

文章编号: 0253-2239(2007)08-1425-5

波前编码系统成像特性的空间域分析

陈燕平 张文字 赵廷玉 余飞鸿 叶 子

(浙江大学光电系现代光学仪器国家重点实验室, 杭州 310027)

摘要: 波前编码技术在大幅度地增加光学系统景深的同时,可以抑制各种离焦类型的像差。目前波前编码系统的成像特性分析大多是基于空间频率域的分析,在应用稳定相法导出三次型相位板波前编码系统的点扩展函数近似解析式的基础之上,描述了点扩展函数的边界、带宽与振荡等特性,分析了波前编码系统对离焦、像散、彗差等常见像差的敏感性,从空间域进一步分析了波前编码系统的成像特性。

关键词: 成像系统; 波前编码; 点扩展函数; 近似解析式; 稳定相法; 空间域

中图分类号: O435.2; O438.2; TN762 文献标识码: A

Imaging Characteristics of Wavefront Coding Systems within Spatial Domain

Chen Yanping Zhang Wenzhi Zhao Tingyu Yu Feihong Ye Zi

(State Key Laboratory of Modern Optical Instrumentation, Department of Optical Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027)

Abstract: Applying the wavefront coding technique to optical system can greatly increase the depth of focus and correct the focus-related aberrations. While most conventional imaging characteristics analysis of the wavefront coding system is carried out within spatial-frequency domain, here the analysis within spatial domain was applied. The approximate expression of point spread function for the wavefront coding system with cubic phase mask was derived with the stationary phase method, based on which the sensitivities of the wavefront coding system to defocus, astigmatism and coma were analyzed, and the boundary, bandwidth and oscillations of the point spread function were described. A further insight into the imaging characteristics of the wavefront coding system was acquired within spatial domain.

Key words: imaging system; wavefront coding; point spread function; approximate expression; stationary phase method; spatial domain

1 引 言

波前编码(Wavefront coding)技术不仅可以大幅度地增加光学系统的景深,同时还可以抑制各种离焦类型的像差,包括球差、色差、匹兹凡像面弯曲以及由安装误差和温度变化引起的离焦等。常见的波前编码成像性能分析,是基于空间频率域的分析,即以光学传递函数,尤其是调制传递函数为主要方法,来考察成像光学系统在不同类型相位板的情况下对各种像差情况下的敏感性^[1~3]。作为评价光学系统成像性能的另一指标点扩展函数,则往往

只考虑了轴上点的状态,这与施特列尔比的物理意义是分不开的^[4~6]。此外,常用的相位空间描述方法,包括模糊函数^[3](Ambiguity function)、维格纳分布函数^[7](Wigner distribution function)等,都已经用来形象地展示波前编码系统的成像性能,但相对来说,只有模糊函数能直接地反映波前编码系统的成像性能。

为了进一步从空间域上分析波前编码系统的成像性能,本文在使用稳定相法^[8](Method of stationary phase)推导出三次型相位板波前编码成

作者简介: 陈燕平(1965—),女,浙江诸暨人,博士研究生,主要从事光学成像技术方面的研究。

E-mail: chenyanping05@hotmail.com

导师简介: 余飞鸿(1964—),男,浙江淳安人,教授,主要从事光学工程方面的研究。E-mail: feihong@zju.edu.cn

收稿日期: 2006-10-10; 收到修改稿日期: 2007-03-16

像系统点扩展函数近似解析式的基础之上,从空间域分析了三次型相位板波前编码成像系统点扩展函数的边界、带宽与振荡等特性,并进一步分析了波前编码系统对常见像差如离焦、像散不敏感而对彗差敏感的原因。

2 点扩展函数的导出

为简单起见,本文仅考虑一维情况下的光学系统。对于存在 X、Y 方向可以分离像差(如球差等)的二维光学系统,则可以将二维系统简化成二个一维系统进行处理。而对于存在 X、Y 方向不可分离像差的系统,将其简化成一维系统则有助于了解系统在某个方向上的成像特性。对于一个归一化的光瞳函数 $q(u)$,非相干成像光学系统的离焦点扩展函数 $h(x, \psi)$ 可以表示为

$$h(x, \psi) = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} q(u) \exp(j\psi u^2 - j2\pi x u) du \right|^2, \quad (1)$$

其中 ψ 是离焦参量, x 是简化的空间坐标。对于三次

型相位板波前编码成像系统,其归一化光瞳函数为

$$q(u) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \exp(j\alpha u^2), & |u| \leq 1 \\ 0, & |u| > 1 \end{cases} \quad (2)$$

