

文章编号: 0253-2239(2007)08-1361-5

根据到达角协方差测量大气湍流外尺度*

黄宏华 姚永帮 饶瑞中

(中国科学院安徽光学精密机械研究所大气光学中心, 合肥 230031)

摘要: 通过湍流大气中光波相位结构函数得到两点间的到达角协方差与大气湍流外尺度的关系, 并利用差分到达角方差进行了归一化, 进而得到大气湍流外尺度和差分到达角方差及到达角协方差的表达式。采用四孔到达角起伏测量仪进行了近地面水平路径的实验, 测量结果表明在离地面 6 m 的高度上, 湍流外尺度在 4 m 左右, 并随时间变化, 不同方向的测量结果有一些差别。

关键词: 大气光学; 大气湍流外尺度; 相位结构函数; 到达角协方差
中图分类号: P427.1 文献标识码: A

Atmospheric Turbulence Outer Scale Measurement Based on Angle-of-Arrival Covariance

Huang Honghua Yao Yongbang Rao Ruizhong

(Center for Atmospheric Optics, Anhui Institute of Optics and Fine Mechanics,
The Chinese Academy of Sciences, Hefei 230031)

Abstract: According to atmospheric turbulence phase structure function, the relation between the angle-of-arrival covariance of two points and the atmospheric turbulence outer scale is deduced, and normalized by the differential angle-of-arrival variance. The expression of outer scale by the ratio of angle-of-arrival variance and angle-of-arrival covariance is obtained. The experimental results for horizontal propagation in the real atmosphere by four-aperture angle-of-arrival variance measuring apparatus show that the average outer scale is about 4 m at the height of 6 m above the ground. Further more the outer scale changes with time, and they are different in different directions.

Key words: atmospheric optics; atmospheric turbulence outer scale; phase structure function; angle of arrival covariance

1 引 言

在大气光学及其应用研究中, 湍流的特征尺度起着重要的作用。由于大尺度湍流对光波的相位起伏起主要作用, 以相位补偿为目的的自适应光学技术及在天文观测对大气湍流外尺度的准确测量十分关注^[1~4]。研究表明有限的大气外尺度对大气湍流统计特征的测量有很大的影响, 尤其对大尺寸的望远镜和子孔径更是如此^[5]。

目前有采用光束抖动频谱遥感大气湍流外尺

度, 或者借助于同一目标天体经两不同直径的子孔后所成像的抖动方差之间关系进行测量^[6,7], 亦有用四台独立的小型望远镜通过一定的位置配置, 通过同一目标天体成像之间的到达角协方差, 然后通过插值的方法来得到外尺度^[8,9]。此外, 还有利用非光学的方法进行测量, 如采用温度起伏方差、折射率结构常数与外尺度之间的关系进行测量。但使用非光学方法测量湍流光学参量的可靠程度尚存在着一些不确定因素, 最近有报道认为用温度起伏测定

* 国家 863 计划激光技术领域资助课题。

作者简介: 黄宏华(1976—), 男, 湖北大悟人, 博士研究生, 主要从事大气光学参量特性、湍流图像传输等研究。

E-mail: hhhuang@aiofm.ac.cn

导师简介: 饶瑞中(1963—), 男, 博士, 研究员、博士生导师, 主要从事激光大气传输前沿物理问题、光辐射和图像的大气传播、大气湍流的光学特征及其光学测量方法等的研究。E-mail: rao@aiofm.ac.cn

收稿日期: 2006-10-30; 收到修改稿日期: 2007-01-29

的和光学方法测得的值相差达 4 倍以上。如果实际情况确实如此,则会在工程应用中产生很大的影响^[1]。本文根据包含外尺度参量的 Von Karman 空间功率谱模型来计算相位结构函数,从而得到到达角协方差与外尺度之间的联系。然后推导出包含 Fried 参量的差分到达角方差,利用差分到达角起伏方差对到达角协方差归一化,从而得到计算外尺度的表达式。文中利用自行研制的四孔到达角起伏测量仪,通过子孔不同方位的基线配置,可以在四个方向上测量到达角起伏协方差。

