

文章编号: 0253-2239(2007)07-1261-5

# 强非局域非线性介质中的超高斯空间光孤子族\*

刘金龙<sup>1</sup> 陈金华<sup>1,2</sup> 李海<sup>1</sup> 旷卫民<sup>1</sup>

(<sup>1</sup> 华南农业大学理学院, 广州 510642  
<sup>2</sup> 赣南师范学院物理与电子信息学院, 赣州 341000)

**摘要:** 运用变分法,对任意实对称响应函数泰勒级数展开取至二阶,得到了 1+1 维强非局域非线性介质中光束传输的超高斯光束的近似分析解,提出了超高斯空间光孤子族模型。分析结果表明:束宽解是三角函数型,相移、空间啁啾以及临界输入功率都正比于超高斯光束的阶数,束宽振荡周期不仅与介质材料有关,而且还与光束和相位因子的阶有关。提出了准方波形空间光孤子的可能性。

**关键词:** 非线性光学; 超高斯空间光孤子族; 变分法; 强非局域非线性介质

中图分类号: O437 文献标识码: A

## Family of Super-Gaussian Beams Spatial Optical Solitons in Strong Non-Local Nonlinear Media

Liu Jinlong<sup>1</sup> Chen Jinhua<sup>1,2</sup> Li Hai<sup>1</sup> Kuang Weimin<sup>1</sup>

(<sup>1</sup> College of Science, South China Agricultural University, Guangzhou 510642  
<sup>2</sup> School of Physics and Electronic Information, Gannan Normal University, Ganzhou 341000)

**Abstract:** Presented is the family of super-Gaussian spatial optical solitons in non-local nonlinear media modelled by 1+1 dimensional non-local nonlinear Schrödinger equation (NNLSE), in the strongly non-local case, an approximate analytical solution is obtained for an arbitrary response function by a variational approach. The solution with a sine beams width shows that the shift of phase, the spatial chirp and the critical input power are proportional to the order of the super-Gaussian optical beams, the period of the beam width is related not only to the material, but also to the orders of both the beams and the phase. The probability of quasi-square wave spatial solitons is also involved.

**Key words:** nonlinear optics; family of super-Gaussian spatial optical solitons; variational approach; non-local nonlinear media

### 1 引言

近年来,空间孤子的研究热点之一是非局域介质中传输的孤子。1997年, Snyder 和 Mitchell<sup>[1]</sup> 提出了强非局域模型,并用此模型研究了光束在非局域非线性介质中的传输特性,将非线性薛定谔方程近似简化成线性方程,得到了“线性孤子”。当前,有关非局域非线性介质中的空间孤子的研究已经引起了人们的极大兴趣,引发了光孤子研究的新一轮热潮<sup>[2~8]</sup>。郭旗等<sup>[9]</sup>对材料的实对称响应函数泰勒级数展开取至二阶,提出了比“线性孤子”更加精确的

模型,发现强非局域介质中空间孤子具有很大的相移,郭旗研究小组围绕高斯光束解,比较深入地研究了非线性介质中的传输特性和光束的相互作用<sup>[10~13]</sup>,提出了实现光子开关和光子逻辑门的理论方案<sup>[14]</sup>。Conti 等<sup>[15~19]</sup>从理论和实验研究了第一种强非局域非线性介质——向列相液晶,郭旗等<sup>[20]</sup>通过电压控制向列相液晶的非局域程度。最近研究结果表明:铅玻璃也是一种强非局域非线性介质<sup>[21]</sup>。这两种强非局域非线性介质的发现为空间孤子的研究提供了实验基础。

