

文章编号: 0253-2239(2007)06-0981-6

# 掩埋型离子交换玻璃光波导的变分分析\*

张雅丽<sup>1</sup> 张 韬<sup>1</sup> 祝宁华<sup>1</sup> 刘 克<sup>2</sup> 潘裕斌<sup>2</sup>

(<sup>1</sup> 中国科学院半导体研究所, 北京 100083)  
(<sup>2</sup> 香港城市大学电子工程系, 香港)

**摘要:** 用变分法对离子交换法制备的掺铒光波导的传播特性进行了分析, 推导出了适用于掩埋型离子交换玻璃沟道光波导中场分布传播常量的变分表达式, 构建了场分布的厄米-高斯型试探解, 在两种不同实验条件下, 采用变分法确定了试探解中的待定参量, 获得光波导中的场分布, 利用传播常量的变分公式和已确定的场分布计算得到了传播常量和有效折射率。计算数据表明: 导波区域的有效折射率稍稍地大于限制层的折射率, 说明离子交换法制备的波导器件是弱波导; 高的辅助退火电场强度和适当的退火时间下, 所制备的光波导可以支持更多光模式的传输。该方法计算过程简洁、快速, 计算结果与实验结果吻合。

**关键词:** 导波光学; 光波导放大器; 变分分析; 离子交换; 试探解

中图分类号: TN252 文献标识码: A

## Variational Analysis of Buried Ion-Exchanged Optical Waveguide by Using Hermite-Gaussian Field Approximations

Zhang Yali<sup>1</sup> Zhang Tao<sup>1</sup> Zhu Ninghua<sup>1</sup> Liu Ke<sup>2</sup> Edwin. Y. B. Pun<sup>2</sup>

(<sup>1</sup> State Key Laboratory on Integrated Optoelectronics, Institute of Semiconductors, the Chinese Academy of Sciences, Beijing 100083)  
(<sup>2</sup> Department of Electronic Engineering, City University of Hong Kong, Hong Kong)

**Abstract:** Propagation characteristics of the Er-doped waveguide amplifier are studied by the variational method. The variational expression of the propagation constant is proposed in the buried ion-exchanged glass optical waveguide. The unknown parameters of the Hermite-Gaussian trial solution for the field profile are determined by using the variational method. The field distributions of different fabricated waveguides are then determined. The propagation constant and the effective refractive index are calculated using the variational expression of the propagation constant and the determined field distributions. The fact that the effective refractive index is slightly larger than the bulk index shows that the waveguides fabricated are weak ones. High electrical intensity and short annealing time are shown to be useful in the fabrication of buried waveguides. The calculation procedure is simple and the results calculated using the variational method agree with those measured in the experiment.

**Key words:** guided-wave optics; optical waveguide amplifiers; variational analysis; ion exchange; trial solution

## 1 引 言

随着光通信和集成光学的发展, 对各类光电器件的性能提出了更高的要求。在光通信系统中, 光放大器是关键的重要组成部分。继光纤放大器之后, 光波导放大器由于其结构紧凑、易于与其它光学器件集成、可以在同一个衬底上同时提供无源和有源光结构等优点, 引起了广泛的研究兴趣。其中掺

铒光纤放大器(Erbium-doped waveguide amplifier, EDWA)所能放大的波段恰好对应标准石英光纤的最小吸收窗口(1550 nm), 因此, 在集成光波导领域, 对掺铒光纤放大器的研究一时成为热点。

