of Optics and Fine Mechanics,  
the Chinese Academy of Sciences, Hefei 230031)

**Abstract:** Based on the theory for the irradiance fluctuations (scintillation) of the spherical wave propagating in the turbulent atmosphere and the annular-aperture filtering function, the expression of annular-aperture averaging factor was obtained. The annular-aperture averaging factor was fitted into a second-order polynomial about a dimensionless parameter, i. e. the ratio of the aperture radius to the Fresnel size. After establishing the relationship between the polynomial coefficients and the ratio of the inner to outer diameter of the aperture, the annular aperture averaging factor is expressed approximately as a function of this dimensionless parameter and the ratio of the inner to outer diameter of the aperture. The valid range and accuracy of the fitted approximation were evaluated by error analysis. The effect of the turbulent inner scale on the annular-aperture averaging factor was also analyzed by using Tatarskii spectrum and modified Hill spectrum. The results reveal that, when other conditions keep invariable, the larger the inner scale is, the weaker the averaging effect of the annular aperture is.

**Key words:** atmospheric optics; aperture averaging effect; data fitting; annular aperture

## 1 引 言

光波在湍流大气中的光强起伏一般称为闪烁, 闪烁强度随探测面积的增大而减小, 这种效应一般称为孔径平均效应。孔径平均效应最早是在 20 世纪 50 年代从天文观测中发现的<sup>[1]</sup>。D. L. Fried<sup>[2]</sup>从 Tatarskii 的研究出发给出了孔径平均因子的一般表达式, 其后 A. G. Kjelaas 等<sup>[3]</sup>也推导出了同

样的表达式。首先开展的是弱起伏条件下的理论研究工作, 获得了一些近似表达式<sup>[4~6]</sup>。然而早期的实验结果与弱起伏条件下的理论结果并不一致<sup>[7~9]</sup>, 随后 Gerald E. Homstad 等<sup>[10]</sup>在弱起伏条件下获得了与理论预测相一致的实验结果。在强起伏区并没有好的理论。James H. Churnside<sup>[11]</sup>总结了弱湍流条件下孔径平均因子的理论工作, 并发

\* 国防预研基金(51403040605zk0901)资助课题。

作者简介: 马晓珊(1979—), 女, 河南人, 博士研究生, 主要从事激光大气传输的研究工作。E-mail: mxshan@126.com

导师简介: 饶瑞中(1963—), 男, 安徽人, 研究员, 博士生导师, 主要从事激光大气传输前沿物理问题、光辐射和图像的大气传播、大气湍流的光学特征及其光学测量方法等。E-mail: rao@aiofm.ac.cn

收稿日期: 2006-11-30; 收到修改稿日期: 2007-05-11

展了适用于极强湍流条件下的孔径平均因子的表达式,同时分析了湍流内尺度的影响,并将理论与实验结果进行了对比,结果显示在各种条件下,他推导的近似式与实验结果吻合较好。Larry C. Andrews<sup>[12]</sup>基于弱湍流条件下强度起伏归一化协方差函数的已知结果,给出了精度更高的近似式。Erich L. Bass 等<sup>[13]</sup>采用修正 Hill 谱、并用高斯孔径模型近似圆形孔径以简化计算,得出适用于所有内尺度的平均因子。自从 L. C. Andrews<sup>[14]</sup>提出 Rytov 修正理论,在小尺度闪烁被大尺度闪烁调制的启发式理论框架下,给出了适用于整个起伏区域的闪烁理论之后,这一理论模型被广泛地应用于孔径平均因子的研究中<sup>[15~17]</sup>,但是这一理论尚未得到实验验证。

可以看出,以往孔径平均效应的理论和实验工作都是针对圆形孔径开展的,然而在当前激光大气传输等实验研究中通常以望远镜作为大口径接收装置,望远镜分为折射式、反射式和折反式,除了折射式望远镜是圆形孔径之外,反射式和折反式望远镜

由于副镜的存在而使接收孔径呈圆环而不是圆形。折射式望远镜通常口径很难做得很大,因此在需要大口径接收的场合,多选择后两种望远镜。故而从实验研究和工程应用的角度来看,有必要对圆环孔径平均因子进行理论研究。

