

文章编号: 0253-2239(2007)08-1513-6

多层球对高斯波束散射的德拜级数研究^{*}

施丽娟^{1,2} 韩香娥² 李仁先²

(¹ 江苏大学理学院物理系, 镇江 212013
² 西安电子科技大学理学院, 西安 710071)

摘要: 基于广义洛伦兹-米氏理论, 利用多层球粒子散射系数的德拜级数展开公式, 提出了一种新的研究多层球粒子对高斯波束散射的方法。计算结果与已有的广义洛伦兹-米氏理论算法的计算结果吻合得很好。利用该方法有效分离了折射率分布满足指数变化规律的多层球粒子对高斯波束散射的远区散射场中多阶彩虹的干涉强度分布。数值模拟了双层球的归一化双一阶彩虹强度分布以及各层的一阶彩虹艾里结构。最后分析讨论了高斯波束的入射位置和束腰半径对多层球单阶彩虹强度分布的影响。

关键词: 散射; 多层球粒子; 德拜级数; 高斯波束; 彩虹

中图分类号: O436 文献标识码: A

Debye Series of Gaussian Beam Scattering by a Multi-Layered Sphere

Shi Lijuan^{1,2} Han Xiang'e² Li Renxian²

(¹ Department of Physics, School of Science, Jiangsu University, Zhenjiang 212013)
(² School of Science, Xidian University, Xian 710071)

Abstract: On the basis of the generalized Lorenz-Mie theory, a new method to study Gaussian beam scattering by a multi-layered sphere is presented by the formula of the Debye series decomposition for scattering coefficients. The results calculated by this method and by the generalized Lorenz-Mie theory agree well. The scattered field distribution in the far-zone of a multi-layered sphere illuminated by Gaussian beam is simulated and the interference intensity distribution of mixed order rainbows is separated efficiently. The refractive index profile of the multi-layered sphere is exponential versus the radial position. The intensity distribution of the twin first-order rainbow and the Airy structure of each layer by a two-layered sphere are simulated. At last, the influence of incident position and beam waist on scattering intensity distribution is discussed.

Key words: scattering; multi-layered sphere; Debye series; Gaussian beam; rainbow

1 引 言

Gouesbet 和 Grehan 等^[1,2] 提出了广义洛伦兹-米理论 (Generalized Lorenz-Mie theory, GLMT), 从理论上比较系统地解决了球形粒子对有形波束的散射问题, 并已广泛应用于各种工业过程 (如燃烧、流体、化学反应), 大气环境科学, 生物医学等众多领域。然而, 基于严格电磁场理论的广义洛伦兹-米氏理论研究的是粒子光散射的总效果, 无法直接给出

散射过程中入射波与粒子表面的不同作用结果对散射场的实际贡献大小及其物理解释。

德拜 (Debye) 级数^[3] 将米氏散射系数中的每一项展开成一个无穷级数, 可以给出每一项的物理解释及其对散射场的贡献大小, 对于研究粒子的光散射特性具有独特的意义。关于粒子光散射的德拜级数研究, Lock 等^[3] 利用德拜级数公式研究了均匀球、双层球^[4] 对平面波的散射以及均匀球对高斯波

^{*} 教育部科学技术研究重点项目 (106149) 资助课题。

作者简介: 施丽娟 (1981-), 女, 江苏人, 助教, 硕士, 主要从事小粒子光散射理论及测试技术等方面的研究。

E-mail: juan-online@163.com

导师简介: 韩香娥 (1962-), 女, 河南人, 教授, 博士生导师, 主要从事小粒子光散射理论及测试技术以及信号处理等方面的研究。E-mail: xehan@mail.xidian.edu.cn

