

文章编号: 0253-2239(2007)05-0903-4

四极子微腔的光场分布*

李赞佳 吴根柱 凤 兰 霍海燕

(内蒙古大学物理系, 呼和浩特 010021)

摘要: 应用电磁场理论和介质中的麦克斯韦方程组, 推导了任意截面微腔的 TM 模光场分布。并以四极子状微腔截面为例, 推导了含有传播常数的本征方程。用 Mathematica 软件模拟出具有不同变形因子的基模($m=1$)和高阶模的光场分布图, 得出基模在 $\phi=45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$ 四个方向光辐射最强, 具有“蝴蝶结模式”特征, 并且当变形因子值取 ϵ' 为 0.1~0.15 时, 该效应表现得更为明显; 而高阶模($m \geq 2$)时微腔中没有这种光的定向输出现象, 在任何变形因子情况下也不能形成稳定的“蝴蝶结模式”, 为四极子微腔激光器的设计和制作提供了一定的理论依据。

关键词: 光计算; 四极子; 微腔; 光场分布; 变形因子

中图分类号: TN25 文献标识码: A

Optical-Field Distribution of Quadrupolar-Shaped Microcavity

Li Zanjia Wu Genzhu Feng Lan Huo Haiyan

(Department of Physics, Inner Mongolia University, Huhhot 010021)

Abstract: Using the theory of electromagnetic field and Maxwell equations in medium, we derive the TM mode optical field distribution of resonators with arbitrary cross section. Moreover, taking quadrupolar-shaped microcavity as example, it deduces the eigenvalue equation which contains the propagation constant. Using the software Mathematica, it stimulates the optical field distribution of fundamental mode ($m=1$) and high-order mode with the different deformation factors, and it is found that the fundamental mode gets the maximum of light emission at $\phi=45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$, it has the feature of “bow-tie” mode. Furthermore, when the deformation factor is 0.1~0.15, the effect is more obviously; however there is not the phenomenon of drawing out the light directionally in the microcavity when $m \geq 2$, and it does not form the stable “bow-tie” mode when the deformation factor gets any values. It provides a certain theoretical base for designing and making the quadrupolar-shaped microcavity lasers.

Key words: quadrupolar-shaped; microcavity; optical field distribution; deformation factor

1 引 言

近年来,随着半导体微加工技术的进步,半导体激光器有了很大的发展,已经由传统的法布里-珀罗谐振腔发展到了微腔阶段,并且微腔激光器已经显示出高品质因子、低阈值电流等优点,但在另一方面这个有利的因素也给光的定向引出和提高输出功率方面带来了很多问题。而不对称任意截面微腔激光器改变了圆对称微腔中光很难逸出的缺点。对微腔激光器来说,微腔横截面的形状直接决定了光场分布。目前国内的研究工作主要集中在圆形、环形、椭

圆形、梯形、矩形、球形等对称截面的波导模式特征^[1~7],而对任意截面微腔激光器的光场分布和模式特征方面的报道还很少见到。而国外对微腔的研究工作开始时也主要集中于碟形、柱形^[8~13]等方面,但后来发现对称微腔很难实现光的定向输出等问题之后开始提出有任意和不对称截面微腔,其中最典型的就是四极子微腔,并用量子级联结构实现了激光辐射^[14,15]。

对四极子量子级联微腔的光场分布和模式特征问题,文献[14]中采用亥姆霍兹波动方程给出了比

* 国家自然科学基金(60366001)资助项目。

作者简介: 李赞佳(1980—),男,河北唐山人,硕士研究生,主要从事半导体激光器的理论模式和材料合成方面的研究。
E-mail: lizanjia543842@163.com

导师简介: 吴根柱(1967—),男,蒙族,内蒙古呼和浩特人,教授,硕士生导师,主要从事半导体微腔激光器的理论和器件制作等方面的研究。E-mail: pygzwu@imu.edu.cn

收稿日期: 2006-07-03; 收到修改稿日期: 2006-09-18

较好的数值计算结果,但并没有给出具体的理论推导和详细的计算方法,并且没给出高阶模的光场分布,为此本文应用电磁场理论和介质中的麦克斯韦方程组,详细推导了四极子微腔的 TM 模光场分布。用 Mathematica 软件模拟出具有不同变形因子的基模($m=1$)和高阶模的光场分布图,得到了与文献[14,15]上给出的理论和实验结果相符合的结论。