其中 α 是三次型相位板的归一化参量,在本文中假设 $\alpha > 0$ 。将(2)式代入(1)式可得

$$h(x, \psi) = \frac{1}{2} \left| \int_{-1}^{+1} \exp(j\alpha u^3 + j\psi u^2 - j2\pi x u) du \right|^2. \quad (3)$$

应用稳定相法,文献[1]直接利用光瞳函数自相关得到光学传递函数的积分表达式为一元二次函数的积分,最多存在一个鞍点(Stationary point),其分析计算较为简单。而由(3)式不难发现,这是一个一元三次函数的积分,其一阶导数为一元二次函数,所以会出现存在两个鞍点的情况,点扩展函数的近似分析计算应该在四个区间进行,较为复杂。(3)式的积分结果可近似为(4)式(具体推导可见附录):

$$h(x, \psi) = \begin{cases} 0, & x \leq -\psi^2 / (6\pi\alpha) \\ \frac{\pi}{\sqrt{\psi^2 + 6\pi\alpha x}} \left\{ 1 + \sin \left[\frac{4(\psi^2 + 6\pi\alpha x)^{3/2}}{27\alpha^2} \right] \right\}, & -\frac{\psi^2}{6\pi\alpha} < x \leq \frac{3\alpha - 2|\psi|}{2\pi} \\ \frac{\pi}{\sqrt{\psi^2 + 6\pi\alpha x}}, & \frac{3\alpha - 2|\psi|}{2\pi} < x \leq \frac{3\alpha + 2|\psi|}{2\pi} \\ 0. & x > \frac{3\alpha + 2|\psi|}{2\pi} \end{cases} \quad (4)$$

图 1 分别给出了在 $\alpha = 90^\circ$ 时,离焦参量 $\psi = 0, 2\pi, 4\pi$ 情况下通过(1)式快速傅里叶变换(FFT)与通过(4)式计算得到的点扩展函数(PSF)比较图。图 1 中的纵坐标是点扩展函数幅值,并且其幅值和被归一化为 1;横坐标为简约化空间坐标,将其除以

非相干成像系统的衍射极限频率即可转化为实际空间坐标,因而是没有单位的。需要注意的是,本文中所有横纵坐标的物理意义均与上述相同。由图可知,当简约化空间坐标 x 靠近左右二处边界时,存在较大的误差;而在其余的坐标范围内均能较好地

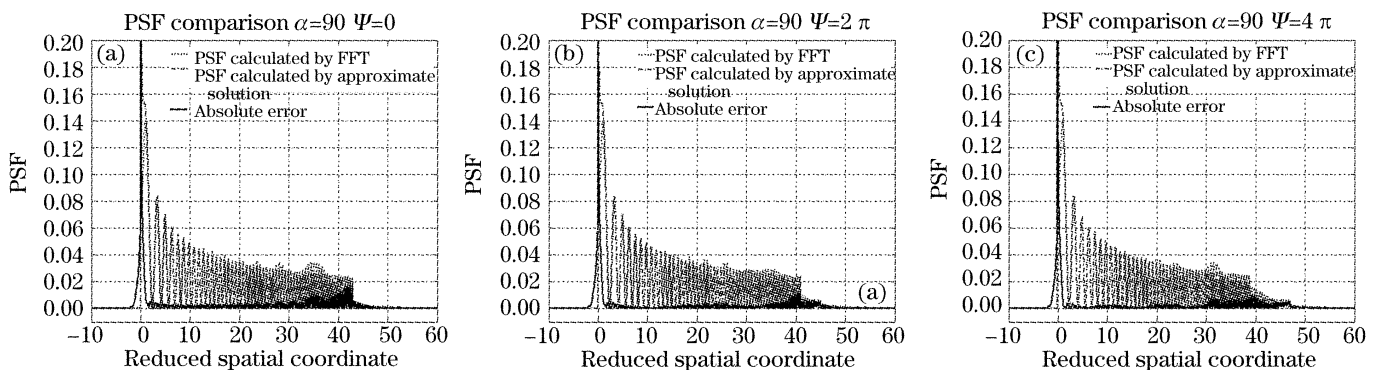


图 1 通过快速傅里叶变换与近似计算得到的波前编码系统离焦点扩展函数比较图

Fig. 1 Point spread function (PSF) of defocus of wavefront coding system by fast Fourier transform (FFT) and approximate expression