收稿日期: 2006-11-27; 收到修改稿日期: 2007-01-01

束的远区散射。多层球粒子平面波散射的德拜级数展开公式^[5]也已被推导出来。但罕见有关于多层球粒子对高斯波束散射的德拜级数研究的文献。

本文基于广义洛伦兹-米氏理论,利用多层球粒子散射系数的德拜级数展开公式和波束因子 g_n^m 的区域近似方法^[6,7],获得了多层球粒子对高斯波束散射的德拜级数算法。该方法不仅可以理论模拟散射场中的多阶彩虹干涉叠加强度分布^[8,9],还可以模拟单阶彩虹的艾里结构、高频振荡结构以及艾里结构与高频振荡结构的叠加结构,以及分层球的多一阶彩虹强度分布。利用彩虹强度分布的精细结构(艾里结构和高频振荡结构)可以高精度测量和反演粒子的折射率、尺寸及非球形度。

2 理论分析

2.1 多层球粒子对高斯波束的散射

图 1 为单色高斯波束 TEM₀₀ 照射到多层球粒子上的几何示意图。高斯波束在均匀介质中沿 z 轴正向传播,电场沿 x 方向极化,其时谐因子为

$\exp(i\omega t)$,束腰中心坐标在以球心 o 为原点的坐标系 $O-xyz$ 中为 (x_0, y_0, z_0) ,束腰半径为 ω_0 。空间一观察点 P 的球坐标为 (r, θ, φ) 。考虑到球散射的对称性,假设高斯波束的束腰中心和观察面均在在 yz 平面内,即 x_0 恒为 0, φ 取 90° 。

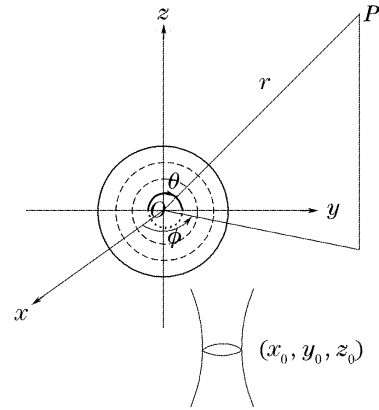


图 1 多层球对高斯波束散射的几何示意图

Fig. 1 Geometry of Gaussian beam scattered by a multi-layered sphere

入射高斯波束的磁标势 U_{TM}^i 和电标势 U_{TE}^i 可分别表示为相应场分量的和^[7]:

$$U_{TM}^i(r, \theta, \varphi) = -E_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (-i)^n \frac{2n+1}{n(n+1)} g_{n, TM}^m \times j_n(kr) P_n^{|m|}(\cos \theta) \exp(im\varphi), \quad (1)$$

$$U_{TE}^i(r, \theta, \varphi) = -E_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (-i)^n \frac{2n+1}{n(n+1)} g_{n, TE}^m \times j_n(kr) P_n^{|m|}(\cos \theta) \exp(im\varphi), \quad (2)$$

其中 $j_n(kr)$ 为球贝塞尔函数, $P_n^{|m|}(\cos \theta)$ 为关联勒让德函数。 $g_{n, TE}^m$ 和 $g_{n, TM}^m$ 为描述入射波特性的两组系数,称为波束因子,根据球贝塞尔函数和关联勒让德函数的正交性,可得到

$$g_{n, TM}^m = \frac{i^{n+1}}{4\pi} \frac{kr}{j_n(kr)} \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi P_n^{|m|}(\cos \theta) \exp(-im\varphi) \frac{E_r(r, \theta, \varphi)}{E_0}, \quad (3)$$

$$g_{n, TE}^m = \frac{i^{n+1}}{4\pi} \frac{kr}{j_n(kr)} \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi P_n^{|m|}(\cos \theta) \exp(-im\varphi) \frac{H_r(r, \theta, \varphi)}{H_0}, \quad (4)$$

应用区域近似法^[6,7]计算波束因子。

根据电磁场分量的展开式及在球面上的连续性,可得远场散射强度为

$$\lim_{r \rightarrow \infty} I(r, \theta, \varphi) = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \frac{1}{k^2 r^2} [|S_1(\theta, \varphi)|^2 + |S_2(\theta, \varphi)|^2], \quad (5)$$