\* 江西省教育厅科技项目(赣教技字[2005]223号)资助课题。

作者简介:刘金龙(1972—),男,江西于都人,讲师,主要从事非线性光学和信息光学方面的研究。

E-mail: liujinlong@scau.edu.cn

收稿日期:2006-10-08;收到修改稿日期:2007-01-15

Snyder 和 Mitchell 提出了强非局域模型之后并没有提出解的一般性。据我们所知,超高斯光束的主要特点是光强在很宽范围内是均匀的。到目前为止,许多文献都是讨论高斯型光束在强非局域介质中传输特性。本文从 1+1 维出发,运用变分法,采用超高斯光束的通用公式,相位因子也引进高阶项,对实对称响应函数作泰勒级数展开取到二阶,使非局域非线性薛定谔方程中的非线性项保留到两项不为零,得到了超高斯光束在 1+1 维非局域非线性介质中传输时各参量的演化方程以及近似分析解,提出了由超高斯光束的阶次决定的超高斯空间光孤子族模型。同时也讨论了超高斯光束在强非局域介质中所需临界功率、相移以及空间啁啾和光束阶次的关系,以及光束在形成空间孤子时的振荡周期的影响因素。

## 2 非局域非线性薛定谔方程的变分表述

光束在非局域非线性介质中传输,若忽略介质损耗,光束的演化满足非局域非线性薛定谔方程。1+1 维非局域非线性薛定谔方程为<sup>[9]</sup>

$$i \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \rho \varphi \int_{-\infty}^{\infty} R(x-\xi) |\varphi(\xi, z)|^2 d\xi = 0, \quad (1)$$

式中  $\varphi(x, z)$  为傍轴光束,  $\mu = 1/2k$ ;  $\rho = k\eta$  是介质常数( $\eta$  的正负分别代表自聚焦和自散焦);  $k = \omega n_0/c$  是介质中的波数;  $n_0$  是介质的线性折射率;  $z$  和  $x$  分别是纵坐标和横坐标; 积分范围是  $-\infty$  到  $\infty$ ;  $R$  是介质的实对称响应函数, 满足归一化条件  $\int_{-\infty}^{\infty} R(\xi) d\xi = 1$ 。

根据变分法, (1) 式可由最小作用量原理从拉格朗日密度函数导出<sup>[22]</sup>:

$$L_r = -\frac{2A^2}{m} \left[ W \Gamma\left(\frac{1}{m}\right) \frac{d\theta}{dz} + W^{n+1} \Gamma\left(\frac{n+1}{m}\right) \frac{dc}{dz} + \frac{\omega n^2}{4W} \Gamma\left(\frac{2m-1}{m}\right) + n^2 \mu c^2 W^{2n-1} \Gamma\left(\frac{2n-1}{m}\right) \right] + \frac{2\rho A^4}{m^2} \left[ R_0 \Gamma^2\left(\frac{1}{m}\right) W^2 + R_0^{(2)} \Gamma\left(\frac{1}{m}\right) \Gamma\left(\frac{3}{m}\right) W^4 \right], \quad (6)$$

其中  $R_0^{(2)} = R^{(2)}(0)$ ,  $R_0 = R(0)$  分别表示介质响应函数的 2 阶导数及零阶导数的零点值。根据变分原理  $\delta L/\delta v_i$  (其中  $v_i$  为光束参量  $\theta, c, W, A$ ), 可得各参量演化方程为

$$A = \sqrt{\frac{mP_0}{2W\Gamma(1/m)}}, \quad (7)$$

$$\frac{dW}{dz} \Gamma\left(\frac{n+1}{m}\right) = 2n\mu c \Gamma\left(\frac{2n-1}{m}\right) W^{n-1}, \quad (8)$$

$$\frac{dc}{dz} = \frac{\omega n^2}{2W^{n+2}n} \frac{\Gamma[(2m-1)/m]}{\Gamma[(n+1)/m]} - 2n(n-1)\mu c^2 W^{n-2} \frac{\Gamma[(2n-1)/m]}{\Gamma[(n+1)/m]} + \frac{\rho P_0 R_0^{(2)}}{nW^{n-2}} \frac{\Gamma(3/m)}{\Gamma[(n+1)/m]}, \quad (9)$$

$$L = \frac{i}{2} \left( \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} \right) - \mu \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|^2 + \frac{1}{2} \rho |\varphi|^2 \int_{-\infty}^{\infty} R(x-\xi) |\varphi(\xi, z)|^2 d\xi, \quad (2)$$

