

文章编号: 0253-2239(2007)08-1414-5

# 目标图像结构和噪声对相关哈特曼-夏克波前传感精度的影响\*

胡新奇 俞 信 赵达尊

(北京理工大学光电工程系, 北京 100081)

**摘要:** 以空间频谱描述图像结构,以图像灰度起伏的方均根值与噪声方均根值之比表示信噪比,系统分析了目标图像结构和噪声对相关哈特曼-夏克波前传感精度的影响。理论分析表明,两个子图像的相关函数峰值位置的亚像元插值误差等于其各离散频率成分的相关函数峰值位置插值误差的加权平均;相同功率下,低频成分的加权系数较小,高频成分的加权系数与亚像元偏移量有关。一维窄带图像的统计仿真表明,无噪声时,低频成分和接近奈奎斯特频率成分的误差较大,中频成分的误差较小;有噪声时,噪声对高频成分的影响低于低频成分。对典型频谱的  $32 \times 32$  图像仿真表明,图像起伏信噪比为 2:1 时,子图像平移量计算误差约 0.03~0.11 像元,与无噪声时相比增加不大。

**关键词:** 自适应光学; 相关哈特曼-夏克波前传感; 空间频谱; 图像结构; 噪声  
中图分类号: TN247; TP202 文献标识码: A

## Influence of Scene Structure and Noise on Precision of Correlating Hartmann-Shack Wavefront Sensing

Hu Xinqi Yu Xin Zhao Dazun

(Department of Optoelectronic Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081)

**Abstract:** Influence of the observed-scene structure and noise on the precision of correlating Hartmann-Shack wavefront sensing is systematically analyzed, where the scene structure is described with spatial spectrum, and the signal-noise-ratio (SNR) is described with the ratio of the root-mean-square (RMS) of image grey variance to the root-mean-square of noise. Theoretical analysis shows that the subpixel interpolation error of correlation function at peak value of two subimages is equal to the weighted average of the correlation function interpolation error (CFIE) at peak value of their discrete frequency components. With the same power, the weighting coefficient of the low-frequency components is less, and the weighting coefficient of the high-frequency components is related with the subpixel shifts. Statistical simulations of one-dimensional narrow-band images show that, in zero-noise case, the CFIEs of the frequency components near the zero frequency or Nyquist frequency are relatively larger compared with the middle-frequency components. And the influence of noise on the high-frequency components is lower than that on the low-frequency components. Simulations of broad-band images with a typical spectrum and  $32 \times 32$  pixels show that, The calculating error of sub-image shift is 0.03~0.11 pixels under the signal-to-noise ratio (SNR) of 2:1, which only has a small increase in error compared with the zero-noise case.

**Key words:** adaptive optics; correlating Hartmann-Shack wavefront sensing; spatial spectrum; image structure; noise

### 1 引 言

基于扩展目标的相关哈特曼-夏克波前传感器可应用于某些无法得到点光源信标的自适应光学系统,如太阳自适应光学望远镜、空间对地观测光学系统的自身波前误差探测与校正等。相关哈特曼-夏

克波前传感器在太阳自适应光学望远镜中已得到应用<sup>[1~5]</sup>,在空间对地观测光学系统中的应用研究也受到重视<sup>[6~9]</sup>。

相关哈特曼-夏克波前传感器采用相关处理方法计算各子图像与参考子图像间的相对平移量,从

\* 国家 973 项目(613290203)资助课题。

作者简介: 胡新奇(1967-)男,河南人,博士,副教授,主要从事自适应光学、光电技术等方面的研究。

E-mail: xqhu@bit.edu.cn

收稿日期: 2006-11-24; 收到修改稿日期: 2007-04-23

而得到各子孔径处的局部波前斜率,并通过波前重构方法得到整个波前。如果不考虑因子孔径数目有限而引起的拟合误差,影响相关哈特曼-夏克波前传感器精度的因素主要包括两个方面,一个是子图像偏移量的计算误差,它取决于相关函数亚像元插值方法、子图像的结构和信噪比等,另一个因素是从子图像偏移量计算误差到波前探测误差的传递系数,它与子孔径数目、子透镜的口径焦距、CCD 像元尺寸等参量有关。总的来说,前者主要与目标特征有关,后者主要与波前传感器的设计参量有关。

对于应用于空间对地观测光学系统的哈特曼-夏克波前传感器,图像结构千变万化,并且,由于受子孔径口径、CCD 曝光时间等因素限制,子图像信噪比有限。因此,研究图像结构和信噪比对波前探测精度的影响,对于波前传感器的设计和应用,具有重要的实用意义。