其中, S_1 和 S_2 为散射振幅函数

$$S_1(\theta, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{2n+1}{n(n+1)} [a_n g_{n, TM}^m m \pi_n^{|m|}(\theta) + i b_n g_{n, TM}^m \tau_n^{|m|}(\theta)] \exp(im\varphi), \quad (6)$$

$$S_2(\theta, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{2n+1}{n(n+1)} [i b_n g_{n, TM}^m m \pi_n^{|m|}(\theta) + a_n g_{n, TM}^m \tau_n^{|m|}(\theta)] \exp(im\varphi), \quad (7)$$

式中

$$\pi_n^{|m|}(\theta) = \frac{1}{\sin \theta} P_n^{|m|}(\cos \theta), \quad \tau_n^{|m|}(\theta) = \frac{d}{d\theta} P_n^{|m|}(\cos \theta), \quad (8)$$

a_n 和 b_n 为经典米氏散射系数。

2.2 多层球粒子散射系数的德拜级数公式

当入射光照射到多层球粒子上时,一部分光线在球表面发生衍射,一部分光线在球表面直接反射。还有一部分光线经过球粒子各层内表面多次反射后透射出来,每一部分光线对散射场的贡献是不同的。米氏散射公式实际上包含了入射光与球形粒子相互作用的上述所有光线对散射场的总体贡献。将米氏散射系数无穷序列的每一项以德拜级数公式的形式展开,可有效区分上述三部分光线对散射场的实际

贡献大小,并给出每一项的物理解释。

当高斯波束照射到层球形粒子上,散射系数 a_n 和 b_n 的德拜级数展开式为^[5]

$$\left. \begin{matrix} a_n^l \\ b_n^l \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} (1 - Q_n^l), \quad (9)$$

该 l 层球粒子可以看作一个双层球,如图 2 所示。球核为图中的阴影部分,即从最里层到第 $l-1$ 层,球壳为第 l 层,球核对入射波的反射作用和所有折射作用可以用一个因子 Q_n^{l-1} 来表示,这样

$$\left. \begin{matrix} a_n^l \\ b_n^l \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \left(1 - R_n^{l+1,l,l+1} - \frac{T_n^{l+1,l} Q_n^{l-1} T_n^{l,l+1}}{1 - R_n^{l,l+1,l} Q_n^{l-1}} \right) = \frac{1}{2} \left[1 - R_n^{l+1,l,l+1} - T_n^{l+1,l} Q_n^{l-1} T_n^{l,l+1} \sum_{p=1}^{\infty} (R_n^{l,l+1,l} Q_n^{l-1})^{p-1} \right], \quad (10)$$

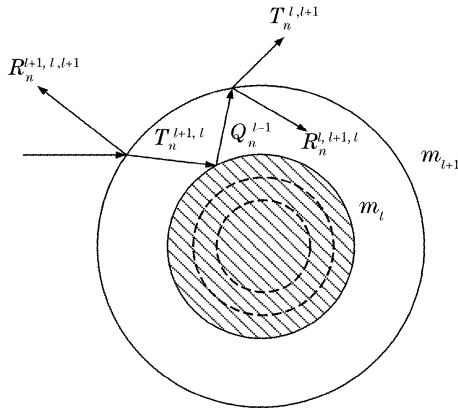


图 2 多层球德拜散射示意图

Fig. 2 Debye model of scattering by an multi-layered sphere
其中 $R_n^{l+1,l,l+1}$ 表示 $l+1$ 中的波经 l 和 $l+1$ 的分界面反射回 $l+1$ 中的那一部分波, $R_n^{l,l+1,l}$ 表示 l 中的波经 l 和 $l+1$ 分界面反射回 l 中的那一部分波, $T_n^{l+1,l}$ 和 $T_n^{l,l+1}$ 分别表示从 $l+1$ 中透射进入 l 中的那部分波和从 l 中透射进入 $l+1$ 中的那部分波。当对 n 求和时,(10) 式中的第一项 $1/2$ 表述多层球粒子对入射波束的衍射作用,第二项 $1/(2Q_n^l)$ 表示多层球对入射波束的反射和所有折射作用之和。第三项为全