2 测量原理

相位结构函数 $D_\varphi(r)$ 可由其空间功率谱 $W_\varphi(f)$ 表达为^[8,10]

$$D_\varphi(r) = 4\pi \int_0^{+\infty} f W_\varphi(f) [1 - J_0(2\pi r f)] df, \quad (1)$$

式中 r 为所研究的两点间的距离, f 为空间频率。在工程应用上,有时考虑的是口径为 D 的两个子瞳(或望远镜)的平均起伏之间的相位差,这里的 r 即为两子瞳中心的间距。考虑到望远镜接收口径对频

率的调制作用,(1)式可以写成

$$D_\varphi(r) = 4\pi \int_0^{+\infty} f W_\varphi(f) [1 - J_0(2\pi r f)] \left[\frac{2J_1(\pi D f)}{\pi D f} \right]^2 df. \quad (2)$$

目前使用较多的湍流功率谱有 Tatarskii 谱、Kolmogorov 谱、von Karman 谱、Hill 谱和 Frehlich 谱。湍流大气光学前期的理论研究大都采用 Tatarskii 谱,但现在的研究表明其耗散区形式不符合真实的情况。Hill 谱在数值计算中较多使用,但至今仍未得到普遍认可。在湍流大气光学研究中,使用最广泛的是 Tatarskii 谱和 Von Karman 谱的综合谱。在考虑大尺度的湍流起伏时,总是使用 Von Karman 谱^[1]。在近场近似等假设下可得以 Von Karman 谱为基础的光波相位起伏的二维空间功率谱:

$$W_\varphi(f) = 0.0229 r_0^{-5/3} (f^2 + f_0^2)^{-11/6}, \quad (3)$$

r_0 为 Fried 参量(亦称为大气相干长度), f_0 为与外尺度 L_0 对应的空间频率,满足 $f_0 = 1/L_0$ 。

当 $D < r < L_0/\pi$ 时,将(3)式代入(2)式并结合梅林变换,可以得到

$$D_\varphi(r) = -\frac{4\Gamma(11/6)}{\pi^{3/2}} \left[\frac{24}{5} \Gamma(6/5) \right]^{5/6} \left(\frac{r}{r_0} \right)^{5/3} \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{(-1)^m}{m!} (\pi r f_0)^{2n-5/3} \times \right. \\ \left. (\pi D f_0)^{2m} \Gamma \left[\begin{matrix} n+m+1, 5/6-n-m, m+3/2, \\ n+1, m+3, m+2 \end{matrix} \right] + \right. \\ \left. \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{(-1)^m}{m!} (\pi r f_0)^{2n} \left(\frac{D}{r} \right)^{2m} \Gamma \left[\begin{matrix} m-n-5/6, n+11/6, m+3/2, \\ n-m+11/6, m+3, m+2 \end{matrix} \right] \right) \right\}, \quad (4)$$

其中
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (5)$$

激光在实际大气中传输时,受湍流扰动的影响,在焦平面上所成光斑会发生随机的抖动,这就是所谓的光束到达角起伏的结果。假定在 x, y 坐标系内,研究到达角方向沿 x 轴方向,到达角起伏协方差 $B_a(x, y)$ 与相位结构函数有如下关系^[11]:

$$B_a(x, y) = \frac{\lambda^2}{8\pi^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} D_\varphi(x, y), \quad (6)$$