式中 \* 表示复共轭。实际上, (1) 式等价于下述变分方程:

$$\delta \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} L(\varphi, \varphi^*, \varphi_z, \varphi_z^*, \varphi_x, \varphi_x^*) dx dz = 0, \quad (3)$$

设(3)式有如下尝试解:

$$\varphi = A(z) \exp[i\theta(z)] \exp\left[-\frac{x^m}{2W^m(z)} + ic(z)x^n\right], \quad (4)$$

式中  $A, \theta$  分别为尝试解的复振幅和相位,  $W$  是光束束宽,  $c$  是波前曲率。它们都是以传输距离  $z$  为变量的任意函数,  $m$  是超高斯光束的阶数, 为正偶数。  $n$  为相位因子的阶数, 为正整数。将(4)式代入(2)式, 并对  $x$  积分, 得  $L_r = L_r(z)$ , 变分问题简化成

$$\delta \int_{-\infty}^{\infty} L_r dz = 0. \quad (5)$$

## 3 光束参量演化方程及其方程的解

一般说来, 由于介质响应函数未知, (2) 式难于积分, 因此  $L_r$  也是难于计算的。但对于强非局域, 有  $W/W_m \ll 1$  的特点 ( $W_m$  为介质响应函数的宽度), 也就是说, 介质响应函数的宽度要比光束束宽大很多, 这时可对介质响应函数进行泰勒级数展开。具体来说, 先在  $x-\xi=0$  处泰勒级数展开到第二级, 然后在(2)式中对  $\xi$  积分, 考虑到实对称函数和尝试解模平方的奇偶性, 再对  $x$  积分后, 得到如下表达式:

$$\frac{d\theta}{dz} = -\frac{n+2}{n} \frac{\mu m^2}{4W^2} \frac{\Gamma[(2m-1)/m]}{\Gamma(1/m)} + n(n-2) \mu c^2 W^{2n-2} \frac{\Gamma[(2n-1)/m]}{\Gamma(1/m)} + \rho P_0 R_0 + \frac{(n-1)\rho P_0 R_0^{(2)}}{n} \frac{\Gamma(3/m)}{\Gamma(1/m)} W^2, \quad (10)$$

上面几个式子出现的  $P_0$  是在  $z=0$  处的输入功率,  $\Gamma(x)$  是伽马函数。联合(7)式~(10)式, 得到束宽应满足的方程为

$$\frac{1}{\mu} \frac{d^2 W}{dz^2} = \mu m^2 \frac{\Gamma[(2n-1)/m] \Gamma[(2m-1)/m]}{\Gamma^2[(n+1)/m]} W^{-3} + 2\rho P_0 R_0^{(2)} \frac{\Gamma[(2n-1)/m] \Gamma(3/m)}{\Gamma^2[(n+1)/m]} W, \quad (11)$$

为方便计算, 令  $\alpha = \frac{\Gamma[(2n-1)/m] \Gamma[(2m-1)/m]}{\Gamma^2[(n+1)/m]}$ ,  $\beta = \frac{\Gamma[(2n-1)/m] \Gamma(3/m)}{\Gamma^2[(n+1)/m]}$ , 则(11)式可替换为

$$\frac{1}{\mu} \frac{d^2 W}{dz^2} = \alpha \mu m^2 W^{-3} + 2\beta \rho P_0 R_0^{(2)} W, \quad (12)$$

引入代换  $y = W(z)/W_0$ 。由于  $R$  有最大值, 不妨设  $R_0^{(2)} = -g < 0$ , 则(12)式又可化简成

$$\frac{1}{\mu} \frac{d^2 y}{dz^2} - \frac{\alpha \mu m^2}{W_0^4 y^3} + 2\beta \rho P_0 g y = 0, \quad (13)$$