有关掺铒光纤放大器的重要研究方向除了器件制作方面的实验研究外<sup>[1,2]</sup>, 其场分布和传播常量的计算等方面的工作也很有实际意义, 这对分析掺

\* 国家自然科学基金(60510173, 60536010, 605060067)资助课题。

作者简介: 张雅丽(1981—), 女, 河南人, 博士研究生, 主要从事光波导放大器方面的研究。E-mail: ylzhang@semi.ac.cn

导师简介: 祝宁华(1959—), 男, 贵州人, 研究员, 博士生导师, 主要从事微波光电子器件的封装与测试方面的研究。

E-mail: nhzhu@semi.ac.cn

收稿日期: 2006-06-07; 收到修改稿日期: 2006-10-29

铒光纤放大器的性能及其优化设计,信号光和抽运光模式间的相互作用,与光纤的耦合等问题的研究都是十分重要的,具有学术上和工程上的双重研究意义。目前工艺设计制作的掺铒光纤放大器的折射率分布都呈现复杂的渐变性,这直接导致了无法直接从波动方程出发给出精确的模场分布的解析解。在实际分析计算和优化设计的过程中,常用的处理方法是根据二维光波导折射率渐变的某些特殊性,把它等效为平板光波导或矩形光波导来处理<sup>[3,4]</sup>。研究表明,这种等效对单模光波导来说是近似合理的,但对于多模波导来说这种等效是粗糙的,它的可靠性值得怀疑<sup>[5]</sup>。另外,尽管数值计算<sup>[6]</sup>是分析光波导放大器中场分布最有效的方法,也能得到比较满意的数值解,但数值计算过程比较繁琐,需要大量的时间,所以从这个角度讲,数值分析方法并不适合器件的优化设计。

变分法在许多工程问题中常用的分析方法,本文用变分法计算 EDWA 用离子交换掺铒光波导中的模场分布和传播常量。变分法用于波导分析问题,其精度取决于场分布试探解的选取。根据波导模场分布的特性,已逐步构建了几类成熟的试探解,有关文献<sup>[7]</sup>对常用的几类基模场分布的试探解进行

了分析比较,并提出了一些有价值的结论。结合文献<sup>[7]</sup>的分析,本文选择用厄米-高斯函数(Hermite-Gaussian function)构成的试探解,以掩埋型沟道波导为例,尝试用变分法确定了场分布中的变分参量,计算出了传播常量和有效折射率,整个计算过程简明快速,相信计算结果对优化设计有一定的指导价值。

## 2 传播常量的变分推导和场分布模型的构建

### 2.1 弱波导传播常量的变分推导

弱波导是指当导波区域的折射率( $n$ )与限制层折射率( $n_s$ )相差不大时的一类波导。弱波导支持的模式本质上是 TEM 模式的,即 $(n-n_s)/n \ll 1$ 时,波导中存在的模式是以一个强烈偏振的横场分量为主,相比之下,另一个横向分量和纵向分量是非常小的量<sup>[3]</sup>,以至可以忽略,在此近似下,弱波导中导模场分布满足标量波方程,可由标量波方程求得,避免了用整套麦克斯韦方程求解的麻烦。在弱波导中,研究 TE 模,其标量波导方程表示为

$$\nabla^2 \phi(x, y) + n^2 k_0^2 \phi(x, y) = \beta^2 \phi(x, y), \quad (1)$$

用  $\phi(x, y)$  左乘上式,对  $x, y$  积分,则有

$$\beta^2 = \frac{\iint_{-\infty}^{+\infty} \{\phi(x, y)\phi^*(x, y)k_0^2 n^2(x, y) - [\nabla_t \phi(x, y)][\nabla_t \phi^*(x, y)]\} dx dy}{\iint_{-\infty}^{+\infty} \phi^2(x, y) dx dy}, \quad (2)$$

其中  $k_0 = 2\pi/\lambda_0$  ( $\lambda_0$  是真空波长) 是自由空间的波数,  $n(x, y)$  是导波层折射率分布。(2) 式表明  $\beta^2$  是传播常量关于场分布和折射率分布的一个函数,它的解取决于满足适当边界条件的试探函数  $\phi(x, y)$  的选择。如果  $\phi(x, y)$  被构建是含有一些待定参量的特殊函数,改变这些参量,直到  $\beta^2$  值为最大,波导中的模场分布就可以唯一确定了。掩埋型场辅助退火离子交换玻璃光波导的导波区域的折射率与限制层折射率一般很小,属于弱波导,所以(2) 式适用于这类波导。