吻合,并且绝对误差曲线显示了较小的误差。这种情况的出现主要与靠近二侧边界时稳定相法的积分近似特性有关,在 Dowski 和 Cathey 推导的光学传递函数近似解析式^[1]中也存在同样的问题,但这同样并不妨碍近似解析式对于物理意义的理解。

3 成像特性分析

在(4)式的基础之上,可以在空间域上对三次型相位板波前编码系统的成像性能进行分析。

3.1 边界与带宽

对于无限孔径的点扩展函数,通过一个简单的变量替换,即可以表示成一个艾里函数(Airy function)的平方:

$$h(x, \psi) = \frac{1}{2} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[j\alpha t^3 - j2\pi \left(x + \frac{\psi^2}{6\pi\alpha} \right) t \right] dt \right|^2 = 2\pi^2 (3\alpha)^{-2/3} \text{Ai}^2 \left[-2\pi(3\alpha)^{-1/3} \left(x + \frac{\psi^2}{6\pi\alpha} \right) \right]. \quad (5)$$

图 2 给出了在 $\alpha=90^\circ$ 时,离焦参量 $\psi=4\pi$ 情况下无限孔径的点扩展函数图。与孔径受限的情况进行相比,二者点扩展函数在左侧都有一个边界,并且左侧边界靠近中心;在另一侧,在无限孔径情况下没有边界而在孔径受限情况下则有边界。给定非相干成像系统的衍射极限频率为 f_0 ,由(4)式可得,三次型相位板波前编码成像系统的点扩展函数宽度为

$$D = \frac{(3\alpha + |\psi|)^2}{3\pi\alpha f_0} \approx \frac{3\alpha}{\pi f_0} \quad (\text{for small } |\psi|), \quad (6)$$

对于一个 $F/5$ 、主波长为 587.6 nm 的成像系统,其衍射极限空间频率 f_0 约为 340.4 cyc/mm,在各种像差校正良好的理想状况下,可按 $1.22/f_0$ 计算得点扩展函数的宽度大致为 0.00029 mm。如果加入一块 $\alpha=30\pi$ 的三次型相位板,则可计算得点扩展函数的宽度约为 0.26 mm。这是一个非常大的弥散斑,因而

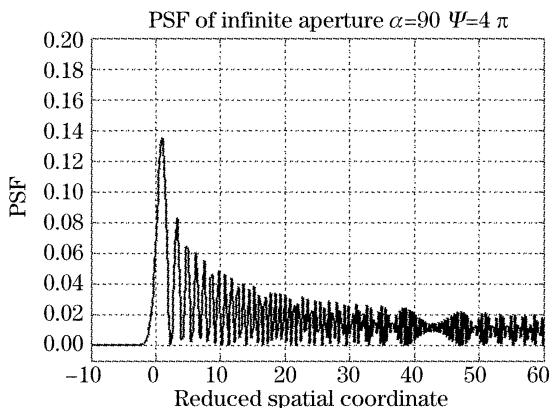


图 2 无限孔径的点扩展函数

Fig. 2 Point spread function (PSF) for infinite aperture

在像面上的成像将会是一个模糊的成像。

空间域边界的存在通常会导致在空间频率域带宽的受限。对(4)式进行反傅里叶变换,在应用稳定相法同时注意将鞍点限制在点扩展函数的边界内,则可以得到空间频率域的带宽占孔径衍射极限频率的 $1 - |\psi|/(3\alpha)$ (这里假设 $3\alpha > 2|\psi|$)。在离焦参量 ψ 较小时,这个系数接近于 1,几乎不影响带宽;但是在大离焦的情况下,带宽的截止作用就非常显著了。这个系数的计算与文献^[9]实际计算的结果是完全一致的。由于推导过程较为复杂,并且在下文已列出更为简洁的方法,因而在此不列出这个推导过程。

3.2 振荡

在上述的图例中,不难发现点扩展函数的幅值在逐渐偏离中心的过程中不断衰减,但是在中心右侧的衰减过程中伴随着激烈的振荡,并且直至边界振荡的频率越来越快。这种现象可以从(4)式中得到印证:

在主要区间 $-\frac{\psi^2}{6\pi\alpha} < x \leq \frac{3\alpha - 2|\psi|}{2\pi}$ 内,点扩展函数可以理解为一个缓慢衰减的信号被一个频率逐渐增大的正弦信号所调制。振荡的产生是三次型相位板对波前进行了调制的结果,即使在无限孔径情况下点扩展函数也存在明显的衰减调制现象。点扩展函数空间频率域带宽由正弦信号的带宽决定,从(4)式可求得正弦信号的调制频率 $f(x)$ 为

$$f(x) = \frac{2}{3\alpha} \sqrt{\psi^2 + 6\pi\alpha x}, \quad (7)$$

$$-\frac{\psi^2}{6\pi\alpha} < x \leq \frac{3\alpha - 2|\psi|}{2\pi}$$

$f(x)$ 是一个随 x 单调递增的函数,可以计算得最大的调制频率 f_{\max} 为

$$f_{\max} = 2 \left(1 - \frac{|\psi|}{3\alpha} \right), \quad (8)$$

即等于三次型相位板波前编码成像系统在离焦情况下的空间频率域带宽。

需要注意的是,从以上的图例中可以看出,由于孔径受限的影响,点扩展函数在右侧有二个阶跃型的边缘,中间部分与右侧部分的振荡性质是不一样的,在右侧的振荡主要体现为衰减,这些现象与(4)式的结果是相符的。

3.3 对常见低阶像差的敏感性

对于常见的低阶像差,本文仅限于讨论三次型相位板波前编码成像系统对于轴上像差中的离焦、以及轴外像差中像散与彗差的敏感性。

对于无限孔径,由(5)式不难推断,对于离焦参量 ψ ,点扩展函数仅产生了一个 $\psi^2/(6\pi\alpha)$ 的空间位移,并

不会影响点扩展函数的形状。由傅里叶变换的性质可知,这个空间位移并不会影响调制传递函数,只会给相位传递函数增加一个 $\exp\left(-j\frac{\psi^2}{3\alpha}u\right)$ 的线性相移。对于有限孔径,对(3)式进行变量替换,可以得到类似(5)式的结果:

$$h(x, \psi) = \frac{1}{2} \left| \int_{-1+\psi/(3\alpha)}^{+1+\psi/(3\alpha)} \exp\left[j\alpha t^3 - j2\pi\left(x + \frac{\psi^2}{6\pi\alpha}\right)t\right] dt \right|^2. \quad (9)$$

除了 $\psi^2/(6\pi\alpha)$ 的空间位移之外,点扩展函数的积分范围,即孔径也平移了 $\psi/(3\alpha)$ 。相对于归一化的孔径而言,如果忽略这个孔径平移;或者忽略在(4)式中右侧二处边界,同样会导致相位传递函数的一个线性相移而不影响调制传递函数,即会在一定程度上增加图像的畸变。在离焦较小时,这个线性相移可以忽略不计。这可以在 Dowski 和 Cathey 推导的光学传递函数近似解析式中得到验证,同时这也解释了三次型相位板可以抑制离焦像差的原因。图 3 给出了 $\alpha=90$, 离焦参量 $\psi=0, 2\pi, 4\pi, 6\pi$ 情况下的点扩展函数和标准偏差(Standard deviation, STD)值曲线的局部放大图。从图 3 可以发现,不同离焦参量下的点扩展函数产生了不同的平移,并且这种平移与离焦参量 ψ 的平方成正比,但点扩展函数的形状并没有改变。而图中曲线不光滑主要是由曲线的放大造成。

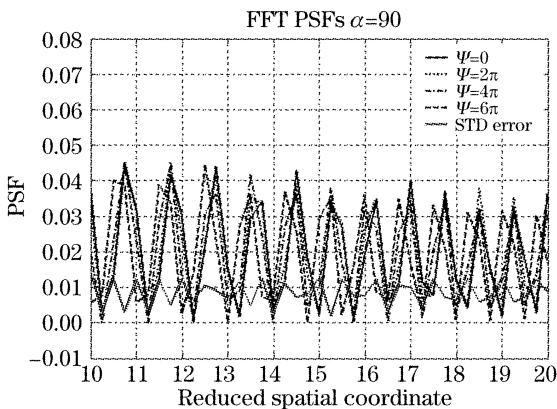


图 3 点扩展函数对离焦的敏感性

Fig. 3 Point spread functions sensitivity to defocus

STD: Standard

在二维情况下,对于像散,其引入的波像差为 $\exp\left[j\frac{2\pi}{\lambda}W_{22}(u\cos\theta+v\sin\theta)^2\right]$ 其中 W_{22} 的单位为波长 λ 。如果仅考虑一维情况,引入波像差为 $\exp\left(j\frac{2\pi}{\lambda}W_{22}\cos^2\theta u^2 + j\frac{2\pi}{\lambda}W_{22}\sin^2\theta uv\right)$,可以等效为一个 $\phi = \frac{2\pi W_{22}\cos^2\theta}{\lambda}$ 的离焦和一个线性空间位移。由上