(13)式可等效成经典力学中质量为  $1/\mu$  的一维粒子在有心力场中受保守力  $F = \alpha \mu m^2 / (W_0^4 y^3) - 2\beta \rho P_0 g y$  的作用。其中第一项等效成所谓的衍射力, 它使光束发散。第二项等效成折射力, 它引起光束会聚。令这两种力相等且  $y=1$ , 则得到孤子传输的临界输入功率:

$$P_c = \frac{\alpha m^2}{4\beta \eta \kappa^2 g W_0^4} = \frac{\alpha \mu m^2}{2\beta \rho g W_0^4}, \quad (14)$$

假定光束在  $z=0$  有  $dW/dz|_{z=0} = 0$ , 根据保守力的概念, 势函数为

$$V(y) = \frac{\alpha \mu m^2}{2W_0^4 y^2} (1-y^2) - \beta \rho P_0 g (1-y^2), \quad (15)$$

由于只有等效保守力做功, 因而等效机械能守恒, 又  $dW/dz|_{z=0} = 0$ , 可以假设初始机械能  $T+V=0$ , 据此可得到如下方程:

$$\frac{1}{2\mu} \left( \frac{dy}{dz} \right)^2 + \frac{\beta \rho g P_0 (1-y^2)(P_c/P_0 - y^2)}{y^2} = 0, \quad (16)$$

对自聚焦介质, 有  $\eta > 0$ , (16)式有解析解, 解出此方程并把  $y$  还原成  $W$ , 得

$$W^2 = W_0^2 [\cos^2(\sigma_0 z) + \Lambda \sin^2(\sigma_0 z)], \quad (17)$$

此处的  $\sigma_0 = \sqrt{2\mu\beta\rho g P_0}$ ,  $\Lambda = P_c/P_0$ 。把(17)式代入(8)式, 得到

$$c = \frac{W_0^2 \sigma_0 (\Lambda - 1) \sin 2\sigma_0 z}{4n\mu W_0^2 [\cos^2 \sigma_0 z + \Lambda \sin^2 \sigma_0 z]^{n/2}} \frac{\Gamma[(n+1)/m]}{\Gamma[(2n-1)/m]}, \quad (18)$$

把(18)式代入(10)式, 并对  $z$  积分, 得  $\theta$  的表达式为

$$\theta = -\frac{(n+2)\mu m^2}{4nW_0^2 \sqrt{\Lambda}\sigma_0} \frac{\Gamma[(2m-1)/m]}{\Gamma(1/m)} \arctan(\sqrt{\Lambda} \tan \sigma_0 z) + \rho P_0 R_0 z - \frac{n-1}{n} \rho P_0 g W_0^2 \frac{\Gamma(3/m)}{\Gamma(1/m)} \left[ \frac{1+\Lambda}{2} z + \frac{1-\Lambda}{4\sigma_0} \sin 2\sigma_0 z \right] + \frac{(n-2)W_0^2 \rho g P_0 (1-\Lambda)^2}{2n\sigma_0} \frac{\Gamma^2[(n+1)/m]}{\Gamma[(2n-1)/m] \Gamma(1/m)} \times \left[ \frac{3-5\Lambda}{2(1-\Lambda)^2} \sigma_0 z + \frac{2\Lambda^2 - \Lambda}{\sqrt{\Lambda}(1-\Lambda)^2} \arctan(\sqrt{\Lambda} \arctan \sigma_0 z) + \frac{1}{2-2\Lambda} \frac{\arctan \sigma_0 z}{1 + \arctan^2 \sigma_0 z} \right], \quad (19)$$

把光束参量  $\theta, c, W, \Lambda$  代入(4)式, 得到强非局域非线性介质的超高斯光束解。光束的不同阶次  $m$  代表不同光束, 形成空间光孤子时, 是一种超高斯空间光孤子族。当  $m$  和  $n$  同时为 2 时就是文献[9]提到的高斯光束解。