结合(4)式~(6)式,可以得到

$$B_a(x, y) = -2.3258 r_0^{-5/3} \frac{\lambda^2}{8\pi^2} \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{(-1)^m}{m!} [2n(x^2 + y^2)^{n-1} + 4n(n-1) \times (x^2 + y^2)^{n-2} x^2] \times \right. \\ \left. (\pi f_0)^{2n-5/3} (\pi D f_0)^{2m} \Gamma \left[\begin{matrix} n+m+1, 5/6-n-m, m+3/2, \\ n+1, m+3, m+2 \end{matrix} \right] + \right. \\ \left. \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{(-1)^m}{m!} [2(n-m+5/6)(x^2 + y^2)^{n-m-1/6} + \right. \\ \left. 4(n-m+5/6)(n-m-1/6) \times (x^2 + y^2)^{n-m-7/6} x^2] \times \right. \\ \left. (\pi f_0)^{2n} (D)^{2m} \Gamma \left[\begin{matrix} m-n-5/6, n+11/6, m+3/2, \\ n-m+11/6, m+3, m+2 \end{matrix} \right] \right\}, \quad (7)$$

对于径向协方差而言,(7)式中 $y = 0$ 。另外,由于在实际系统中, D 一般在 0.1 m 左右, f_0 的高阶项很快趋于零,取 f_0 相对较大的阶次项来选择 m, n 的取值,则(7)式展开后为

$$B_a(x, y) = \lambda^2 r_0^{-5/3} x^{-1/3} [-0.25894(xf_0)^{1/3} + 4.58925(xf_0)^2 + 0.43821(Df_0)^2 - 1.09528(Df_0)^{7/3}(x/D)^{1/3} - 6.57171(xf_0)^{7/3} - 24.94622(xf_0)^{13/3} + 0.09687 - 22.45159(x/D)^{7/3}(Df_0)^{13/3} - 77.75032x^{13/3}f_0^{19/3} + 0.00673(D/x)^2], \quad (8)$$

对上式进行分析发现, f_0 的 1/3 次项后的高阶项随着外尺度增加很快趋于零(如当外尺度为 5 m 时, f_0 的 1/3 次项以上的高阶项值的和不及 f_0 的 1/3 次项的 5%)。为了计算方便,文中只保留到 f_0 的 1/3 次项,则(8)式可简化为

$$B_a(x) = \lambda^2 r_0^{-5/3} x^{-1/3} [0.09685 + 0.00673(D/x)^2 - 0.25894(xf_0)^{1/3}]. \quad (9)$$

望远镜接收到的目标图像抖动的根源在于大气湍流引起的相位起伏,对抖动图像在 x 轴方向的一维运动进行分析,结合到达角起伏理论,可以得到图像质心运动方差 σ_{cx}^2 为^[12]

$$\sigma_{cx}^2 = \lambda^2 \iint f_x^2 \Phi(f) \left[\frac{2J_1(\pi Df)}{\pi Df} \right]^2 d^2 f, \quad (10)$$

在这里仍采用 von Karman 谱 $\Phi(f)$,对(10)式采用归一化的极坐标形式:

$$(u, \theta) = [\pi Df, \arctan(f_y/f_x)], \quad (11)$$

则(10)式可化为

$$\sigma_{cx}^2 = 0.0916\lambda^2 r_0^{-5/3} (\pi D)^{-4} \iint u J_1^2(u) \left[\frac{u^2}{(\pi D)^2} + f_0^2 \right]^{-11/6} \cos^2 \theta d\theta du, \quad (12)$$

同理,将(12)式中的 $\cos^2 \theta$ 改为 $\sin^2 \theta$ 后即可得到 y 轴上到达角抖动方差。在均匀各向同性假设下,无论 x, y 轴上图像抖动方差应该相同,则

$$\sigma_c^2 = (\sigma_{cx}^2 + \sigma_{cy}^2)/2, \quad (13)$$

故(13)式为

$$\sigma_c^2(D, f_0) = 0.0916\lambda^2 r_0^{-5/3} (\pi D)^{-4} \pi \int u J_1^2(u) \left[\frac{u^2}{(\pi D)^2} + f_0^2 \right]^{-11/6} du, \quad (14)$$

采用梅林变换,对(14)展开可得

$$\sigma_c^2(D, f_0) = 0.0589\lambda^2 r_0^{-5/3} D^{-1/3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \times \left\{ (\pi D f_0)^{2n+1/3} \Gamma \left[\begin{matrix} 3/2 + n, -n - 1/6, \\ 3 + n \end{matrix} \right] + (\pi D f_0)^{2n} \Gamma \left[\begin{matrix} 1/6 - n, n + 4/3, \\ 17/6 + n \end{matrix} \right] \right\}. \quad (15)$$