## 2 圆环孔径平均因子的精确表达式

采用文献[11]中对孔径平均因子  $A$  的定义,直径为  $D$ 、内外径之比为  $\epsilon$  的圆环孔径的孔径平均因子为

$$A_a = \frac{\beta_i^2(D, \epsilon)}{\beta_i^2(D = 0)}, \quad (1)$$

式中  $\beta_i^2(D, \epsilon)$  表示激光点源发射、圆环孔径接收系统的闪烁指数,  $\beta_i^2(D = 0)$  表示激光点源发射、点接收系统的闪烁指数。从定义可知,孔径平均因子的数值越大,表示孔径的平均效应越小。根据光传输理论,在弱起伏条件下,波数为  $k$  的球面波经过大气湍流传播,在传播距离  $L$  处,孔径  $D$  上的闪烁指数为<sup>[18]</sup>

$$\beta_i^2(D, \epsilon) = 4 \times (2\pi k)^2 \int_0^L dz \int_0^\infty \sin^2 \left[ \frac{\gamma(L-z)}{2k} \kappa^2 \right] \Phi_n(\kappa) \kappa F(\gamma \kappa) d\kappa, \quad (2)$$

其中  $\kappa$  是空间波数,  $\gamma = z/L$  是球面波的传播因子,  $\Phi_n(\kappa)$  表示折射率起伏的三维功率谱密度,  $F(\kappa)$  表示孔径滤波函数。  $F(\kappa)$  对于不同的孔径有不同的表达式,对于内外径之比为  $\epsilon$  (当  $\epsilon = 0$  时,即成为圆形孔径)的圆环接收孔径:

$$F(\kappa) = \left( \frac{2}{1-\epsilon^2} \right)^2 \left[ \frac{J_1(\kappa D/2)}{\kappa D/2} - \epsilon^2 \frac{J_1(\epsilon \kappa D/2)}{\epsilon \kappa D/2} \right]^2, \quad (3)$$

将(3)式代入(2)式,得到弱起伏条件下圆环孔径上的闪烁指数

$$\beta_i^2(D, \epsilon) = 4 \times (2\pi k)^2 \int_0^L dz \int_0^\infty \sin^2 \left[ \frac{\kappa^2 z(L-z)}{2kL} \right] \Phi_n(\kappa) \kappa \left( \frac{2}{1-\epsilon^2} \right)^2 \left[ \frac{J_1(z\kappa D/2L)}{z\kappa D/2L} - \epsilon^2 \frac{J_1(\epsilon z\kappa D/2L)}{\epsilon z\kappa D/2L} \right]^2 d\kappa, \quad (4)$$

如果令  $D = 0$ , 就得到点接收系统的闪烁指数的表达式

$$\beta_i^2(D = 0) = 4 \times (2\pi k)^2 \int_0^L dz \int_0^\infty \sin^2 \left[ \frac{\kappa^2 z(L-z)}{2kL} \right] \Phi_n(\kappa) \kappa d\kappa. \quad (5)$$

将(4)式和(5)式代入孔径平均因子的定义式,就得到圆环孔径平均因子的精确表达式,它的分子和分母均为双重积分形式,通过数值方法可以精确求解。计算时内积分采用高斯求积法<sup>[19]</sup>,有两个因素要仔细考虑:高斯求积节点数的选择和内积分积分区间的选择。对于前者,计算表明:当高斯求积的节点数达到 1024 之后,再增加节点并不能使积分更精确。其次,数值求解时积分上限必须为合理的有限值而不能取无穷大。由于闪烁效应主要受湍流内

尺度  $l_0$  的影响,以  $10 \times 5.92/l_0$  作为积分上限是较为合理的。

利用精确式分析孔径内外径之比取不同值(实际系统中一般  $\epsilon \leq 0.5$ )时,圆环孔径平均因子随口径和路径的变化趋势分别如图 1 和图 2 所示。从图 1 可以得出:1)随着口径增大,孔径平均因子减小;2)外径相同的圆环( $\epsilon \neq 0$ )和圆形( $\epsilon = 0$ )孔径,其孔径平均因子并不相同;当其他条件不变时,随着孔径内外径之比的增加,圆环和圆形孔径的孔径平均因