Lisa A. Poyneer<sup>[8]</sup>从相关函数插值公式出发,根据误差传递关系推导了由图像噪声方差计算相关函数插值误差的公式。特别是,在子图像间相对偏移为 0 时,公式很简洁:噪声引起的计算误差与噪声成正比,与相关函数整像元峰值和相邻值之差成反比。

本文采用频域分析的方法,详细分析了无噪声情况下相关函数插值计算误差与图像频谱、亚像元偏移量的关系,以及噪声对相关函数插值误差的影响。通过分析可全面了解相关函数插值方法在各种条件下所能达到的精度。

## 2 子图像偏移量计算误差与子图像离散频谱的关系

### 2.1 子图像偏移量计算方法

子图像平移量计算通常采用相关法。在相关计算中,一般取子图像的中心区域与参考子图像的不同区域进行相关。通过寻找相关峰值可确定两子图像间的整像元平移,通过相关函数峰值位置的抛物线插值法可达到亚像元精度。子图像平移量计算误差主要取决于亚像元插值误差。在求亚像元平移量时,子图像中心部分  $s$  与参考子图像对应部分  $r$  间的相关函数  $C(m,n)$  计算及峰值位置插值公式为

$$C(m,n) = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} s(i,j)r(i+m,j+n), \quad (1)$$

$$x^{\Delta} = 0.5 \times \frac{C(0,1) - C(0,-1)}{2C(0,0) - C(0,1) - C(0,-1)}, \quad (2a)$$

$$y^{\Delta} = 0.5 \times \frac{C(1,0) - C(-1,0)}{2C(0,0) - C(1,0) - C(-1,0)}, \quad (2b)$$

式中  $M,N$  分别为子图像中参与相关运算部分的行列数, $i,j$  为像元行列编号, $m,n$  为相关运算时,参照图像中参与运算部分  $r$  在行列方向的整像元平移,取  $-1,0$  或  $1$ 。 $r$  的移位可采用循环移位法,即移出部分补入另一侧。

### 2.2 子图像偏移量计算误差与子图像离散频谱的关系

对参与相关函数亚像元插值计算的两个图像  $s(i,j)$  和  $r(i,j)$  进行傅里叶变换,可得到其离散频谱  $S(k,l)$  和  $R(k,l)$ 。将两图像写为各离散频率成分之和的形式,代入相关函数计算公式,并根据其离散频谱的对称性,周期性,以及各离散成分间的正交性可得到

$$C(m,n) = \sum_{k=0}^{M/2} \sum_{l=-N/2+1}^{N/2} C_{k,l}(m,n), \quad (3)$$

其中

$$C_{k,l}(m,n) = \begin{cases} S(0,0)R(0,0), & k=0, l=0 \\ S(0,N/2)R(0,N/2)\cos(n\pi), & k=0, l=N/2 \\ S(M/2,0)R(M/2,0)\cos(m\pi), & k=M/2, l=0 \\ S(M/2,N/2)R(M/2,N/2)\cos(m\pi+n\pi), & k=M/2, l=N/2 \\ 2|S(k,l)R^*(k,l)|\cos\left[\frac{2\pi}{M}km + \frac{2\pi}{N}ln - \Delta\varphi_{k,l}\right], & 0 < k < M/2, -N/2 < l < N/2 \end{cases} \quad (4)$$

式中  $\Delta\varphi_{k,l}$  为两图像相同频率成分间的相位差。 $C_{k,l}(m,n)$  代表了两图像中第  $(k,l)$  个频率成分的相关函数。两个图像的互相关函数等于其各离散频率成分单独相关运算之和的主要原因是不同离散频率成分之间的相关为零。

子图像平移量计算误差取决于相关函数亚像元插值误差。由于  $x$  方向和  $y$  方向计算方法相同,因此只需研究一个方向,比如  $x$  方向即可。用  $x_{k,l}^{\Delta}$  表示单个离散频率成分的相关函数插值结果

$$x_{k,l}^{\Delta} = 0.5 \times \frac{C_{k,l}(0,1) - C_{k,l}(0,-1)}{2C_{k,l}(0,0) - C_{k,l}(0,1) - C_{k,l}(0,-1)}, \quad (5)$$