与到达角协方差类似,随着外尺度的增大,(15)式的高阶项也迅速趋于零(当外尺度为 5 m 时, f_0 的 1/3 次项以上的高阶项值的和不到 f_0 的 1/3 次项值的 1%)。保留 f_0 的 1/3 次项,得

$$\sigma_c^2(D, f_0) = \lambda^2 r_0^{-5/3} (0.16977D^{1/3} - 0.25894f_0^{1/3}), \quad (16)$$

基线距离为 d 的差分图像运动方差 $\sigma_{diff}^2(d)$ 与到达角协方差及一维图像运动方差的关系^[11]:

$$\sigma_{diff}^2(d) = 2[\sigma_c^2(D, f_0) - B_a(d)], \quad (17)$$

由(9)和(16)式可以得

$$\sigma_{diff}^2(d) = 2\lambda^2 r_0^{-5/3} d^{-1/3} [0.16977(d/D)^{1/3} - 0.09685 - 0.00673(d/D)^{-2}], \quad (18)$$

由于到达角协方差与湍流外尺度和 r_0 有关,在由(18)式测出 r_0 后,可以通过测量到达角协方差通过(9)式求得湍流外尺度。为了克服测量 r_0 过程中引入的误差,利用(18)式的差分图像运动方差对(9)式的到达角协方差归一化就可以消除了(9)式中 r_0 参量,从而得出径向到达角协方差与和径向差分到达角方差的比值

$$R = \frac{0.09685 + 0.00673(d/D)^{-2} - 0.25894(d/L_0)^{1/3}}{2[0.16977(d/D)^{1/3} - 0.09685 - 0.00673(d/D)^{-2}]}, \quad (19)$$

显然若能够测量出径向到达角协方差和径向差分到达角方差,由(19)式就可以求出大气湍流外尺度。

3 实验结果

实验在现有的四孔到达角起伏测量仪上进行,

该仪器主要是由施密特-卡塞格林望远镜、光学成像转换系统、四棱锥光楔倒像系统、面阵 CCD、图像采集卡和计算机组成。镜前附加了一块光瞳板,其上开了四个直径为 5 cm 的小孔,水平和垂直上两孔中心距离均为 20 cm,四孔配置如图 1 所示。在望远镜焦点处放置了一个焦距为 25 cm 的透镜,随后为一个四棱锥光楔,光楔后面为一个焦距为 100 cm 的透镜,在其焦距处放置了成像 CCD,这样就可以得到四个像,并放大了望远镜的焦距。四个子孔按照十字架样式的配置,它们可以组成 6 组不同的基线,可以测量图 1 所示的 x 、 y 、 45° 、 135° 四个方向上的到达角起伏。如测量经子孔 1、3 的图像的沿图示方向上的距离分量变化就能得到与 x 轴成 45° 方向的到达角起伏。