### 2.2 掩埋型沟道波导的折射率分布

本文研究的掩埋型沟道波导如图 1 所示。用场辅助退火(Field assisted annealing, FAA)后,掩埋型离子交换玻璃波导的折射率  $n(x, y)$  在  $x$  方向是余误差函数分布,  $y$  方向是指数函数分布,其表达式如下<sup>[8]</sup>:

$$n(x, y) = n_s + \frac{\Delta n_{\max}}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{Dt}{D_t t_t}} \exp\left(-\frac{y^2}{d_y^2}\right) \left\{ \int_0^{\infty} \operatorname{erfc}(\xi) \exp\left\{-\left[\frac{x - \xi[2\sqrt{Dt}] - \mu E_0 t_0 [1 - \exp(-t_t/t_0)]}{2\sqrt{D_t t_t}}\right]^2\right\} d\xi + \int_0^{\infty} \operatorname{erfc}(\xi) \exp\left\{-\left[\frac{x + \xi[2\sqrt{Dt}] + \mu E_0 t_0 [1 - \exp(-t_t/t_0)]}{2\sqrt{D_t t_t}}\right]^2\right\} d\xi \right\}, \quad (3)$$

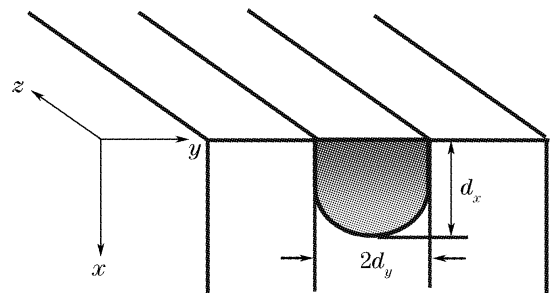


图 1 三维沟道波导结构示意图

Fig. 1 Structure of three-dimensional channel waveguide

其中  $x$  和  $y$  分别代表侧向和横向坐标,  $n_s$  是衬底的折射率,  $\Delta n_{\max}$  是波导表面折射率改变的最大值,  $D$  是在离子交换过程中  $K^+$  离子的扩散系数,  $D_t$  是退火过程中, 玻璃衬底中的  $K^+$  的交互扩散常数,  $t$  是制备过程中  $K^+$  与  $Na^+$  离子交换的时间,  $t_f$  是场辅助退火的时间,  $d_y$  是  $y$  方向上的扩散半宽。  $\xi = x/(2\sqrt{Dt})$  是积分过程中的坐标转换。  $\text{erfc}(\xi)$  是余误差函数。

### 2.3 波导场分布的构建

一方面, 尽管理论上光波导中模场分布可以通过求解麦克斯韦方程获得, 但在实际应用中, 由于其折射率分布通常比较复杂, 只有有限的几类分布才有精确的解析解, 它们是阶跃折射率分布、抛物线折射率分布和指数分布<sup>[9,10]</sup>。

另一方面, 理想波导中各个模式之间是正交的, 相互间没有功率的耦合。根据这一特性, 数学上可以用几类正交的基本函数比如抛物柱面函数或厄米-高斯函数的线性组合来近似模场分布。一般而言, 构建基模的试探解有两种方法<sup>[11]</sup>: 一是用展开系数作为变参量, 用适当的相互正交的函数表示的有限展开式; 二是包含变参量的适当的单一函数。前者由于能同时给出多个导模的传播常量, 对分析多模结构是有

益的; 但是这样构成的试探解包含许多函数的线性组合, 不方便获得波导的与场有关的特性。另一方面, 只要参量已知, 单一函数试探解表示的是一个非常简单的封闭函数的形式, 所以往往采用单一函数法构建基模分布的试探解。