将(3)式和(5)式代入抛物线插值公式,可以得到,相关函数峰值位置亚像元插值结果  $x^{\Delta}$  与单频成分相关函数插值结果  $x_{k,l}^{\Delta}$  关系为

$$x^{\Delta} = \left( \sum_{k=0}^{M/2} \sum_{l=-N/2+1}^{N/2} \omega_{k,l}^x x_{k,l}^{\Delta} \right) / \left( \sum_{k=0}^{M/2} \sum_{l=-N/2+1}^{N/2} \omega_{k,l}^x \right), \quad (6)$$

式中

$$w_{k,l}^x = 2C_{k,l}(0,0) - C_{k,l}(0,1) - C_{k,l}(0,-1), \quad (7)$$

即相关函数插值计算结果等于其各离散频谱成分单独计算结果的加权平均。类似地,相关函数插值误差  $\Delta x^\Delta$  也等于各离散频谱成分的相关函数插值误差  $\Delta x_{k,l}^\Delta$  的加权平均。

### 2.3 不同空间频率成分的加权系数

将(4)式代入(7)式,同时注意到,相位差  $\Delta\varphi_{k,l}$  可看作图像  $s_i$  相对于图像  $r_i$  的亚像元平移引起,即

$$\Delta\varphi_{k,l} = \frac{2\pi}{M}ky^\Delta + \frac{2\pi}{N}lx^\Delta, \text{ 则加权系数为}$$

$$w_{k,l}^x = 4 |S(k,l)R^*(k,l)| \times \cos\left(\frac{2\pi}{M}ky^\Delta + \frac{2\pi}{N}lx^\Delta\right) \left(1 - \cos\frac{2\pi}{N}l\right),$$

可见,加权系数除与频谱功率成正比外,与频率和亚像元偏移量都有关系。由于(6)式中分子和分母都有加权系数,因此,仅需考虑不同频率成分的加权系数的相对值。当频谱功率一定时,加权系数  $w_{k,l}^x$  随  $x$  方向频率和亚像元偏移量的变化如图 1 所示。从图 1 可以看出,低频成分的加权系数较小,高频成分的加权系数与亚像元偏移量有关。

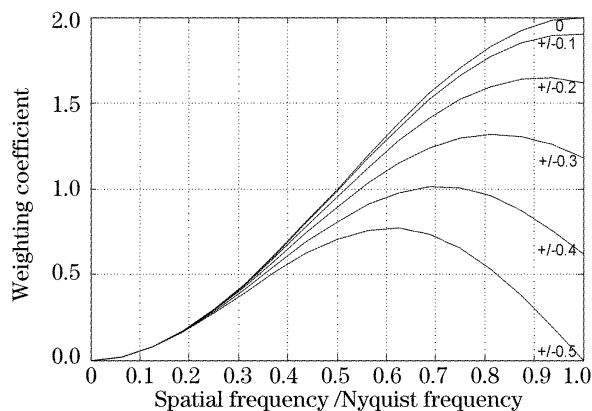


图 1 不同亚像元偏移量时(如图中所注),加权系数随空间频率的变化

Fig. 1 Weighting coefficient versus spatial frequency under various subpixel shifts (denoted in the figure)

## 3 窄带图像的统计仿真方法及结果

### 3.1 窄带图像的统计仿真方法

相关函数插值误差等于其各离散频率成分相关函数插值误差的加权平均,因此,对各离散频率成分的相关函数插值误差进行仿真研究,是了解相关函数插值误差的基础。仿真从 CCD 焦面图像开始,包括图像产生、亚像元平移、CCD 像元积分、相关函数插值计算等主要步骤,仿真的关键是图像产生。

有限点离散图像仅存在有限几个离散的频率成

分,但实际图像由连续频率成分构成。在哈特曼-夏克波前传感器中,为避离子图像交叠,采用视场光阑对子图像尺寸进行限制。视场光阑的作用相当于将原图像与矩形窗相乘,从频域看,相当于原频谱与矩形窗频谱的卷积。由于卷积的影响,频谱产生混叠,离散频率附近的原连续频率成分,都对该离散频率成分有贡献。事实上,由于图像大小有限,对于连续频率成分而言,只有其频率间距超过(图像尺寸的倒数)时,其相关值才接近或等于 0。因此,离散频率附近的原连续频率成分之间,具有相关性,仿真中应同时存在。

仿真采用窄带图像进行。仿真中,假定某一离散频率来自于一个中心频率等于该离散频率,带宽为(采样长度的倒数)的窄带频谱成分,带内各频率成分幅度相同,但带内各频率成分的相位为  $0 \sim 2\pi$  等概率随机分布。由于相位对相关函数插值结果有影响,需对各种相位进行仿真,采用统计方法得到相关函数插值误差的平均值和相对于平均误差的起伏值(用方均根表示)。误差起伏由相位的随机性引起。

