

文章编号: 0253-2239(2007)06-0967-4

# 大气湍流外尺度对倾斜跟踪系统跟踪精度的影响

吴碧琳<sup>1,2</sup> 饶长辉<sup>1</sup>

(<sup>1</sup> 中国科学院光电技术研究所, 成都 610209)  
(<sup>2</sup> 中国科学院研究生院, 北京 100039)

**摘要:** 从 G 倾斜功率谱和倾斜跟踪残余误差两个方面分析了大气湍流外尺度对倾斜跟踪系统跟踪精度的影响。详细推导了 G 倾斜功率谱以及倾斜跟踪残差与大气湍流外尺度的函数关系式。数值计算结果表明大气湍流外尺度对 G 倾斜功率谱以及倾斜跟踪残余误差的低频段影响较大, 而对高频段的影响可以忽略不计。

**关键词:** 大气光学; 倾斜跟踪系统; 大气湍流外尺度; 跟踪精度

中图分类号: P425.2 文献标识码: A

## Effect of Outer Scale of Atmospheric Turbulence on Tracking Precision of Tilted Tracking System

Wu Bilin<sup>1,2</sup> Rao Changhui<sup>1</sup>

(<sup>1</sup> Institute of Optics and Electronics, the Chinese Academy of Sciences, Chengdu 610209)  
(<sup>2</sup> Graduate University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100039)

**Abstract:** The effect of outer scale of atmospheric turbulence on tracking precision of tilted tracking system is studied by considering G-tilt power spectrum and the residual variance of tilted tracking system. The G-tilt power spectrum and the residual variance of tilted tracking as functions of the outer scale of turbulence are deduced theoretically. The numerical results show that outer scale of turbulence has great effect on G-tilt power spectrum and residual variance of tilted tracking at low frequency but almost has no effect on the high frequency.

**Key words:** atmospheric optics; tilted tracking system; outer scale of turbulence; tracking precision

### 1 引 言

长期以来,光波在大气湍流中的传输理论是建立在科尔莫戈罗夫(Kolmogorov)湍流设计理论上的。科尔莫戈罗夫理论假设大气湍流满足局部均匀和各向同性,局限于大气湍流内尺度( $l_0$ )与外尺度( $L_0$ )之间的惯性区域,同时假定大气湍流外尺度为无穷大。而实际测量得到的大气湍流外尺度通常为 1~100 m,因此有必要研究大气湍流外尺度对系统跟踪精度的影响。

Glenn A. Tyler<sup>[1]</sup>基于科尔莫戈罗夫理论研究了 G 倾斜功率谱以及跟踪残差与系统闭环带宽之

间的关系,但未考虑大气湍流外尺度的影响;Julien Borgnino 等<sup>[2]</sup>研究了大气湍流外尺度对到达角起伏方差的影响,V. V. Voitsebovich 等<sup>[3]</sup>研究了大气湍流外尺度对波前扰动时间和空间特性的影响,但未考虑大气湍流外尺度对 G 倾斜功率谱及系统跟踪残差的影响。

本文从 G 倾斜功率谱和倾斜跟踪残差两个方面分析了大气湍流外尺度对跟踪精度的影响。首先分析了大气湍流外尺度对 G 倾斜功率谱的影响,然后由 G 倾斜功率谱推导出大气湍流外尺度与倾斜跟踪残差的关系式,最后基于云南昆明天文台