部的折射作用,其中 p 为德拜阶次, $p=0$ 为直接由球表面反射的波; $p=1$ 为入射波进入球粒子后直接透射出来的波; $p=2$ 为入射波进入球粒子经过一次球壳内表面反射后透射出来的波;依此类推, $p=n$ 为入射波经过 $n-1$ 次球壳内表面反射后透射出来的波。计算时可分别得到不同项对散射场的贡献。

l 层球形粒子散射系数的德拜级数公式(9) 式和(10) 式,是从均匀球粒子散射系数的德拜级数展开公式^[8]

$$Q_n^l = R_n^{2l2} + \sum_{p=1}^{\infty} T_n^{2l1} (R_n^{2l1})^{p-1} T_n^{12} \quad (11)$$

出发,按照向上递推公式 $Q_n^1 \rightarrow Q_n^2 \rightarrow \dots \rightarrow Q_n^l \rightarrow \dots \rightarrow Q_n^{l-1} \rightarrow Q_n^l$ 求得,具体推导过程本文不再赘述。

3 数值结果

3.1 与广义洛伦兹-米氏理论结果的比较

图 3 为用广义洛伦兹-米氏理论和德拜级数算法模拟的在轴[图 3(a)]和离轴(图 3(b)和图 3(c)] 多层球粒子对高斯波束散射的远区散射强度对数分

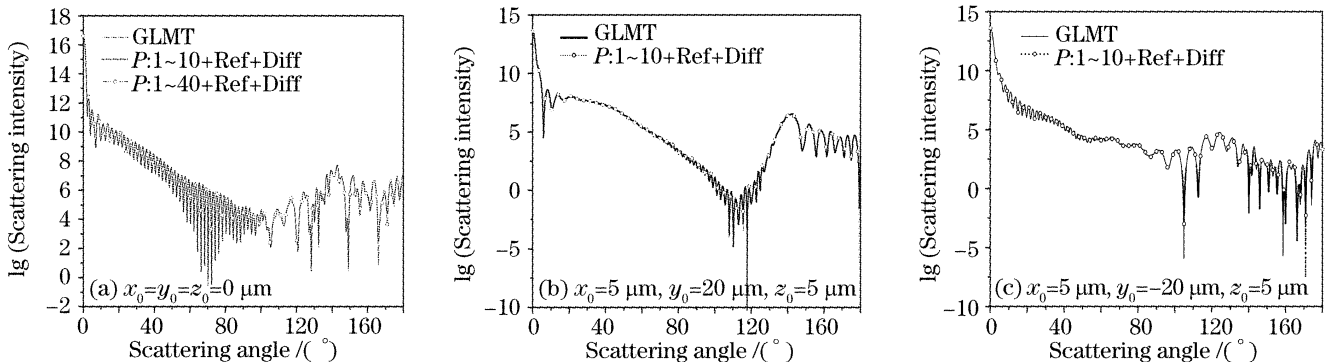


图 3 广义洛伦兹-米氏理论和德拜级数模拟非均匀球粒子对高斯波束散射强度的比较

Fig. 3 Comparison of scattering intensity calculated by generalized Lorenz-Mie theory (GLMT) an Debye series for inhomogeneous sphere illuminated by Gaussian beam

布曲线。多层球粒子的折射率分布按指数规律变化:

$$m(\rho) = m_c + (m_s - m_c)(e^{b\rho} - 1)/(e^b - 1), \quad (12)$$

其中 m_s 和 m_c 分别为核心折射率和表面折射率, b 为折射率分布因子, 是一个常数, ρ 为归一化半径 ($\rho = r/a$, a 为球粒子半径, r 为球内各点径向长度)。模拟参量 $m_s = 1.3216$, $m_c = 1.3316$, 周围环境折射率 $m_3 = 1$, $b = 6$, 粒子半径 $a = 10 \mu\text{m}$, 层数 $l = 100$, 入射高斯波束的波长为 $\lambda = 632.8 \text{ nm}$, 束腰半径 $\omega_0 = 15 \mu\text{m}$ 。