为研究噪声对相关函数插值计算的影响,将图像中加入噪声,并将有噪声图像的相关函数插值计算结果与同一图像无噪声时相关函数插值结果相减,得到噪声对相关函数插值的影响。考虑到图像均值对相关函数峰值位置计算无贡献,图像信噪比用图像灰度起伏的方均根值与噪声方均根值之比表示,称为图像起伏信噪比。

### 3.2 二维模型简化为一维模型

由于二维模型仿真计算量大,仿真结果图示亦不方便,因此,将二维模型简化为一维模型,可得到简明的结果。

根据相关函数计算式(1)及插值计算式(2),在求  $x$  方向偏移量时,所用到的相关函数值  $C(0,0)$ ,  $C(0,1)$  和  $C(0,-1)$  为各行相关函数之和,在求  $y$  方向偏移量时,所用到的相关函数值  $C(0,0)$ ,  $C(1,0)$  和  $C(-1,0)$  为各列相关函数之和。采用类似于 2.2 节中的方法可得到,相关函数插值计算结果等于各行图像在  $x$  方向(或各列图像在  $y$  方向)相关函数插值计算结果的加权平均。因此,采用单行图像进行仿真,能够得到具有参考价值的结果。

### 3.3 一维窄带图像统计仿真结果

考虑到相关哈特曼-夏克波前传感器的子图像通常为  $16 \times 16$  像元或  $32 \times 32$  像元,仿真采用 16 像元一维图像进行。

图 2 和图 3 给出了无噪声条件下平均误差随图

像空间频率和亚像元偏移的变化。图 2 和图 3 的数据相同,只是坐标系不同,以方便了解平均误差随图像空间频率变化情况和平均误差随亚像元偏移量变化情况。图 4 和图 5 给出了无噪声时相位随机性引起的误差起伏的方均根值随图像空间频率和亚像元偏移的变化。图 4 和图 5 数据相同,仅坐标系不同。

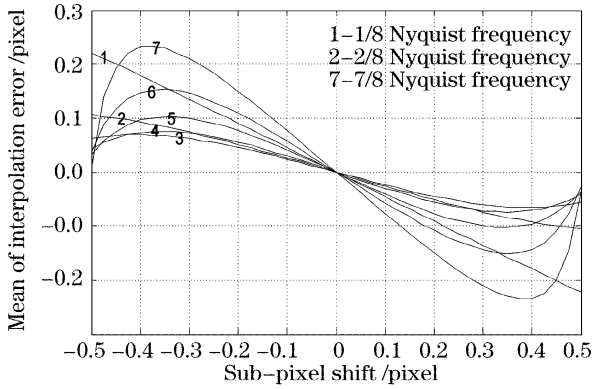


图 2 不同准单频图像的模型误差随亚像元偏移量的变化  
Fig. 2 Model error versus sub-pixel shift with narrow-band images of different center-frequency

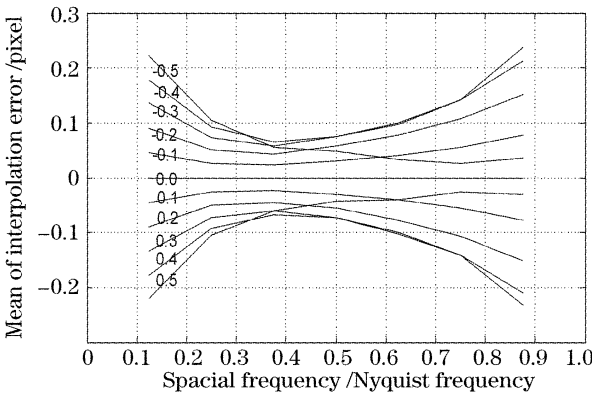


图 3 不同亚像元偏移时模型误差随空间频率的变化  
Fig. 3 Model error versus spatial frequency under various subpixel shifts