作者简介: 吴碧琳(1981—),女,安徽人,博士生研究生,主要从事自适应光学理论方面的研究。

E-mail: fivetozero@sina.com

导师简介: 饶长辉(1971—),男,江西人,研究员、博士生导师,主要从事自适应光学方面的研究。

E-mail: chrao@ioe.ac.cn

收稿日期: 2006-08-22; 收到修改稿日期: 2006-12-12

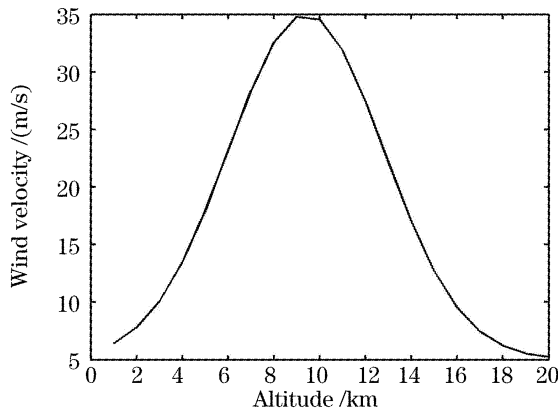


图 2 风速模型

Fig. 2 Wind-velocity model

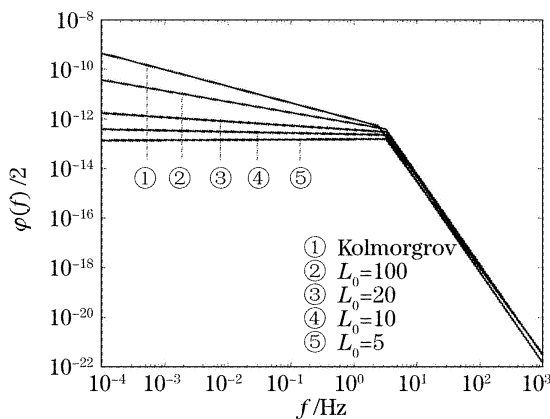


图 3 G 倾斜功率谱

Fig. 3 G tilted power spectrum

由图 3 可以看出大气湍流外尺度对 G 倾斜功率谱的低频段影响较大,望远镜口径一定的情况下, G 倾斜功率谱随着外尺度增大而增大。因为本文使用了 vonKarman 湍流谱,大于外尺度的低频湍流

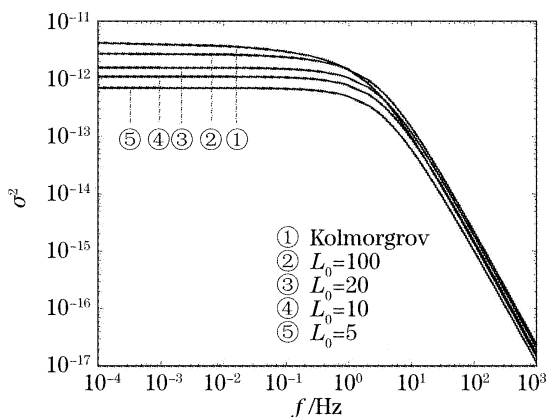


图 4 倾斜跟踪残差

Fig. 4 Tilted tracking residual

谱的密度小于科尔莫戈罗夫湍流谱相应的密度,即起伏强度降低了,所以外尺度越小,起伏量就越小,反之亦然。

将(21)式、(22)代入(20)式可得跟踪回路系统闭环带宽与跟踪残差之间的关系如图 4 所示。

由图 4 可以看出,在低频段大气湍流外尺度保持不变的情况下,自适应光学系统跟踪残差随着闭环带宽的增大而保持不变。系统闭环带宽一定的情况下,自适应光学系统跟踪残差随着外尺度增大而增大。大气湍流外尺度对自适应光学系统跟踪残差高频段的影响可忽略不计。

### 5 结 论

本文分析了大气湍流外尺度对倾斜跟踪系统跟踪精度的影响。详细推导 G 倾斜功率谱以及倾斜跟踪残差与大气湍流外尺度的关系。以昆明天文台 1.2 m 自适应光学望远镜为例,分析了大气湍流外尺度对系统跟踪精度的影响。数值计算结果表明低频段 G 倾斜和残差随着外尺度的增加而增加;同时在外尺度一定的情况下,G 倾斜和残差基本保持不变。高频段外尺度对 G 倾斜以及残差的影响可以忽略不计。

**致谢** 在本文的撰写过程中,中国科学院光电技术研究所八室姜文汉院士和中国科学院安徽光机所饶瑞中博士提出了宝贵意见,在此表示感谢。

### 参 考 文 献

- 1 Glenn A. Tyler. Bandwidth considerations for tracking through turbulence[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1994, **11**(1): 358~367
- 2 Julien Borgnino, François Martin, Aziz Ziad. Effect of a finite spatial-coherence outer scale on the covariances of angle-of-arrival fluctuations[J]. *Opt. Commun.*, 1992, **91**(1): 267~279
- 3 V. V. Voiteskhovich, S. Cuevas. Adaptive optics and the outer scale of turbulence[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1995, **11**(11): 2523~2531
- 4 Changhui Rao, Wenhan Jiang, Yudong Zhang *et al.*. Upgrade on 61-element adaptive optical system for 1.2 m telescope of Yunnan Observatory[C]. *Proc. SPIE*, 2004, **5490**: 943~953
- 5 Changhui Rao, Wenhan Jiang, Yudong Zhang *et al.*. Performance on the 61-element upgraded adaptive optical system for 1.2 m telescope of the Yunnan Observatory[J]. *Proc. SPIE*, 2004, **5639**: 11~20

1.2 m望远镜<sup>[4,5]</sup>平台给出了数值计算结果。

## 2 大气湍流外尺度对 G 倾斜功率谱的影响

### 2.1 G 倾斜协方差估计

G 倾斜定义为接受孔径上的平均斜率。对于圆形接收孔径,用函数关系式可表示为

$$\theta_G(t) = \frac{1}{\pi k R^2} \int d\mathbf{r} W(r/R) \nabla \phi(r, t), \quad (1)$$

$$\text{其中 } W(r) = \begin{cases} 1, & |r| \leq 1 \\ 0, & |r| > 1 \end{cases} \quad (2)$$