子的差异越来越大;当  $\sqrt{kD^2/4L} < 4$  时,外径相同的圆形孔径与  $\epsilon=0.5$  的圆环孔径,其孔径平均因子的相对误差小于 13%,当  $\sqrt{kD^2/4L} > 4$  时,外径相同的圆形孔径与  $\epsilon=0.5$  的圆环孔径,其孔径平均因子的相对误差可达 40%;3)随着孔径内外径之比的增大,孔径平均因子随口径增大而减小的趋势逐渐变得平缓;4)  $\sqrt{kD^2/4L} \approx 4$  时,孔径平均因子基本与内外径之比无关。由图 2 可知,随着传播路径增长,孔径平均因子增大;当孔径内外径之比增大时,孔径平均因子随路径增长而变大的趋势变得平缓。

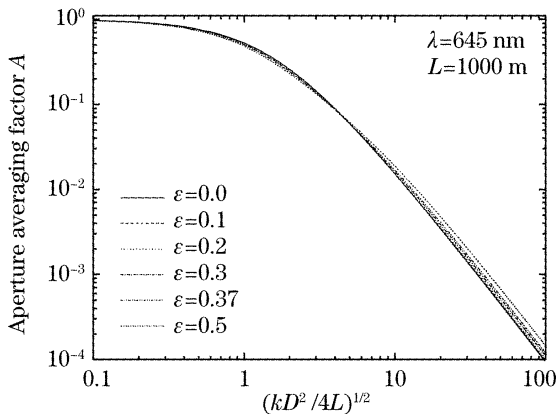


图 1 孔径平均因子随孔径半径  $D/2$  与  $\sqrt{L/k}$  比值的变化  
Fig. 1 Annular aperture averaging factor versus ratio of aperture radius  $D/2$  to Fresnel size  $\sqrt{L/k}$

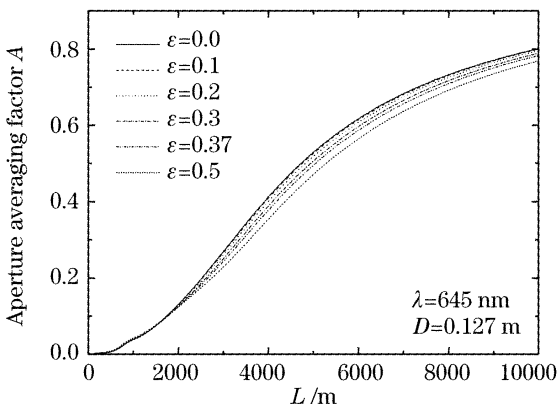


图 2 孔径平均因子随传播路径的变化

Fig. 2 Annular aperture averaging factor versus propagating length  $L$

### 3 圆环孔径平均因子的近似式

通过数值方法可以精确求解圆环孔径平均因子,但是从仪器设计和应用方便的角度来看,更希望获得圆环孔径平均因子的近似式。通常有两种做法:一是在空间频域内分析积分式中各项的相互关系,以便做出近似假设,求得解析表达式;二是在数值求解的基础上,用数据拟合的方法,获得精确解关

于某些参量的拟合式。本文采用后一种做法。

在进行数据拟合之前,首先要确定关于哪个参量进行拟合。从圆形孔径平均因子的大量理论和实验工作来看<sup>[10~13,15~17]</sup>,孔径平均因子近似的无量纲参量  $x = \sqrt{kD^2/4L}$  的函数,该参量是孔径半径  $D/2$  与菲涅耳尺度  $\sqrt{L/k}$  的比值,兼顾了三个参量的影响。因此首先在固定孔径内外径之比的情况下,分析  $A_a$  随  $x$  的变化,拟合出  $A_a$  关于  $x$  的函数表达式,式中含有若干拟合系数,只要找出这些拟合系数与  $\epsilon$  之间的函数关系,就能够得到  $A_a$  关于  $x$  和  $\epsilon$  的函数关系式。