## 4 结果讨论与分析

### 4.1 束宽振荡规律

当  $\Lambda \neq 1$  时, 由(17)式可知, 束宽解是三角函数型。 $\Lambda > 1$  时, 束宽在 1 和  $\sqrt{\Lambda}$  之间振荡, 束宽一伸一缩。当  $\Lambda < 1$  时, 束宽在  $\sqrt{\Lambda}$  和 1 之间振荡。由(17)式

和  $\sigma_0 = \sqrt{2\mu\beta\rho g P_0}$  可知,束宽振荡周期不仅与材料、初始入射功率有关,还与光束的阶和相位的阶次有关。当  $n = 2$  时,  $\beta = 1, \sigma_0 = \sqrt{2\mu\rho g P_0}$ ,和文献[9]讨论的基模高斯光束的振荡周期是一致的。对不同

的  $\Delta$  和  $m$ ,束宽与传输距离  $z$  的关系如图 1 所示。由图可知,  $n = 2$  且两束超高斯光束的两个参量  $m$  和  $\Delta$  的比值  $m/\Delta$  相等时,束宽振荡周期是相同的。

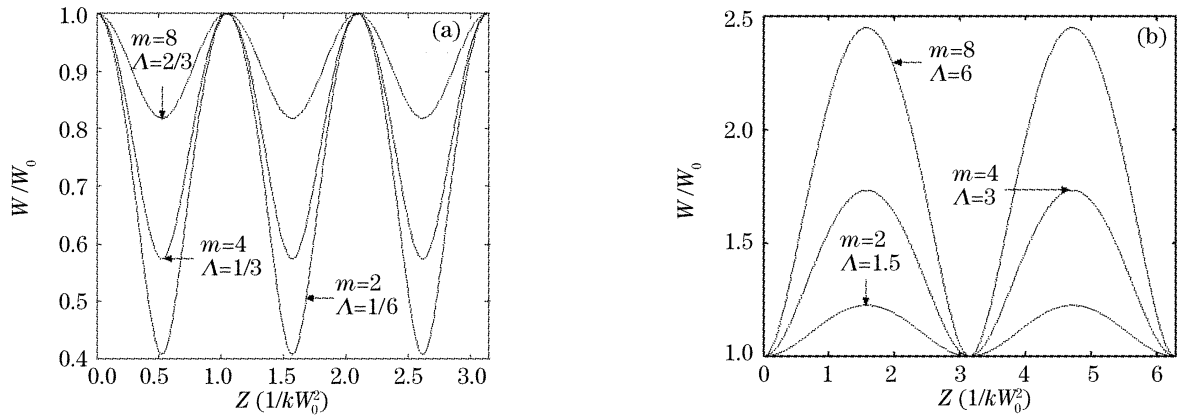


图 1 光束束宽与传输距离的变化规律。(a)  $n=2, \Delta < 1$ , (b)  $n=2, \Delta > 1$

Fig. 1 Width of beams varies with propagation distance. (a)  $n=2, \Delta < 1$ , (b)  $n=2, \Delta > 1$

### 4.2 临界功率和光束阶次的关系

根据  $\Gamma$  函数的特点,  $\alpha/\beta \approx 3/m$ , 代入(14)式, 得临界功率  $P_c = 3\mu m / (2\rho g W_0^4)$ , 因此, 临界输入功率正比于  $m$ , 并且和超高斯光束的阶次有关, 和相位因子的阶次无关。这其中的原因是阶数高的超高斯光束方波化, 传输时衍射明显, 形成孤子时衍射损耗也大, 所耗功率自然也大。而基模高斯光束在同种介质所需功率则最小。