式中  $t$  为时间,  $R$  为圆形接受孔径的半径,  $\nabla$  为梯度算子,  $k = 2\pi/\lambda$  为波数,  $\lambda$  为探测波长,  $\phi(r, t) = k \int dz n(\mathbf{r} + \mathbf{V}t, z)$  为大气湍流相位扰动,  $\mathbf{V}$  为风速矢量。

G 倾斜协方差  $C_G(\tau)$  为

$$C_G(\tau) = \langle \theta_G(t_1) \cdot \theta_G(t_2) \rangle, \quad (3)$$

式中  $\tau = t_1 - t_2$ 。将(1)式代入(3)式可得

$$C_G(\tau) = \frac{1}{\pi^2 R^4} \iiint d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 dz_1 dz_2 W(r_1/R) W(r_2/R) \langle \nabla_1 n(\mathbf{r}_1 + \mathbf{V}_1 t_1, z_1) \cdot \nabla_2 n(\mathbf{r}_2 + \mathbf{V}_2 t_2, z_2) \rangle, \quad (4)$$

这里通过引入 Von Karman 谱来分析外尺度对 G 倾斜功率谱的影响, Von Karman 谱表示为

$$\phi(K) = 0.033 C_n^2 \frac{1}{(K_0^2 + K^2)^{11/6}}, \quad (5)$$

式中  $K_0 = 2\pi/L_0$ ,  $K$  为空间波数,  $C_n^2$  为折射率结构常数。

由 von Karman 谱可得

$$|r|^{5/3} = 6.65 \times 10^{-3} \int dK (K^2 + K_0^2)^{-11/6} [1 - \exp(2\pi i \mathbf{K} \cdot \mathbf{r})]. \quad (6)$$

将(6)式代入(4)式可得

$$C_G(\tau) = -\frac{2.91 \times 6.65 \times 10^{-3}}{2\pi^2 R^4} \iiint d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 dz C_n^2(z) W(r_1/R) W(r_2/R) \nabla_{12}^2 \int dK (K^2 + K_0^2)^{-11/6} \times \exp[2\pi i \mathbf{K} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 + \mathbf{V}\tau)], \quad (7)$$

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{V} = KV \cos \theta, \quad D = 2R, \quad z = h \sec \psi, \quad v = V/D,$$

式中  $\theta$  为  $\mathbf{K}$  与  $\mathbf{V}$  之间的夹角,  $\psi$  为天顶角。可得 G 倾斜协方差为

$$C_G(\tau) = 0.306 D^{-1/2} \sec \psi \int dh C_n^2(h) \int_0^\infty da [a^2 + (RK_0)^2]^{-11/6} a J_1^2(2\pi a) J_0(4\pi av\tau). \quad (8)$$

### 2.2 G 倾斜功率谱估计

G 倾斜功率谱可由 G 倾斜协方差的傅里叶变换可得

$$\Phi_G(f) = \int d\tau C_G(\tau) \exp(-2\pi i f\tau), \quad (9)$$

式中  $f$  为时间频率。将(8)式代入(9)式可得

$$\Phi_G(f) = 0.306 D^{-1/3} \sec \psi \int dh C_n^2(h) \int_0^\infty da [a^2 + (RK_0)^2]^{-11/6} a J_1^2(2\pi a) \int d\tau J_0(4\pi av\tau) \exp(-2\pi i f\tau), \quad (10)$$

(10)式最后的积分可以通过(11)式化简

$$\int dt I_n(t) \exp(-i\omega t) = \begin{cases} 2(-i)^n T_n(\omega)/(1-\omega^2)^{1/2}, & \omega^2 < 1 \\ 0, & \omega^2 > 1 \end{cases} \quad (11)$$

式中  $T_n(\omega)$  为切比雪夫(Chebyshev)多项式  $T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$ , 进行等量代换,  $t = 4\pi av\tau$ , 其中  $\omega = f/(2av)$ ,  $\omega$  为频域频率。则(10)式可表示为

$$\frac{1}{2} \Phi_G(f) = 0.155 D^{-1/3} \sec \psi f^{-8/3} \int dh C_n^2(h) v^{5/3} \int_0^1 dx \frac{x^{5/3}}{\sqrt{1-x^2}} \left\{ 1 + \left[ \frac{K_0 D x v(h)}{f} \right]^2 \right\}^{-11/6} J_1^2\left(\frac{\pi f}{xv}\right), \quad (12)$$