将  $A_a$  关于  $x$  拟合时,可以利用图 1 的计算结果。该图虽然是固定其他参量,仅改变  $D$  得到的,但是固定  $D, \lambda$  和  $\epsilon$  仅改变  $L$  或是固定  $D, \epsilon$  和  $L$  仅改变  $\lambda$  的计算结果显示:不管  $D, \lambda$  和  $L$  怎样变化,只要  $x$  和  $\epsilon$  的值不变,  $A_a$  的值就不变。从图 1 可知:采用双对数坐标之后,对于固定的  $\epsilon$  值,可以将  $A_a$  关于  $x$  拟合成 2 阶多项式,拟合结果  $A_{a-fit}$  为

$$\lg(A_{a-fit}) = \sum_{n=0}^2 a_n(\epsilon) (\lg x)^n, \tag{6}$$

$$x = \sqrt{kD^2/4L},$$

对于固定的  $\epsilon$  值,每次拟合的相关系数均大于 99%。拟合式中的系数  $a_0, a_1$  和  $a_2$  都是  $\epsilon$  的函数。当  $\epsilon$  在 0~0.9 变化时,这些拟合系数的值列在表 1 中。

表 1 拟合系数随孔径内外径之比的变化

Table 1 Variation of fitted parameters with the ratio of the inner to outer diameter of the aperture

$\epsilon$	$a_0$	$a_1$	$a_2$
0	-0.32395	-1.15044	-0.36214
0.1	-0.32674	-1.14828	-0.36021
0.2	-0.33335	-1.13321	-0.35973
0.3	-0.34141	-1.10513	-0.36186
0.37	-0.34751	-1.07826	-0.36462
0.5	-0.36002	-1.01246	-0.37149
0.6	-0.37180	-0.94672	-0.37680
0.7	-0.38778	-0.86680	-0.37876
0.8	-0.41262	-0.77588	-0.36785
0.9	-0.45602	-0.70923	-0.30552

根据  $a_0, a_1$  和  $a_2$  随  $\epsilon$  的变化趋势,将它们分别关于  $\epsilon$  进行多项式拟合,得到

$$\begin{aligned} a_0(\epsilon) &= -0.32826 + 0.02442\epsilon - 0.17256\epsilon^2, \\ a_1(\epsilon) &= -1.1552 + 0.01428\epsilon + 0.55249\epsilon^2, \\ a_2(\epsilon) &= -0.36726 + 0.1953\epsilon - 0.79517\epsilon^2 + 0.71507\epsilon^3, \end{aligned} \tag{7}$$

以上  $a_0$ 、 $a_1$  和  $a_2$  关于  $\epsilon$  拟合的相关系数分别为 98.17%、99.77% 和 87.83%。将(7)式代入(6)式，就是圆环孔径平均因子的近似式。

### 4 近似式的相对误差

为了检验拟合式的准确程度，定义拟合得到的孔径平均因子对精确式的相对误差为

$$e = |(A_{a\_fit} - A_a) / A_a|, \quad (8)$$

通过对孔径内外径之比为不同值时  $A_{a\_fit}$  对  $A_a$  的相对误差的计算表明：当  $x < 0.5$  时(对应于非常小的孔径)，拟合式的相对误差较大，特别是内外径之比较小时，相对误差最大可达 200%，甚至失去了孔径平均因子的物理意义；当  $x \geq 0.5$  时，相对误差随  $x$  的变化如图 3 所示，该图在  $x \leq 100$  的区间内对相对误差进行分析，对于光波波段在 1000 m 路径上的传播，该区间覆盖的孔径直径的上限介于 1.6~2 m 之间。由图 3 可知，不论  $\epsilon$  取何值，随着  $x$  值增大，相对误差在很小的范围内有一个突起，达到峰值后迅速减小到约为 0，随后缓慢地先增大再减小到 0，在这个过程中相对误差始终很小(小于 15%)，之后相对误差随  $x$  增大而增大。由此可知本文给出的圆环孔径平均因子的拟合式的适用范围为  $\sqrt{kD^2/4L} \geq 0.5$ 。从图 3 来看，本文给出的拟合式在适用范围内相对误差小于 25%，其精度很高。以往针对圆形孔径开展了许多工作以获得圆形孔径平均因子的近似式：对于平面波，通常获得的近似式与精确式的相对误差非常小，但是对于球面波，James H. Churnside<sup>[11]</sup> 获得的大口径圆形孔径近似式与精确式的相对误差最高可达 86%，Larry C. Andrews<sup>[12]</sup> 在其基础上提高了近似式的精度，但相对误差依然可达 50%，Erich L. Bass<sup>[13]</sup> 利用修正 Hill 谱考虑了内尺度的