### 4.3 孤子相移和光束阶次的关系

形成空间光孤子时,  $\Delta = 1$ , 由(18)式知  $c = 0$ , 此时相位只决定于  $\theta$ 。把  $\Delta = 1$  代入(19)式并考虑到  $\frac{\Gamma[(2m-1)/m]}{\Gamma(1/m)} \approx \frac{1}{m}, \frac{\Gamma(3/m)}{\Gamma(1/m)} \approx \frac{1}{3}$ 。设  $g = -\frac{R_0}{\tau W_m^2}$ , 显然,  $\tau$  由介质决定, 且为常数。(19)式变为

$$\theta \approx 3m \left( \frac{-5n+2}{4n} + \tau \frac{W_m^2}{W_0^2} \right) \frac{z}{4W_0^2 k}$$

因此, 孤子的相移正比于  $m$ , 即正比于超高斯光束阶次。在相同功率和强非局域的情况下,  $m$  阶次的超高斯孤子产生的相移是基模高斯光孤子的  $m/2$  倍。根据文献[10], 当  $n_0 \approx 1, k \approx 1, W_0 = 20\lambda, W_m = 10W_0, \lambda \approx 0.5 \mu\text{m}, m = 40, \tau = 1$  时产生  $\pi$  相移的距离  $z \approx 4 \mu\text{m}$ , 距离要比基模高斯情形小 1 个数量级。由于临界输入功率也正比于  $m$ , 故超高斯空间孤子族的相移也正比于临界输入功率。

### 4.4 空间啁啾与光束阶次的关系

形成空间光孤子时,  $W = W_0, \Delta = 1$ , 根据(10)式,  $\frac{d\theta}{dz} \approx \left( \frac{-5n+2}{4n} + \tau \frac{W_m^2}{W_0^2} \right) \frac{3m}{4W_0^2 k}$ , 在强非局

域情况下,  $\frac{d\theta}{dz} \approx \tau \frac{W_m^2}{W_0^2} \times \frac{3m}{4W_0^2 k}$ , 空间啁啾也正比于  $m$ 。同理, 空间啁啾也正比于临界输入功率。

### 4.5 准方波空间光孤子

由于超高斯光束光强在较宽范围内是均匀的, 且阶次越高, 光束越趋向方波, 因此, 我们提出准方波空间光孤子实现的可能性。

## 5 结 论

强非局域非线性介质中存在高斯解这一结论已不容置疑。本文通过变分法, 对实对称响应函数泰勒级数展开取至二阶, 得到了超高斯空间光孤子族, 且这种超高斯光束孤子族所需临界输入功率, 发生的相移, 空间啁啾都正比光束的阶次。光束在形成空间光孤子时, 束宽周期性振荡, 振荡周期与光束和相位的阶数都有关系。不同阶次的光束在同等条件下发生相移和空间啁啾不同这一特性在全光开光 and 全光网络方面存在潜在应用; 这种特性是否能借鉴相干检测方面用于空间光孤子调制与检波, 超高斯光空间光孤子理论能否用于半导体激光器产生超高斯脉冲并应用于光纤孤子通信, 都值得进一步研究; 向列型液晶和铅玻璃是已发现两种强非局域介质, 我们期待在这两种介质中观察到超高斯光孤子及其有关特性的研究。

### 参 考 文 献

1 A. W. Snyder, D. J. Mitchell. Accessible solitons[J]. *Science*, 1997, **276**(5318): 1538~1541  
 2 Y. R. Shen. Solitons made simple [J]. *Science*, 1997, **276**