根据散射系数 a'_n 和 b'_n 的德拜级数展开公式(9)式和(10)式, 当求和项中的德拜阶次 p 从 1 取到 ∞ 时, Q'_n 因子包含了对散射场有贡献的所有因素。从理论上说, 此时获得的散射场与广义洛伦兹-米氏理论理论计算的结果一样。但实际计算过程中, 当 p 从 1 取到一个足够大的数时(图 3 中 p 从 1 取到 40), 所计算的散射强度已经包含了对散射场有贡献的主要因素, 其余部分对散射场的贡献可以忽略不

计, 因此所获得的数值结果与广义洛伦兹-米氏理论的结果就吻合得很好。

3.3 多阶彩虹强度干涉

参考文献[9]利用对彩虹强度频谱进行低通和带通滤波后逆快速傅里叶变化强度重建的方法, 从二阶和五阶彩虹干涉强度角分布中分离出单一的二阶和五阶彩虹。利用德拜级数算法, 对德拜阶次 p 取不同的数值, 就可以模拟出二阶和五阶彩虹干涉强度分布, 而且能够直接分离出独立的二阶和五阶彩虹的艾里分布信息。

图 4(a)为用广义洛伦兹-米氏理论程序模拟的 $117^\circ \sim 133^\circ$ 散射角范围内二阶和五阶彩虹的干涉强度分布, 与用德拜级数算法取阶次 $p = 3 + 6 + \text{Re}f + \text{Diff}$ 的模拟结果吻合得很好。图 4(b)中, 舍去了衍射项与反射项对散射场的作用, 分离出二阶与五阶彩虹艾里结构的干涉强度分布; 图 4(c)和图 4(d)又进一步分离出 $117^\circ \sim 133^\circ$ 散射角范围内二阶和五阶彩虹强度的艾里结构。