影响后获得的近似式的相对误差小于 12%。

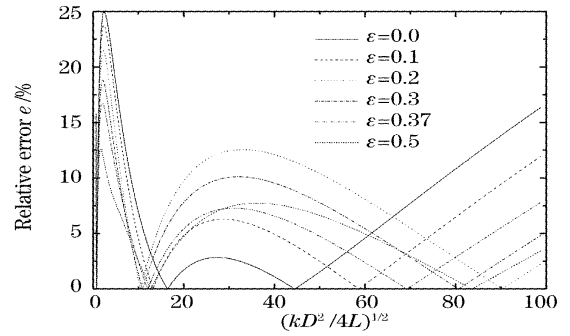


图 3 孔径平均因子的拟合值对于精确值的相对误差随  $\sqrt{kD^2/4L}$  与比值的变化  
Fig. 3 Relative error of fitted values of aperture averaging factor to exact values  $\sqrt{kD^2/4L}$

### 5 湍流内尺度的影响

以上分析是在湍流内尺度为 0 的条件下进行的，当内尺度不为 0，尤其是内尺度大于菲涅耳尺度时，内尺度的影响不能忽略。在折射率起伏的三维功率谱中包括描述内尺度效应的因子，其表达式为

$$\Phi_n(\kappa) = 0.033 C_n^2 \kappa^{-11/3} f(\kappa l_0), \quad (9)$$

式中  $C_n^2$  是大气折射率结构常数。如果内尺度为 0，即为科尔莫戈罗夫(Kolmogorov)谱，则  $f(\kappa l_0) = 1$ 。在考虑小尺度起伏时，广泛使用的是耗散区具有高斯下降趋势的 Tatarskii 谱

$$f(\kappa l_0) = \exp[-(\kappa l_0 / 5.92)^2]. \quad (10)$$

Hill 提出了一个普适谱模型，由于该谱没有解析解，L. C. Andrews 等将其拟合为

$$f(\kappa l_0) = \exp(-\kappa^2 / \kappa_l^2) \times [1 + 1.802(\kappa / \kappa_l) - 0.254(\kappa / \kappa_l)^{7/6}], \quad (11)$$

其中  $\kappa_l = 3.3 / l_0$ 。该模型称为修正 Hill 谱，与 Hill 谱的最大差别不超过 6%，一般在 1%~2%<sup>[14]</sup>。针

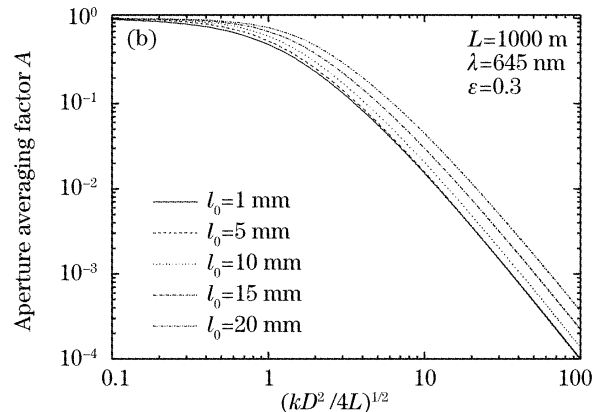
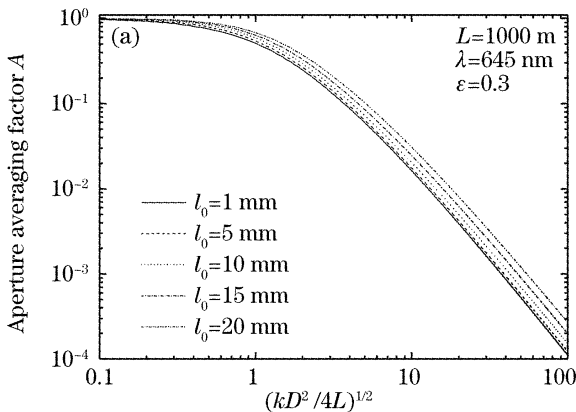