述对离焦的讨论可知,三次型相位板波前编码成像系统同样可以较好地抑制像散。

在二维情况下,对于彗差,其引入的波像差为 $\exp\left[j\frac{2\pi}{\lambda}W_{31}(u^2+v^2)u\right]$,同样 W_{31} 的单位也为波长 λ 。考虑一维情况,为简便起见,取 $v=0$,则引入的波像差为 $\exp\left(j\frac{2\pi}{\lambda}W_{31}u^3\right)$,可以写出受彗差影响下的点扩展函数 $h(x, W_{31})$:

$$h(x, W_{31}) = \frac{1}{2} \left| \int_{-1}^{+1} \exp\left(j\alpha u^3 + j\frac{2\pi}{\lambda}W_{31}u^3 - j2\pi xu\right) du \right|^2 = \frac{1}{2} \left| \int_{-1}^{+1} \exp\left[j\left(\alpha + \frac{2\pi}{\lambda}W_{31}\right)u^3 - j2\pi xu\right] du \right|^2, \quad (10)$$

(10)式可以理解为三次型相位板的归一化参量由 α 变为 $\alpha + \frac{2\pi}{\lambda}W_{31}$ 。图 4 给出了 $\alpha=90$, 彗差参量 $W_{31}=0, 1\lambda, 2\lambda, 3\lambda$ 情况下的点扩展函数和标准偏差值曲线的局部放大图。由(4)式和图 4 可以发现为,相对于离焦,三次型相位板对彗差较为敏感,但是较小的彗差引入的三次型相位板归一化参量的改变也是可以忽略不计的。

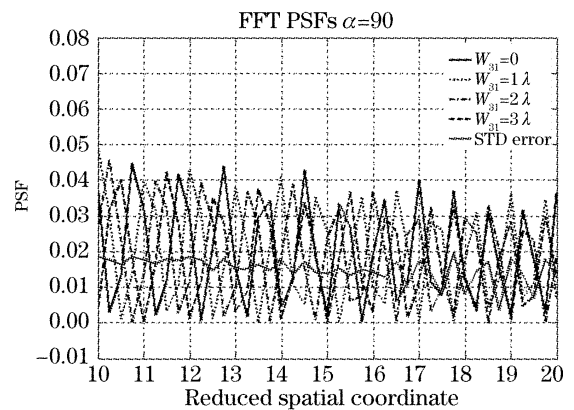


图 4 点扩展函数对彗差的敏感性

Fig. 4 Point spread functions sensitivity to coma

4 结 论

本文在使用稳定相法推导出三次型相位板波前编码成像系统的点扩展函数近似解析式的基础之上,分析了点扩展函数的边界、带宽与振荡特性,并进一步从空间域分析了三次型相位板波前编码成像系统对常见像差中离焦、像散不敏感而对彗差敏感的原因。在空间频率域分析之外,也对三次型相位板波前编码系统成像性能进行了新的分析。

参 考 文 献

- 1 E. R. Dowski, W. T. Cathey. Extended depth of field through wavefront coding[J]. *Appl. Opt.*, 1995, **34**(11): 1859~1866
- 2 S. Mezouari, G. Muyo, A. R. Harvey. Amplitude and phase filters for mitigation of defocus and third-order aberrations[C]. *Proc. SPIE*, 2004, **5249**: 238~248
- 3 A. Castro, J. Ojeda-Castañeda. Increased depth of field with phase-only filters; ambiguity function[C]. *Proc. SPIE*, 2005, **5827**: 1~11
- 4 S. S. Sherif, E. R. Dowski, W. T. Cathey. A logarithmic phase filter to extend the depth of field of incoherent hybrid imaging systems[C]. *Proc. SPIE*, 2001, **4471**: 272~279
- 5 S. Mezouari, A. R. Harvey. Primary aberrations alleviated with phase pupil filters[C]. *Proc. SPIE*, 2002, **4768**: 21~31
- 6 S. Mezouari, A. R. Harvey. Phase pupil functions for reduction of defocus and spherical aberrations [J]. *Opt. Lett.*, 2003, **28**(10): 771~773
- 7 D. Zalvidea, E. E. Sicre. Phase pupil functions for focal-depth enhancement derived from a Wigner distribution function [J]. *Appl. Opt.*, 1998, **37**(17): 3623~3627
- 8 M. Born, E. Wolf. *Principles of Optics* [M]. Yang Jiasun transl., Beijing: Publishing Housing of Electronics Industry, 2006. 744~745 (in Chinese)
马科斯·波恩, 埃米尔·沃尔夫. 光学原理[M]. 杨葭孙译. 北京: 电子工业出版社, 2006. 744~745
- 9 M. Somayji, M. P. Christensen. Enhancing form factor and light collection of multiplex imaging systems by using cubic phase mask[J]. *Appl. Opt.*, 2006, **45**(13): 2911~2923