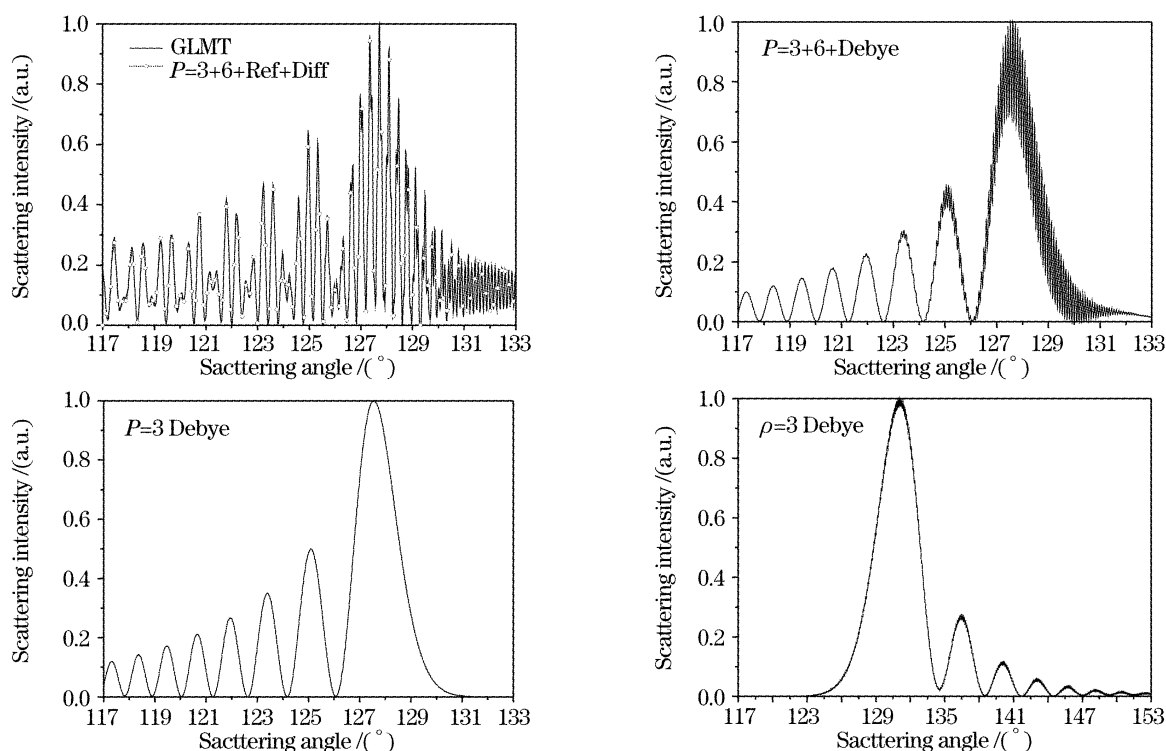


图 4 多层球二阶与五阶彩虹干涉强度的德拜级数模拟

Fig. 4 Interference intensity of the second- and fifth-order rainbow for the inhomogeneous sphere simulated by Debye series

3.4 双一阶彩虹强度模拟

如图 5, 当高斯波束照射到双层球上时, 一部分光线(用 α 表示)由球内层 1 中经过一次内表面反射后透射出来, 一部分光线(用 β 表示)由球外层 2 内表面经过一次反射后透射出来, 由于各层球的折射率不同, 这两部分光线对应的彩虹艾里峰角位置也不同, 因此出现了所谓的双彩虹现象^[4]。

图 6 为双层球对高斯波束散射的双一阶彩虹强度分布图, 计算参量为 $\lambda = 632.8 \text{ nm}$, $\omega_0 = 550 \mu\text{m}$, $O_G(0, 0, 0)$; 双层球粒子内层折射率 $m_1 = 1.333$, 外层折射率 $m_2 = 1.2$, 相应尺寸参量为 $x_1 = 5000$, $x_2 = 5175$, 环境折射率 $m_3 = 1$ 。

由图 6 可以看出用德拜级数程序模拟出来的彩虹强度分布图跟广义洛伦兹-米氏理论相比缺少高频

振荡部分,这是由于计算时德拜阶次只取 $p=2$,即数值模拟了经球内层和外层内表面反射的光线对散射场的贡献,而没有算入球粒子对波束的反射和衍射作用。如图 7 给出了利用德拜级数获得的双层球粒子各层的一阶彩虹艾里强度分布,曲线 1、2 依次代表内