有关文献几类试探解进行了描述和分析<sup>[7,12~14]</sup>。文献[7]以  $Ti:LiNbO_3$  沟道波导为例, 对高斯和厄米-高斯型试探解进行了比较分析, 文献[12]介绍了几种修正的厄米-高斯函数, 文献[13]采用包含三个参量的余弦-指数试探解进行了不均匀平面波导的单模分析, 结果表明, 在不同的波导区域尽量按最符合实际分布的函数分段地表示场分布, 即变分参量越多, 得到的结果越精确; 但这样一来, 增加了计算的难度。所以实际应用中, 或者在前期的设计中, 可以采用高斯型或者厄米-高斯型试探解, 其计算精度具有可行性。实验中也发现<sup>[14]</sup>, 扩散型沟道波导的基模分布在宽度方向是近似比较好的高斯型, 而在深度方向是厄米-高斯型。因此本文正是选用厄米-高斯型函数作为分析波导的试探解。

厄米-高斯函数是厄米多项式和一个高斯函数的乘积<sup>[15]</sup>, 一维各阶数的厄米-高斯函数可以写成

$$\phi(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/4} \left(\frac{1}{2^n n! w}\right)^{1/2} H_n \left[\frac{\sqrt{2}(x-d_x)}{w}\right] \exp\left[-\frac{(x-d_x)^2}{w^2}\right], \quad (4)$$

其中  $w$  是宽度参量,  $d_x$  是模式分布的中心坐标; 厄米多项式前面因数的选择是任意的, 这里所选取的参量是为满足归一化的需要而规定的, 即这时(4)式能使  $\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)\phi^*(x)dx = 1$  成立。

### 2.4 一维折射率分布的掩埋型平板波导

作为变分法在 FAA 波导中应用的例子, 先分析一维折射率分布的平板波导。在这种几何结构中, 折射率只是一个变量的函数, 记为  $n(x)$ ,

$$\begin{cases} n(x) = n_s + A_1 \left\{ \int_0^{\infty} \text{erfc}(\xi) \exp\left[-\left(\frac{x-\xi d_1 - A_2}{d_2}\right)^2\right] d\xi + \int_0^{\infty} \text{erfc}(\xi) \exp\left[-\left(\frac{x+\xi d_1 + A_2}{d_2}\right)^2\right] d\xi \right\}, & x \geq 0 \\ n(x) = n_c, & x < 0 \end{cases} \quad (5)$$

这里,

$$d_1 = 2\sqrt{Dt}, \quad d_2 = 2\sqrt{D_t t_f}, \quad A_1 = \frac{\Delta n_{\max}}{\sqrt{\pi}} \frac{d_1}{d_2}, \quad A_2 = \mu E_0 t_0 [1 - \exp(-t_f/t_0)], \quad (6)$$

此时, (2)式可以写成

$$\beta^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \phi^2(x) k_0^2 n^2(x) - \left[ \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} \right]^2 \right\} dx / \int_{-\infty}^{+\infty} \phi^2(x) dx, \quad (7)$$

取  $n = 0$ , 对应的模式为基模, 此时, 厄米-高斯函数退化为高斯函数:

$$\phi(x) = \left(\frac{1}{w\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{(x-d_x)^2}{w^2}\right], \quad (8)$$

把(8)式代入(7)式中得到,

$$\beta^2 = -\frac{1}{w^2} + \frac{1}{w} \sqrt{\frac{2}{\pi}} k_0^2 \int_{-\infty}^{+\infty} n^2(x) \exp\left[-\frac{2(x-d_x)^2}{w^2}\right] dx, \quad (9)$$

获得  $\beta^2$  的关键是确定  $w$  的值。对  $\beta^2$  的变分表达式的研究表明,即使在(2)式中,给  $\phi(x, y)$  一个微扰,  $\beta^2$  保持不变,称具有这个显著特性的积分表达式为稳定的值<sup>[16]</sup>。因此根据  $\beta^2$  的这一特性,选取正确的  $w$  值,当  $w$  在此值附近作轻微变化时,  $\beta^2$  也是不会改变的。因此在  $w$  处求  $\beta^2$  的极值(即利用公式  $d\beta^2/dw = 0$ ) 来确定  $w$ , 从而可以得到  $\beta^2$  的最大值  $\beta_m^2$ 。由(9)式得

$$\frac{2}{w^3} - \frac{1}{w^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} k_0^2 \int_{-\infty}^{+\infty} n^2(x) \exp\left[-\frac{2(x-d_x)^2}{w^2}\right] dx + \frac{4}{w^4} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} n^2(x) \exp\left[-\frac{2(x-d_x)^2}{w^2}\right] x^2 dx = 0, \quad (10)$$