根据以上思路进行 1 km 实验,图 2 为 2006 年

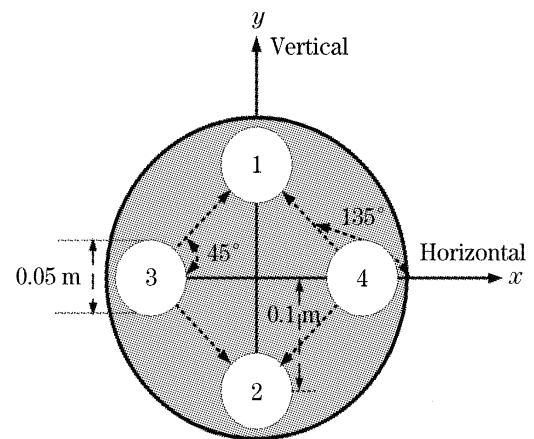


图 1 四孔配置图

Fig. 1 Four-aperture modules configuration

8 月 15 日晚上 18~22 时,每隔 1 min 测量到的大气湍流外尺度数值频次的直方图。

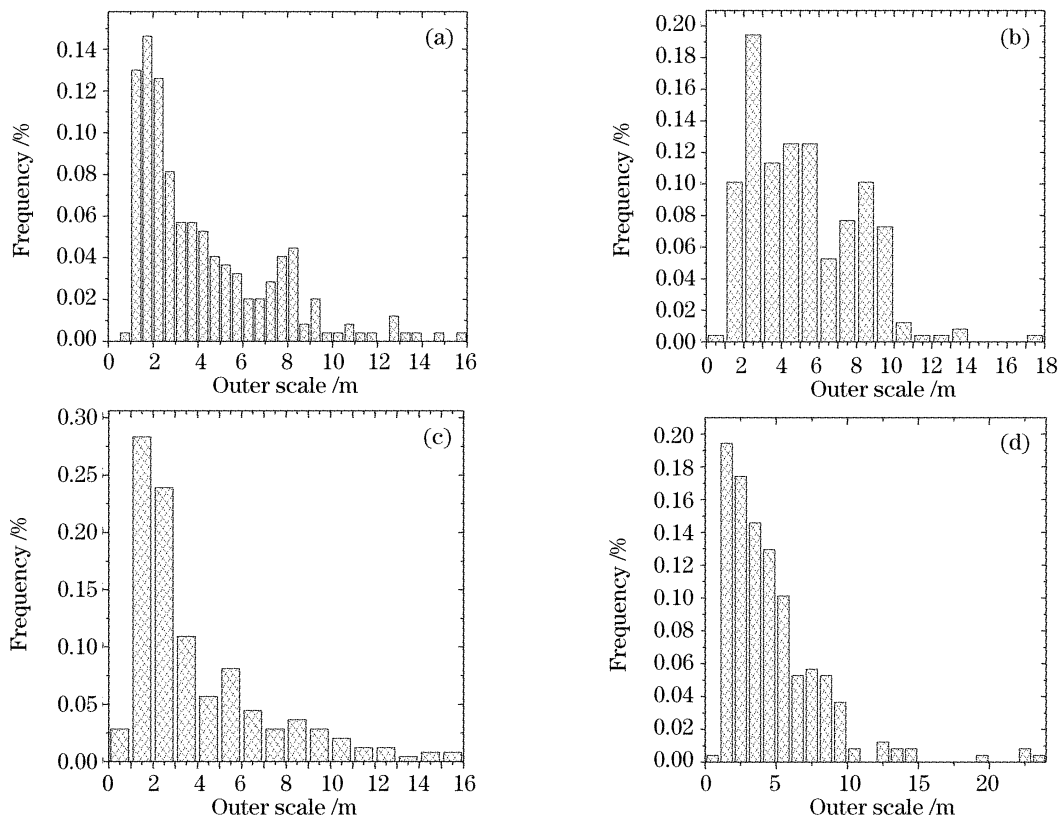


图 2 x 方向(a), y 方向(b), 45° 方向(c), 90° 方向(d)的大气湍流外尺度测量值

Fig. 2 Experimental results for atmospheric turbulence outer scale of x direction (a), y direction (b), 45° direction (c), 90° direction (d)

从实验数据可以看出, x 方向上,外尺度平均值为 4.2 m; 45° 方向上,外尺度值平均值为 5.1 m; 135° 方向上外尺度平均值为 4.1 m; y 方向的外尺度平均值为 4.8 m。可见外尺度在不同方向上有一些差别,而且外尺度随着时间的推移在数值上也有起伏。

4 结 论

根据到达角起伏协方差与外尺度之间的联系,结合差分图像运动方差给出了计算大气湍流外尺度的表达式。并采用四孔到达角起伏测量仪测量了大气湍流外尺度。该方法所需设备较为简单,易于工