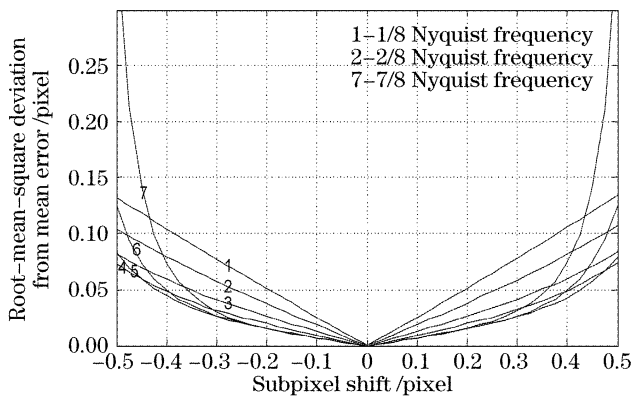


图 4 无噪声,不同准单频图像时,随机误差随亚像元偏移量的变化  
Fig. 4 Random error in zero noise case versus sub-pixel shift with narrow-band images of different center-frequency

从图 2~图 5 的结果可以看出,低频成分和接近探测器奈奎斯特频率成分的插值误差较大,中频成分的插值误差较小。由于低频成分的加权系数小,低频成分对总误差的影响较小,但高频成分加权系数可能很大,因此,高频成分对总误差有较大的贡献。仿真还表明,超过奈奎斯特频率的成分会引起很大的误差(图中未给出)。因此,在波前传感器设计中,应充分利用子透镜点扩展函数对图像的低通滤波作用来限制高频成分,使图像空间带宽限制在奈奎斯特频率之内。

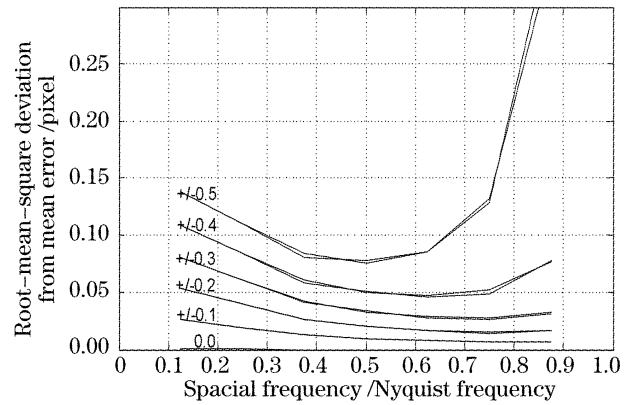


图 5 无噪声,不同亚像元偏移时,随机误差随空间频率的变化  
Fig. 5 Random error in zero noise case versus spatial frequency under various subpixel shifts

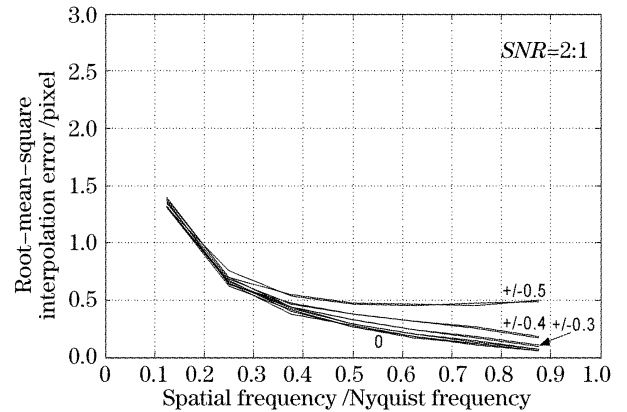


图 6 不同亚像元偏移时,单频噪声引起的随机误差随空间频率的变化  
Fig. 6 Random error caused by single-frequency noise versus spatial frequency under various subpixel shifts

图 6 给出了信噪比(SNR)为 2:1 的情况下,噪声对相关函数插值计算误差的贡献。从图 7 可以看出,图像仅存在低频成分时,噪声对计算结果的影响较大。当图像存在有中高频成分时,由于中高频成分的加权系数大,低频成分的加权系数小,噪声的影响将显著减小。

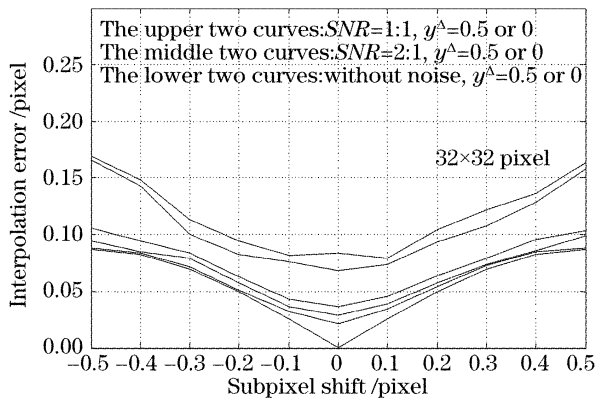


图 7 不同噪声和  $y$  向平移量,插值误差随  $x$  向平移量的变化

Fig. 7 Interpolation error versus shift in  $x$ -direction under different noise level and shifts in  $y$ -direction