解(10)式,将解得的  $w$  代入到(9)式中,可求得  $\beta_m^2$ 。

## 2.5 二维折射率分布的掩埋型沟道波导

对于二维掩埋型沟道波导,其基模的模场分布可以写为

$$\phi(x, y) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{w_x}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{w_y}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{(x-d_x)^2}{w_x^2}\right] \exp\left(-\frac{y^2}{w_y^2}\right), \quad (11)$$

$w_x, w_y$  分别为  $x, y$  方向上的模场分布参量。同样根据  $\beta^2$  特殊的平衡稳定性,与一维折射率分布情况做类似推导,由(2)式、(3)式、(11)式得

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{w_x^3} + \frac{d_x \exp\left(-\frac{2d_x^2}{w_x^2}\right) k_0^2 (1 - ns^2) \sqrt{\frac{2}{\pi}}}{w_x^2} - \frac{2k_0^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \exp\left[-\frac{2(-d_x+x)^2}{w_x^2} - \frac{2y^2}{w_y^2}\right] [n(x, y)]^2 dx dy}{\pi w_x^2 w_y} + \\ \frac{8k_0^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \exp\left[-\frac{2(x-d_x)^2}{w_x^2} - \frac{2y^2}{w_y^2}\right] (-d_x+x)^2 [n(x, y)]^2 dx dy}{\pi w_x^4 w_y} = 0, \\ \frac{2}{w_y^3} - \frac{2k_0^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \exp\left[-\frac{2(x-d_x)^2}{w_x^2} - \frac{2y^2}{w_y^2}\right] [n(x, y)]^2 dx dy}{\pi w_x w_y^2} + \\ \frac{8k_0^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} y^2 \exp\left[-\frac{2(x-d_x)^2}{w_x^2} - \frac{2y^2}{w_y^2}\right] [n(x, y)]^2 dx dy}{\pi w_x w_y^4} = 0, \end{array} \right. \quad (12)$$

解(12)式,可以得到  $w_x, w_y$ , 从而计算得到  $\beta_m$ 。

## 3 计算结果及讨论

计算中涉及到的参量  $d_1, d_2, A_1, A_2$  由波导制备过程的实验条件决定,  $d_x$  是在这些条件下的实验测量数据。改变实验条件,可得到不同尺寸、不同性质的波导。在文献[8]中,固定掩膜宽度和实验温度(6  $\mu\text{m}$ 和 380  $^\circ\text{C}$ ),改变离子交换的时间与场辅助退火电场的强度和时间的。文献[17]的研究表明,对于离子交换制作的沟道波导,  $\Delta n_{\text{max}}$  并不随扩散时间和掩膜宽度而改变。

对用场辅助退火法制备的掩埋型离子交换玻璃波导,本文用变分法确定了厄米-高斯试探解中的待定参量,即确定了基模的场分布,并利用这个结果计

算了的传播常量  $\beta$  和有效折射率  $N_{\text{eff}}(\beta/k_0)$ 。实验条件参量见文献[18,19]。计算结果如表1、表2、图2和图3所示。

表1 不同实验条件下,用变分法计算的基模传播参量(一维)

Table Calculated propagation parameters of fundamental mode (one-dimensional) with variational method		
	$E_0 = 100 \text{ V/mm},$	$E_0 = 120 \text{ V/mm},$
	$t_f = 45 \text{ min}$	$t_f = 30 \text{ min}$
$w / \mu\text{m}$	3.63575	4.23114
$\beta / \mu\text{m}^{-1}$	6.11807	6.12067
$N_{\text{eff}}$	1.50927	1.50991
FWHM	6.05392	7.04531