由于是单轴的功率谱,故引入  $1/2$ 。

### 2.3 G 倾斜功率谱渐近线估计

如(12)式所示,频率仅出现在  $f^{-8/3} \left\{ 1 + \left[ \frac{K_0 D x v(h)}{f} \right]^2 \right\}^{-11/6} J_1^2 \left( \frac{\pi f}{xv} \right)$  中,当频率很小时,贝塞尔函数可用(13)式近似为

$$J_\nu(z) \approx (z/2)^\nu / \nu!, \tag{13}$$

低频段的 G 倾斜功率谱可表示为

$$\frac{1}{2} \Phi_G(f) = 0.155 D^{-1/3} \left( \frac{\pi^2}{4} \right) \sec \psi f^{-2/3} \int dh C_n^2(h) v^{-1/3} \int_0^1 dx \frac{x^{-1/3}}{\sqrt{1-x^2}} \left\{ 1 + \left[ \frac{K_0 D x v(h)}{f} \right]^2 \right\}^{-11/6}; \tag{14}$$

同样,对于高频段贝塞尔函数可用(15)式近似

$$J_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos \left( z - \frac{1}{2} \nu \pi - \frac{1}{4} \pi \right), \tag{15}$$

则高频段的 G 倾斜功率谱可表示为

$$\frac{1}{2} \Phi_G(f) = 0.155 D^{-1/3} \frac{2}{\pi^2} \sec \psi f^{-11/3} \int dh C_n^2(h) v^{8/3} \int_0^1 dx \frac{x^{8/3}}{\sqrt{1-x^2}} \left\{ 1 + \left[ \frac{K_0 D x v(h)}{f} \right]^2 \right\}^{-11/6}. \tag{16}$$

## 3 大气湍流外尺度对跟踪残差的影响

假设倾斜跟踪系统的闭环传递函数为

$$H(f) = \frac{1}{1 + i f / f_{3 \text{ dB}}}, \tag{17}$$

则由

$$\sigma_\theta^2 = \int df \Phi(f) |1 - H(f)|^2, \tag{18}$$

可得系统的跟踪残差为

$$\sigma_\theta^2 = \int df \left[ \frac{1}{2} \Phi_G(f) \right] \frac{(f/f_{3 \text{ dB}})^2}{1 + (f/f_{3 \text{ dB}})^2}, \tag{19}$$

$f_{3 \text{ dB}}$  为闭环带宽,将(12)式代入(19)式可得系统的跟踪残差:

$$\sigma_\theta^2 = 0.155 D^{-1/3} \sec \psi \int_0^\infty df f^{-8/3} \int dh C_n^2(h) v^{5/3} \int_0^1 dx \frac{x^{5/3}}{\sqrt{1-x^2}} \left\{ 1 + \left[ \frac{K_0 D x v(h)}{f} \right]^2 \right\}^{-11/6} J_1^2 \left( \frac{\pi f}{xv} \right) \frac{(f/f_{3 \text{ dB}})^2}{1 + (f/f_{3 \text{ dB}})^2}. \tag{20}$$

## 4 数值计算结果 (22)

为了深入研究外尺度的影响,我们以昆明天文台 1.2 m 自适应光学望远镜为例分析外尺度对系统跟踪精度的影响。望远镜的有效口径为 1.06 m,天顶角为  $0^\circ$ 。

折射率结构函数的模型引用 HV-21 模型

$$C_n^2(h) = 5.94 \times 10^{-53} (\omega/27)^2 h^{10} \exp(-h/100) + 2.7 \times 10^{-16} \exp(-h/1500) + A \exp(-h/100), \tag{21}$$

其中  $h$  为高度, HV-21 模型中

$$A = 1.7 \times 10^{-14} m^{-2/3}, \quad \omega = 21 \text{ m/s}$$

风速模型为

$$v(h) = v_g + 30 \exp\{-[(h - 9400)/4800]^2\},$$

$$v_g = 5 \text{ m/s},$$

图 1 为 HV-21 模型,图 2 为风速模型。将(21)

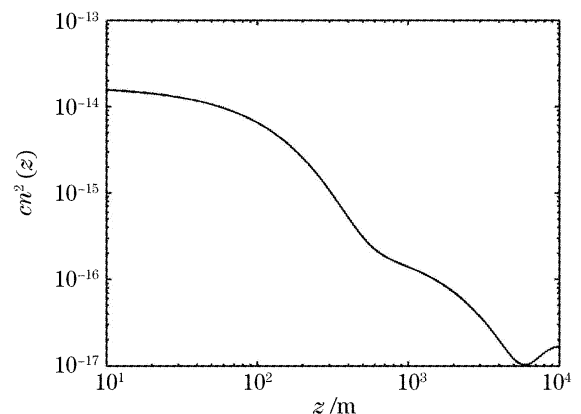


图 1 HV-21 模型

Fig. 1 HV-21 model