程上实现。从实验结果可以得到,外尺度值在 1~5 m 之间,符合外尺度经验值范围,但在不同方向上有所区别。为了计算方便,协方差计算中省略了外尺度的高阶次项,这在外尺度较小时,测量值稍微偏大(外尺度 5 m 以下偏大值小于 20%,对于外尺度在 20 m 以上时,省略过程造成的误差很快降低 1% 以下),可以稍作修正。由于大气的时演化规律、传播路径的地理条件、季节、天气状况、空气洁净度等各种因素都对湍流的发展产生影响,尤其是大尺度的湍流和太多的因素相关使得无法确切了解其特征,因而湍流的外尺度测量非常困难。通常认为湍流外尺度与观测高度相仿,但这些结果的可靠性仍存在争议,还需进一步研究。

参 考 文 献

- 1 Rao Ruizhong. *Light Propagation in the Turbulent Atmosphere* [M]. Hefei: Anhui Science and Technology Press, 2005 (in Chinese)
饶瑞中. 光在湍流大气中的传播[M]. 合肥: 安徽科学技术出版社, 2005
- 2 Song Zhengfang, Fan Chengyu. The effect of turbulent outer scale on atmospheric transverse coherence and isoplanatic angle [J]. *High Power Laser and Particle Beams*, 1994, **6**(3): 469~473 (in Chinese)
宋正方, 范承玉. 湍流外尺度对大气相干长度和等晕角的影响 [J]. *强激光与粒子束*, 1994, **6**(3): 469~473
- 3 Zhang Yixin, Qian Junhao. Effect of finite outer scale of turbulence on aperture averaging of optical scintillations [J]. *Laser Technology*, 2001, **25**(2): 81~84 (in Chinese)
张逸新, 钱军浩. 湍流外尺度对光闪烁孔径平滑的影响 [J]. *激光技术*, 2001, **25**(2): 81~84
- 4 Vladimir P. Lukin, Boris V. Fortes, Eugenii V. Nosov. Effective outer scale of turbulence for imaging through the atmosphere [C]. *Proc. SPIE*, 1998, **3353**: 1121~1129
- 5 Shen Feng, Jiang Wenhan. The effects of finite outer scale on the measurement of characterization of atmospheric turbulence statistics [J]. *Acta Optica Sinica*, 2001, **21**(3): 290~295 (in Chinese)
沈峰, 姜文汉. 有限外尺度对大气湍流统计特征测量的影响 [J]. *光学学报*, 2001, **21**(3): 290~295
- 6 Song Zhengfang, Li Yujie. Theory and experiment study on remote sensing of atmospheric outer scale using beam motion spectrum [J]. *Acta Optica Sinica*, 1997, **17**(10): 1416~1422 (in Chinese)
宋正方, 李玉杰. 光束抖动频谱遥感大气湍流外尺度的理论与实验 [J]. *光学学报*, 1997, **17**(10): 1416~1422
- 7 A. Ziad, J. Borgnino, F. Martin *et al.*. Experimental estimation of the spatial-coherence outer scale from a wavefront statistical analysis [J]. *Astron. Astrophys*, 1994, **282**: 1021~1033
- 8 R. Conan, A. Ziad, J. Morgnino *et al.*. Measurements of the wave-front outer scale at Paranal; influence of this parameter in interferometry [C]. *Proc. SPIE*, 2000, **4006**: 963~973
- 9 F. Martin, A. Tokovinin, A. Ziad *et al.*. First statistical data on wavefront outer scale at La Silla observatory from the GSM instrument [J]. *Astron. Astrophys*, 1998, **336**: 49~52
- 10 R. Conan, J. Borgnino, A. Ziad *et al.*. Analytical solution for the covariance and for the decorrelation time of the angle of arrival of a wave front corrugated by atmospheric turbulence [J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 2000, **17**: 1807~1818
- 11 M. Sarazin, F. Roddier. The ESO differential image motion monitor [J]. *Astron. Astrophys.*, 1990, **227**: 294~300
- 12 F. Roddier. The effects of atmospheric turbulence in optical astronomy [J]. *Progress in Optics*, 1981, **19**: 281~376