表 2 不同实验条件下,用变分法计算的基模传播参量(二维)  
Table 2 Calculated propagation parameters of fundamental mode (two-dimensional) with variational method

	$E_0 = 100 \text{ V/mm},$	$E_0 = 120 \text{ V/mm},$
	$t_t = 45 \text{ min}$	$t_t = 30 \text{ min}$
$w_x / \mu\text{m}$	3.63825	4.24125
$w_y / \mu\text{m}$	9.46291	8.98637
$\beta / \mu\text{m}^{-1}$	6.11608	6.11845
$N_{\text{eff}}$	1.50878	1.50936

从图 2(a)得知,两种实验条件下的折射率的最大值和对应的位置分别为: $n_1 = 1.5112, y(n_1) = 6.24947 \mu\text{m}; n_2 = 1.5115, y(n_2) = 7.94739$ ,这与实

验测得的模分布中心的位置  $x = d_x (5.8975 \mu\text{m}, 7.2 \mu\text{m}, \text{见文献}[5])$  相接近。另外,从图 2(a)、图 2(b)和图 3 的各个图中都可以明显地看出两种实验条件下折射率和模场分布的偏移性,而且偏移方向是一致的,即向波导更纵深处有不同程度的偏移。该实验结果表明,在高的辅助退火场强和短的退火时间下,得到的波导能支持有更好约束的光模式(指不同频率的传输光),这与文献[5]的结果相符,从而可以预言高的电场强度和短的退火时间更有助于提高光波导支持更多的模式的能力。

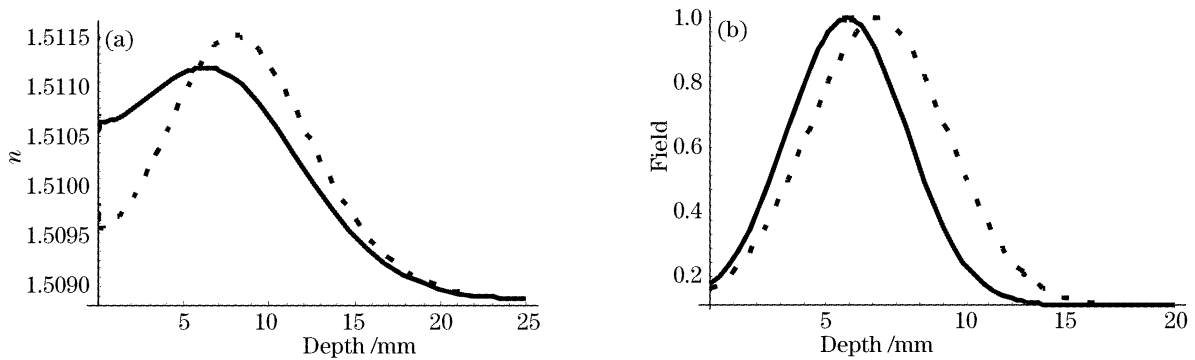


图 2 不同实验条件下掩埋型平板波导。(a)一维折射率分布,(b)基模归一化场强分布

Fig. 2 Different buried planar waveguides. (a) Refractive-index profiles, (b) normalized field distributions of fundamental mode