- (5318); 1520
- 3 W. Krolikowski, O. Bang, J. Rasmussen *et al.*. Modulational instability in nonlocal nonlinear Kerr media[J]. *Phys. Rev. (E)*, 2001, **64**(1): 016612-1~016612-8
  - 4 O. Bang, W. Krolikowski, J. Wyller *et al.*. Collapse arrest and soliton stabilization in nonlocal nonlinear media[J]. *Phys. Rev. (E)*, 2002, **66**(4): 046619-1~046619-5
  - 5 W. Krolikowski, O. Bang. Solitons in nonlocal nonlinear media: exact solutions[J]. *Phys. Rev. (E)*, 2000, **63**(1): 016610-1~016610-6
  - 6 Ming Shen, Qi Wang, Jielong Shi *et al.*. Partially coherent accessible solitons in strongly nonlocal media[J]. *Phys. Rev. (E)*, 2006, **73**(5): 056602-1~056602-6
  - 7 Zhiyong Xu, Yaroslav V. Kartashov, Lluís Torner. Stabilization of vector soliton complexes in nonlocal nonlinear media[J]. *Phys. Rev. (E)*, 2006, **73**(5): 055601-1~055601-4
  - 8 Mousumi Ballav, A. Roy Chowdhury. A generalized nonlinear Schrödinger equation and optical soliton in a gradient index cylindrical media [J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2007, **31**(4): 794~803
  - 9 Qi Guo, Boren Luo, Fhuai Yi *et al.*. Large phase shift of nonlocal optical spatial solitons[J]. *Phys. Rev. (E)*, 2004, **69**(1): 016602-1~016602-8
  - 10 Yiqun Xie, Qi Guo. Phase modulations due to collisions of beam pairs in nonlocal nonlinear media [J]. *Opt. and Quant. Electron.*, 2004, **36**(15): 1335~1351
  - 11 Qi Guo, Xiujuan Jiang. Induced focusing from co-propagation of a pair of bright-dark optical beams in self-defocusing Kerr media [J]. *Opt. Commun.*, 2005, **254**(1~3): 19~29
  - 12 Qi Guo, Boren Luo, Sien Chi. Optical beams in sub-strongly non-local nonlinear media: a variational solution [J]. *Opt. Commun.*, 2006, **259**(1): 336~341
  - 13 Yi Huang, Qi Guo, Jueneng Cao. Optical beams in lossy non-local Kerr media[J]. *Opt. Commun.*, 2006, **161**(1): 175~180
  - 14 Guo Qi, Zhang Xiaping, Hu Wei *et al.*. Photonic switching and logic gating with strongly nonlocal spatial optical solitons[J]. *Acta Physica Sinica*, 2006, **55**(4): 1832~1839 (in Chinese)  
郭旗, 张霞萍, 胡巍等. 基于强非局域空间光孤子特性的光子开关和光子逻辑门[J]. *物理学报*, 2006, **55**(4): 1832~1839
  - 15 M. Peccianti, C. Conti, G. Assanto *et al.*. All-optical switching and logic gating with spatial solitons in liquid crystals[J]. *Appl. Phys. Lett.*, 2002, **81**(18): 3335~3337
  - 16 M. Peccianti, C. conti, G. Assanto. Optical modulational instability in a nonlocal medium[J]. *Phys. Rev. (E)*, 2003, **68**(2): 025602-1~025602-4
  - 17 M. Peccianti, K. A. Brzdakiewicz, G. Assanto. Nonlocal spatial soliton interactions in nematic liquid crystals[J]. *Opt. Lett.*, 2002, **27**(16): 1460~1463
  - 18 G. Assanto, M. Peccianti, C. Conti. Spatial optical solitons in bulk nematic liquid crystals[J]. *Acta Physica Polonica (A)*, 2003, **103**(2~3): 161~167
  - 19 M. Peccianti, C. Conti, G. Assanto. Optical multisoliton generation in bulk nematic liquid crystals[J]. *Opt. Lett.*, 2003, **28**(22): 2231~2233
  - 20 Wei Hu, Tao Zhang, Qi Guo *et al.*. Nonlocality-controlled interaction of solitons in nematic liquid crystals[J]. *Appl. Phys. Lett.*, 2006, **89**(7): 071111-1~071111-3
  - 21 C. Rotschild, O. Cohen, O. Manela *et al.*. Solitons in nonlinear media with an infinite range of nonlocality; first observation of coherent elliptic solitons and of vortex-ring solitons[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2005, **95**(21): 213904-1~213904-4
  - 22 B. Crosignani, P. D. Porto. Nonlinear propagation in Kerr media of beams with unequal transverse widths[J]. *Opt. Lett.*, 1993, **18**(17): 1394~1396