#### 4 典型频谱二维图像的相关函数插值仿真

前述仿真可帮助了解各种频率图像的特性,但选用一个具有典型频谱特征的二维图像进行仿真,能提供一个综合性的结果,具有更为直接的参考意义。

在波前传感器设计中,为避免频谱混叠,采样前图像频谱通常被限制在奈奎斯特频率内。当方形子透镜的点扩展函数主瓣占  $4 \times 4$  个 CCD 像元时,其  $x$  方向和  $y$  方向传递函数为线性下降形式,截止于奈奎斯特频率。由于 CCD 焦面处子图像的频谱等于物频谱乘以子透镜的传递函数,而物频谱具有各种可能,可假定各频率成分振幅相同,因此采用线性下降频谱具有代表意义。虽然图像频谱确定,但各频率成分的相位为随机的,因此仍采用统计方法进行仿真。

综合考虑平均误差、无噪声时的随机误差、噪声引起的随机误差、 $x$ 、 $y$  方向亚像元偏移影响,采用  $32 \times 32$  像元的二维图像进行相关函数插值计算时所能达到的精度如图 7 所示。从仿真结果可以看出,总的来说,相关函数插值计算的抗噪声能力比较强。与无噪声时相比,在 2:1 信噪比时,误差增加不大。在波前传感器设计中,可考虑以 2:1 为信噪比设计目标。

## 5 结 论

从图像结构对子图像相对平移量计算精度的影响看,由于接近奈奎斯特频率的高频成分对总误差的贡献较大,因此,在波前传感器设计中,充分利用子透镜点扩展函数对图像的低通滤波作用来限制高频成分,使图像带宽限制在奈奎斯特频率之内,对于减小相关函数亚像元插值误差很有效。从噪声影响看,在图像中存在中高频成分时,相关函数插值计算的抗噪声能力比较强,在图像起伏信噪比 2:1 的条件下,误差增加不大。

**致谢** 感谢北京理工大学曹根瑞教授、北京空间机电研究所杨秉新研究员、徐彭梅研究员,苏州大学余景池教授对本研究工作的指导和支持。

## 参 考 文 献

- 1 T. R. Rimmele. Solar adaptive optics[C]. *Proc. SPIE*, 2000, **4007**: 218~231
- 2 Th. R. Rimmele, O. von der Lühe, P. H. Wiborg *et al.*. Solar feature correlation tracker[C]. *Proc. SPIE*, 1991, **1542**: 186~193
- 3 Rao Changhui, Zhang Xuejun, Jiang Wenhan. Simulation study on correlating Hartmann-Shack wavefront sensor for solar granulation[J]. *Acta Optica Sinica*, 2002, **22**(3): 285~289 (in Chinese)  
饶长辉,张学军,姜文汉. 太阳米粒结构相关哈特曼-夏克波前传感模拟研究[J]. *光学学报*, 2002, **22**(3): 285~289
- 4 Aimin Jiang, Seng Wang, Shengzhen Jing. Simulation system for correlation tracker[C]. *Proc. SPIE*, 2002, **4926**: 221~226
- 5 Chen Ke, Zhao Dazun. Study and experiments on extended beacon wavefront detection for adaptive optics [J]. *Optical Technique*, 2001, **27**(5): 387~390 (in Chinese)  
陈珂,赵达尊. 自适应光学中扩展信标波前探测的研究与实验[J]. *光学技术*, 2001, **27**(5): 387~390
- 6 Lisa A. Poyneer, Kai La Fortune, Carri Chan. Scene-based wave-front sensing for remote imaging[C]. *Proc. SPIE*, 2003, **5162**: 91~102
- 7 Lisa A. Poyneer, David W. Palmer, Kai N. La Fortune *et al.*. Experimental results for correlation-based wavefront sensing[C]. *Proc. SPIE*, 2005, **5894**: 1~14
- 8 Lisa A. Poyneer. Scene-based Shack-Hartmann wave-front sensing: analysis and simulation[J]. *Appl. Opt.*, 2003, **42**(29): 5807~5815
- 9 Xinqi Hu, Dazun Zhao, Xin Yu *et al.*. Signal processing of the Hartmann-Shack wavefront sensor operated with extended targets[C]. *Proc. SPIE*, 2004, **5639**: 78~82