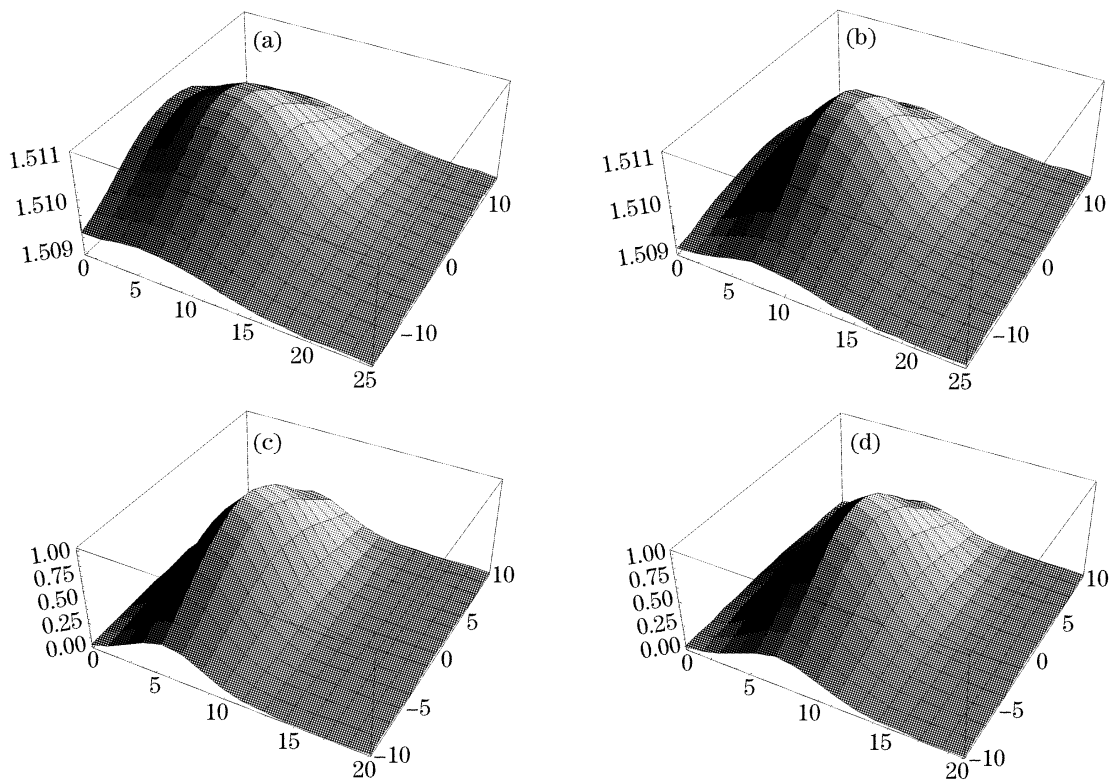


图 3 不同实验条件下掩埋型沟道波导。(a)、(b)二维折射率分布和(c)、(d)基模归一化场强分布[(a),(b)  $E_0 = 100 \text{ V/mm}, t_t = 45 \text{ min}$ ; (c),(d)  $E_0 = 120 \text{ V/mm}, t_t = 30 \text{ min}$ ]

Fig. 3 Different buried channel waveguides (a), (b) the refractive-index profiles (c), (d) the normalized field distributions of fundamental mode

## 4 结 论

本文从推导传播常量的变分表达式出发,分析并选取适当的场分布的试探解,利用厄米-高斯函数计算了掩埋型沟道波导中场分布和传播常量,整个计算过程简洁、方便、快速,得到的结果与实验结果相符:即用高的辅助退火电场强度和适当的退火时间下,所制备的掩埋型沟道波导能支持更多的光模式的传输。进一步的分析表明,对于多模的光模式,其可能存在的模式也越多,这些结论将发表在作者其他的文章中。所以通过控制制备参量,可以获得理想的光波导,从而控制一定的光模式的传输,而将其他光模式截止。另外,从计算速度和计算结果角度来说,变分法无疑是波导放大器的优化设计中很好的分析方法,对光波导类器件传播特性的分析有很好的指导意义。