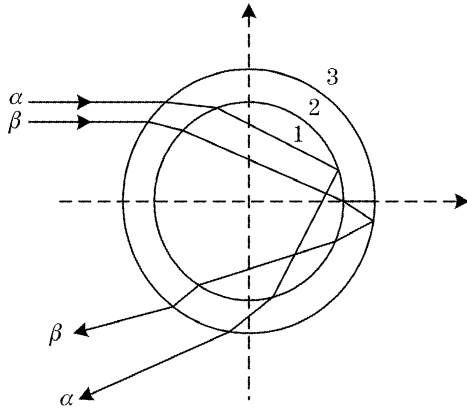


图 5 双一阶彩虹的德拜模型

Fig. 5 Debye model of twin first-order rainbows

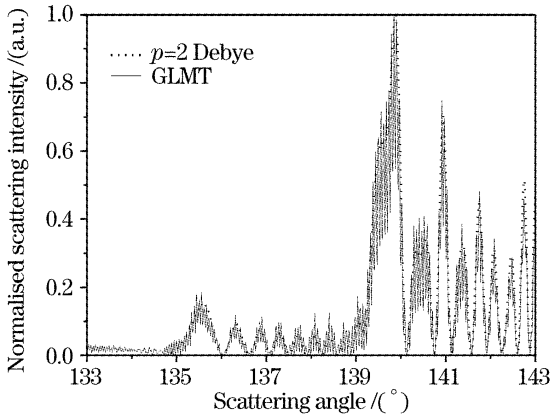


图 6 归一化双一阶彩虹强度分布

Fig. 6 Normalised intensity distribution of the twin first-order rainbows

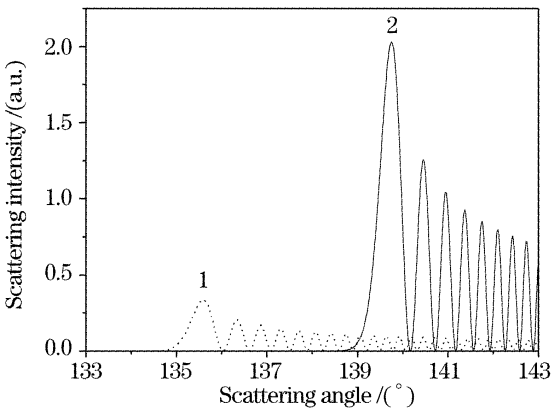


图 7 双一阶彩虹艾里强度的德拜级数模拟

Fig. 7 Airy intensity of the twin first-order rainbows simulated by Debye series

层和外层,可以明显看出,由内层到外层的彩虹角位置发生了明显的偏移,相应的艾里峰也出现了显著增强的变化。

3.3 波束位置和波束宽度对单阶彩虹强度分布的影响

根据 van de Hulst 等^[10]对彩虹强度角分布的解释,球形粒子的一阶和二阶彩虹分布主要来自: 1)经粒子内表面一次或两次反射后出射,并在几何光学彩虹角附近入射光线;2)经球粒子外表面反射且与一阶或二阶几何光学彩虹角附近光线基本平行的入射光线;3)掠射球、形成表面波且与上述两种光线基本平行的入射光线。针对上述三个典型位置的入射光线,用德拜级数研究了以不同位置入射的高斯波束对一阶彩虹强度分布的影响及束腰半径不同的高斯波束对二阶彩虹强度分布的影响。

图 8 为束腰半径为 $\omega_0 = 20 \mu\text{m}$ 的高斯波束在一阶彩虹附近位置照射到多层球粒子上的一阶彩虹强度角分布。由于入射高斯波束的束腰半径只有球粒子半径的,入射波束中不存在第二个和第三个典型位置的入射光与产生一阶彩虹的透射光线发生干涉,强度分布中均只存在艾里结构。此时德拜阶次取 $p=2 + \text{diff} + \text{Ref}$ 三项与只取 $p=2$ 的结果完全吻合。随着入射位置偏离,艾里分布的波峰值逐渐减小,而波谷值反而增大。

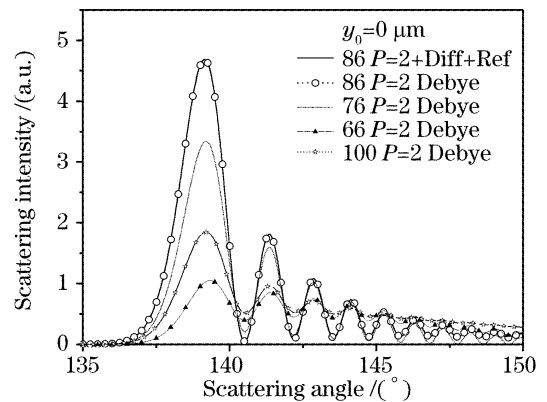


图 8 不同波束位置对一阶彩虹强度分布的影响

Fig. 8 Influence of the different beam position on the intensity distribution of first-order rainbow

图 9 为多层球粒子对入射位置相同、束腰半径不同的高斯波束散射的二阶彩虹强度角分布。随着波束束腰半径的增大,入射光的能量增强,对艾里分布有贡献的光线增多,二阶彩虹的艾里强度不断增强并且叠加了高频波动结构,图中利用德拜阶次的不同取项对其进行了分离。