附录：稳定相法推导点扩展函数

考虑积分

$$t = \int g(x) \exp[j\mu(x)] dx, \quad (11)$$

根据稳定相法, 如果相对振幅部分 $g(x)$, 相位部分 $\mu(x)$ 变化极迅速, 则只有邻近鞍点或者端点的那些部分对积分有重要贡献. 假设鞍点为 x_0 , 则(11)式积分值为

$$t = g(x_0) \sqrt{\frac{2\pi}{|\mu''(x_0)|}} \exp\left\{j \operatorname{sgn}[\mu''(x_0)] \frac{\pi}{4}\right\} \exp[j\mu(x_0)], \quad (12)$$

对于积分

$$f_{\text{PSFc}}(x) = \int_{-1}^{+1} \exp(jau^3 + j\psi u^2 - j2\pi xu) du, \quad (13)$$

$$\mu(u) = au^3 + \psi u^2 - 2\pi xu, \quad (14)$$

$$\mu'(u) = 3au^2 + 2\psi u - 2\pi x, \quad (15)$$

$$\mu''(u) = 6au + 2\psi, \quad (16)$$

为求鞍点, 令(15)式为0, 即 $\mu'(u) = 3au^2 + 2\psi u - 2\pi x = 0$. 因而鞍点存在需满足以下关系

$$\Delta = 4\psi^2 + 24\pi ax \geq 0, \quad \text{即} \quad x \geq -\psi^2 / (6\pi a), \quad (17)$$

记二个鞍点为 u_{01}, u_{02} ,

$$u_{01} = \frac{-2\psi + \sqrt{4\psi^2 + 24\pi ax}}{6a} = \frac{-\psi + \sqrt{\psi^2 + 6\pi ax}}{3a}, \quad u_{02} = \frac{-2\psi - \sqrt{4\psi^2 + 24\pi ax}}{6a} = \frac{-\psi - \sqrt{\psi^2 + 6\pi ax}}{3a}, \quad (18)$$

考虑到鞍点应该限制在 $[-1, 1]$ 之间, 则可以得到结论:

A) 当 $-\frac{\psi^2}{6\pi a} < x \leq \frac{3\alpha - 2|\psi|}{2\pi}$ 时, 存在二个鞍点, (13) 式的积分结果为

$$f_{\text{PSFc}}(x) \approx \sqrt{\frac{2\pi}{|\mu''(u_{01})|}} \exp\{j \operatorname{sgn}[\mu''(u_{01})]\} \exp[j\mu(u_{01})] + \sqrt{\frac{2\pi}{|\mu''(u_{02})|}} \exp\{j \operatorname{sgn}[\mu''(u_{02})]\} \exp[j\mu(u_{02})], \quad (19)$$

B) $\frac{3\alpha - 2|\psi|}{2\pi} < x \leq \frac{3\alpha + 2|\psi|}{2\pi}$ 时, 仅存在一个鞍点 u_{01} 或者 u_{02} . 当 $\psi > 0$ 时,

$$f_{\text{PSFc}}(x) \approx \sqrt{\frac{2\pi}{|\mu''(u_{01})|}} \exp\{j \operatorname{sgn}[\mu''(u_{01})]\} \exp[j\mu(u_{01})], \quad (20)$$

否则

$$f_{\text{PSFc}}(x) \approx \sqrt{\frac{2\pi}{|\mu''(u_{02})|}} \exp\{j \operatorname{sgn}[\mu''(u_{02})]\} \exp[j\mu(u_{02})], \quad (21)$$

C) $x > \frac{3\alpha + 2|\psi|}{2\pi}$ 或者 $x \leq -\frac{\psi^2}{6\pi a}$ 时, 不存在鞍点, 则

$$f_{\text{PSFc}}(x) \approx 0, \quad (22)$$

综合(3)式、(19)式、(20)式、(21)式以及(22)式, 则可以得到(4)式。