图 4 内尺度对圆环孔径平均因子的影响。(a) Tatarskii 谱，(b) 修正 Hill 谱

Fig. 4 Effect of the inner scale on the annular aperture averaging factor. (a) Tatarskii spectrum, (b) modified Hill spectrum

对  $\sqrt{L/k}=10$  mm 的传播条件, 以内外径之比为 0.3 的圆环孔径为例, 选取  $l_0$  为 1 mm、5 mm、10 mm、15 mm 和 20 mm, 分别用 Tatarskii 谱和修正 Hill 谱计算圆环孔径平均因子(图 4)。同时在图 5 中对比了当  $l_0$  远小于、约等于和远大于  $\sqrt{L/k}$  时利用 Tatarskii 谱和修正 Hill 计算圆环孔径平均因子时的差异。数值计算结果显示: 在其他条件不变的情况下, 内尺度越大, 圆环孔径平均因子越大, 孔径的平均作用相对越小; 当  $l_0 < \sqrt{L/k}$  时,  $l_0$  对圆环孔径平均因子的影响不大, 用 Tatarskii 谱和修正 Hill 谱计算的孔径平均因子仅有微小差异, Tatarskii 谱预测的孔径平均因子略大于修正 Hill 谱的预测值; 当  $l_0$  与  $\sqrt{L/k}$  近似相等时, 如果  $\sqrt{kD^2/4L} < 12$ , 修正 Hill 谱的预测值大于 Tatarskii 谱的预测值, 如果  $\sqrt{kD^2/4L} \geq 12$ , 则 Tatarskii 谱的预测值大于修正 Hill 谱的预测值; 当  $l_0 > \sqrt{L/k}$  时,  $l_0$  的变化对圆环孔径平均因子产生很大影响, Tatarskii 谱和修正 Hill 谱计算的孔径平均因子存在较大差异, 修正 Hill 谱比 Tatarskii 谱预测了更大的孔径平均因子。

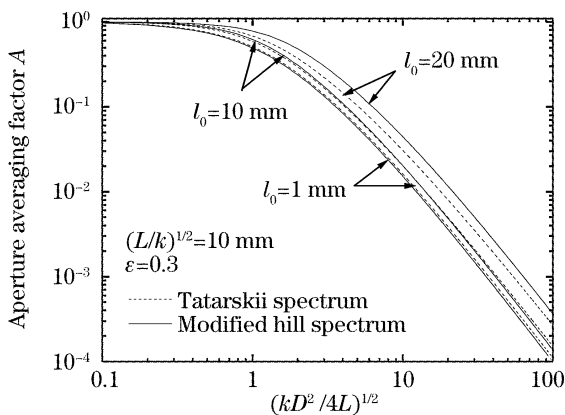


图 5 内尺度远小于、等于和远大于菲涅耳尺度时, 对比 Tatarskii 谱和修正 Hill 谱预测的圆环孔径平均因子

Fig. 5 Comparison of the annular aperture averaging factor predicted by Tatarskii spectrum and modified Hill spectrum for different relative relationship between the inner scale and the Fresnel size

## 6 结 论

从本文的分析可知, 如果简单地把圆环孔径作为圆形孔径来处理, 会产生很大的误差。由于圆环孔径平均因子的表达式是两个双重积分相除的形式, 比较复杂, 用数据拟合获得双重积分式的准确程度较高的近似式, 不失为一种简单有效的方法, 同时也给激光大气传输等工程应用以及闪烁计等仪器的设计提供了参考。除了本文采用的拟合法之外, 也可以从双重