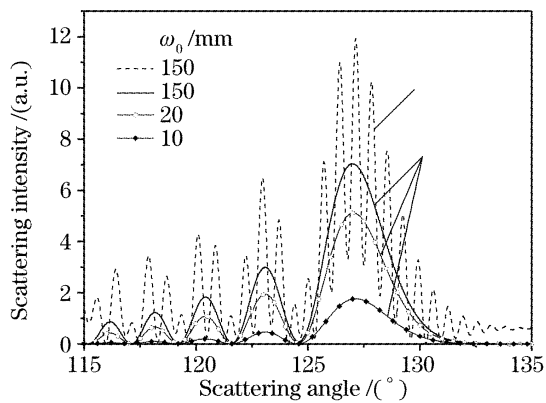


图 9 不同波束半径对二阶彩虹强度分布的影响

Fig. 9 Influence of the beam radius on the intensity of second-order rainbow

4 结 论

本文利用多层球粒子对高斯波束散射的德拜级数算法,重点研究了多层球粒子对高斯波束的彩虹散射。成功分离了折射率分布满足指数规律变化的多层球粒子对高斯波束散射的二阶和五阶彩虹干涉强度角分布;模拟了双层球的双重一阶彩虹强度及各层上的一阶彩虹艾里分布。讨论了高斯波束入射位置和束腰半径的变化对单阶彩虹强度分布的影响。该内容的研究无论在理论上还是实际工程应用上都具有重要有意义。

参 考 文 献

1 G. Gousbet, B. Maheu, G. Grehan. Light scattering from a

- sphere arbitrarily located in a Gaussian beam, using a Bromwich formulation[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1988, **5**(9): 1427~1443
- 2 James A. Lock. Contribution of high-order rainbows to the scattering of a Gaussian laser beam by a spherical particle[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1993, **36**(21): 693~706
- 3 Edward A. Hovenac, James A. Lock. Assessing the contributions of surface waves and complex rays to far-field Mie scattering by use of the Debye series[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1992, **9**(5): 781~795
- 4 James A. Lock, J. Michael Jamison, Chih-Yang Lin. Rainbow scattering by a coated sphere[J]. *Appl. Opt.*, 1994, **33**(21): 4677~4690
- 5 Renxian Li, Xiang'e Han, Huifen Jiang *et al.*. Debye series for light scattering by a multilayered sphere[J]. *Appl. Opt.*, 2006, **45**(6): 1260~1270
- 6 K. F. Ren, G. Gréhan, G. Gouesber. Evaluation of laser-sheet beam shape coefficients in generalized Lorenz-Mie theory by use of a localized approximation[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1994, **11**(7): 2072~2079
- 7 James A. Lock, G. Gousbet. Rigorous justification of localized approximation to the beam-shape coefficients in generalized Lorenz-Mie theory. I. On-axis beams[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1994, **11**(9): 2503~2515
- 8 Han Xiang'e, Ren Kuanfang, G. Gréhan *et al.*. Rainbow and its application to inhomogeneous sphere [J]. *Acta Optica Sinica*, 2003, **23**(6): 712~761 (in Chinese)
- 韩香娥,任宽芳, G. Gréhan 等. 彩虹及在非均匀球中的应用[J]. *光学学报*, 2003, **23**(6): 712~761
- 9 Jiang Huifen, Han Xiang'e, Ren Kuanfang *et al.*. Reconstruction of intensity of the second and fifth rainbows and its applications to homogeneous droplet [J]. *Acta Optica Sinica*, 2004, **24**(11): 1561~1565 (in Chinese)
- 姜会芬,韩香娥,任宽放 等. 均匀球形液滴二阶和五阶彩虹的重建及应用[J]. *光学学报*, 2004, **24**(11): 1561~1565
- 10 Wang, H. C. Van de Hulst. Rainbows: Mie computations and the Airy approximation[J]. *Appl. Opt.*, 1991, **30**(1): 106~117