### 参 考 文 献

- 1 Chen Haiyan, Dai Jizhi, Yang Yapei *et al.*. Er<sup>3+</sup>, Yb<sup>3+</sup> codoped phosphate glass channel waveguide amplifiers[J]. *Acta Optica Sinica*, 2003, **23**(7): 815~818 (in Chinese)  
陈海燕,戴基智,杨亚培等. 共掺磷酸盐玻璃沟道波导放大器[J]. *光学学报*, 2003, **23**(7): 815~818
- 2 Zhang Long, Lin Fengying, Qi Changhong *et al.*. High erbium doped glasses for waveguide amplifiers at 1.5  $\mu\text{m}$  [J]. *Acta Optica Sinica*, 2000, **20**(12): 1689~1693 (in Chinese)  
张 龙,林凤英,祁长鸿等. 用于 1.5  $\mu\text{m}$  光波导放大器的高浓度掺杂玻璃[J]. *光学学报*, 2000, **20**(12): 1689~1693
- 3 Marcatili E A J. Dielectric rectangular waveguide and directional coupler for integrated optics[J]. *Bell. Syst. Technol. J.*, 1969, **48**(9): 2071~2102
- 4 Koai K T, Liu P L. Modeling of Ti:LiNbO<sub>3</sub> waveguide devices; part I —directional couplers [J]. *J. Lightwave Technol.*, 1989, **7**(3): 533~539
- 5 Feit M D, Fleck J A. An analysis of intersecting diffused channel waveguides[J]. *IEEE J. Quant. Electron.*, 1985, **21**(11): 1799~1805
- 6 Wang Jiehong, Mu Huan, Jin Guoliang *et al.*. The characteristic of Er-doped phosphate glass waveguide amplifier [J]. *Acta Optica Sinica*, 2005, **25**(1): 99~104 (in Chinese)  
王洁红,慕 恒,金国良等. 掺铒磷酸盐玻璃波导放大器的特性研究[J]. *光学学报*, 2005, **25**(1): 99~104
- 7 Zhu N H, Lin Y K, Wu Z D *et al.*. Analytical expressions of the guided mode field distribution; analysis and comparison [J]. *IEEE J. Quant. Electron.*, 1992, **28**(6): 1424~1428
- 8 K. Liu, E. Y. B. Pun. Buried ion-exchanged glass waveguides using field-assisted annealing[J]. *IEEE Photon. Technol. Lett.*, 2005, **17**(1): 76~78
- 9 M. S. Sodha, A. K. Ghatak. *Inhomogeneous Optical Waveguides* [M]. New York: Plenum, 1977
- 10 M. J. Adams. *An Introduction to Optical Waveguides* [M]. Chichester, England: Wiley, 1981
- 11 Prasanna K. Mishra, Anurag Sharma, S. Labroo *et al.*. Scalar variational analysis of single-mode waveguides with rectangular cross section [J]. *IEEE Trans. Microwave Theory Technol.*, 1985, **33**(3): 282~286
- 12 Shih-Chieh Chao, Mu-Shiang, Woo-Hu Tsai. Variational analysis of modal-coupling efficiency between graded-index waveguides[J]. *IEEE J. Lightwave Technol.*, 1994, **12**(9): 1543~1549
- 13 Prasanna K. Mishra, Anurag Sharma. Analysis of single mode inhomogeneous planar waveguides [J]. *IEEE J. Lightwave Technol.*, 1986, **4**(2): 204~211
- 14 R. Keil, F. Auracher. Coupling of single-mode Ti-diffused LiNbO<sub>3</sub> waveguides to single-mode fibers [J]. *Opt. Commun.*, 1979, **30**(1): 23~28
- 15 Spiegel. *Mathematical Handbook of Formulas and Tables* [M]. New York: McGraw-Hill, 1968
- 16 G. A. Korn, T. M. Korn. *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers* [M]. New York: McGraw-Hill, 1961
- 17 M. N. Weiss, R. Srivastava. Determination of ion-exchanged channel waveguide profile parameters by mode-index measurements[J]. *Appl. Opt.*, 1995, **34**(3): 455~458
- 18 V. A. Popescu, N. N. Puscas. Determination of propagation constants in a buried ion-exchanged glass optical waveguide by using finite element method [J]. *J. Optoelectronics and Advanced Materials*, 2006, **33**(8): 1258~1261
- 19 K. Liu, E. Y. B. Pun. K<sup>+</sup>-Na<sup>+</sup> ion-exchanged waveguides in Er<sup>3+</sup>-Yb<sup>3+</sup> codoped phosphate glasses using field-assisted annealing[J]. *Appl. Opt.*, 2004, **43**(15): 3179~3184