积分式出发, 做出合理的近似假设, 求得解析表达式, 获得问题的完善解决。本文同时分析了湍流内尺度对圆环孔径平均因子的影响, 结果显示: 与环形孔径遮拦比相比, 湍流内尺度对平均因子的影响更大。

## 参 考 文 献

- 1 A. H. Mikesell, A. A. Hoag, J. S. Hall. The scintillation of starlight[J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1951, **41**(10): 689~695
- 2 D. L. Fried. Aperture averaging of scintillation[J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1967, **57**(2): 169~175
- 3 A. G. Kjelaas, P. E. Nordal. Scintillation noise reduction by aperture averaging in a long-path laser absorption spectrometer[J]. *Appl. Opt.*, 1982, **21**(14): 2481~2488
- 4 R. F. Lutomirski, H. T. Yura. Aperture-averaging factor of a fluctuating light signal[J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1969, **59**(9): 1247~1248
- 5 H. T. Yura, W. G. McKinley. Aperture averaging of scintillation for space-to-ground optical communication applications[J]. *Appl. Opt.*, 1983, **22**(11): 1608~1609
- 6 S. J. Wang, Y. Baykal, M. A. Plonus. Receiver-aperture averaging effects for the intensity fluctuation of a beam wave in the turbulent atmosphere[J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1983, **73**(6): 831~837
- 7 D. L. Fried, G. E. Meyers, M. P. Keister. Measurements of laser-beam scintillation in the atmosphere[J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1967, **57**(6): 787~797
- 8 D. H. Hohn. Effects of atmospheric turbulence on the transmission of a laser beam at 6328 Å I: distribution of intensity[J]. *Appl. Opt.*, 1966, **5**(9): 1427~1431
- 9 Rao Ruizhong, Gong Zhiben, Wang Shipeng *et al.*. Aperture averaging of saturated scintillation of laser propagation in the atmosphere[J]. *Acta Optica Sinica*, 2002, **22**(1): 36~40 (in Chinese) 饶瑞中, 龚知本, 王世鹏 等. 激光大气闪烁饱和的孔径平均效应[J]. *光学学报*, 2002, **22**(1): 36~40
- 10 Gerald E. Homstad, John W. Strohbehn, Roger H Berger *et al.*. Aperture-averaging effects for weak scintillations[J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1974, **64**(2): 162~165
- 11 James H. Churnside. Aperture averaging of optical scintillations in the turbulent atmosphere[J]. *Appl. Opt.*, 1991, **30**(15): 1982~1994
- 12 Larry C. Andrews. Aperture-averaging factor for optical scintillations of plane and spherical waves in the atmosphere[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1992, **9**(4): 597~600
- 13 Erich L. Bass, Brian D. Lackovic, Larry C. Andrews. Aperture averaging of optical scintillations based on a spectrum with high wave number bump[J]. *Opt. Engng.*, 1995, **34**(1): 26~31
- 14 L. C. Andrews, R. L. Phillips, C. Y. Hopen *et al.*. Theory of optical scintillation[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1999, **16**(6): 1417~1429
- 15 L. C. Andrews, R. L. Phillips, C. Y. Hopen. Aperture averaging of optical scintillations; power fluctuations and temporal spectrum[J]. *Waves Random Media*, 2000, **10**: 53~71
- 16 Larry C. Andrews, Ronald L. Phillips, Cynthia Y. Hopen. *Laser Beam Scintillation with Applications* [M]. Bellingham, WA: SPIE Press, 2001. 167~200
- 17 Linda M. Wasiczko, Christopher C. Davis. Aperture averaging of optical scintillations in the atmosphere; experimental results [C]. *Proc. SPIE*, 2005, **5793**: 197~208
- 18 Rao Ruizhong. *Light Propagation in the Turbulent Atmosphere* [M]. Hefei: Science and Technology Press, 2005. 180~183 (in Chinese) 饶瑞中. 光在湍流大气中的传播[M]. 合肥: 安徽科学技术出版社, 2005. 180~183
- 19 William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling *et al.*. *Numerical Recipes in C: the Art of Scientific Computing* [M]. 2nd Edition, New York: Cambridge University Press, 1992. 147~161