2 电磁场理论

四极子微腔^[14]是变形的类椭圆形状,形貌近似为“体育场”,在极坐标系下可以表示为

$$r(\phi) = \frac{R}{\sqrt{1+2\epsilon'}} \sqrt{1+2\epsilon' \cos 2\phi}, \quad (1)$$

其中 R, ϵ' 为大半径和变形因子。取四极子微腔的截面并建立坐标系如图 1。

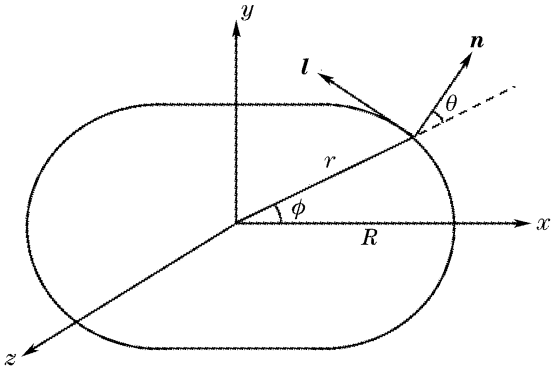


图 1 不对称(四极子)量子级联微腔激光器截面
Fig. 1 Cross section of asymmetric (quadrupolar-shaped) quantum cascade microlasers

考虑微腔的外部为空气,折射率为 n_0 ,内部折射率为 n ,当光沿 z 方向传播时,其时谐因子为 $\exp(i\omega t)$ 、传播常数为 β 的电磁波,波动方程为

$$\nabla^2 \psi + k_c^2 \psi = 0, \quad (2)$$

其中 $k_c = \omega \sqrt{\mu \epsilon} = k_0 n, k_0 = 2\pi/\lambda, \lambda$ 为激光光波长。若将微分算子 ∇ 分解为 $\nabla = \nabla_t + \mathbf{a}_z \frac{\partial}{\partial z}$,则波动方程可写为

$$\nabla_t^2 \psi + k^2 \psi = 0, \quad (3)$$

其中 $k^2 = k_c^2 - \beta^2, \nabla_t$ 称为横向拉普拉斯算子。在图 1 坐标系下可以写为

$$\nabla_t = \mathbf{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{a}_y \frac{\partial}{\partial y} = \mathbf{n} \frac{\partial}{\partial n} + \mathbf{l} \frac{\partial}{\partial l}, \quad (4)$$

结合介质中的麦克斯韦方程组,经过简单的推导可以证明,电磁场的横向分量 \mathbf{E}_t 和 \mathbf{H}_t 分别由 E_z 和 H_z 给出,关系式具体为^[16]

$$\mathbf{E}_t = -\frac{1}{k^2} [-\mathbf{a}_z \times j\omega\mu \nabla_t H_z + j\beta \nabla_t E_z], \quad (5)$$

$$\mathbf{H}_t = -\frac{1}{k^2} [j\omega\epsilon \mathbf{a}_z \times \nabla_t E_z + j\beta \nabla_t H_z], \quad (6)$$

由分离变量法求解柱坐标系下的亥姆霍兹方程可得

$$E_z = \sum_{m=0}^{\infty} a_m^s G_m^s(r) \exp(-jm\phi), \quad (7)$$

$$H_z = \frac{\beta}{\omega\mu_0} \sum_{m=0}^{\infty} b_m^s G_m^s(r) \exp(-jm\phi), \quad (8)$$

表示内部区域时 $s = i$,表示外部区域时 $s = e$,

$$G_m^i(r) = J_m(ur), \quad G_m^e(r) = K_m(\omega r),$$

$$u = (k_0^2 n^2 - \beta^2)^{1/2}, \quad \omega = (\beta^2 - k_0^2 n_0^2)^{1/2},$$

$a_m^i, a_m^e, b_m^i, b_m^e$ 为待定系数。

将(4)式代入(5)和(6)式,并由分量相等可以得到

$$E_l = -\frac{j\beta}{k_0^2 n_s^2 - \beta^2} \left(\frac{\partial E_z}{\partial l} - \frac{\omega\mu}{\beta} \frac{\partial H_z}{\partial n} \right), \quad (9)$$

$$H_l = -\frac{j\beta}{k_0^2 n_s^2 - \beta^2} \left(\frac{\omega\epsilon}{\beta} \frac{\partial E_z}{\partial n} + \frac{\partial H_z}{\partial l} \right). \quad (10)$$

3 光场分布

光场分布由电磁场辐射的平均能流密度

$$\bar{\mathbf{s}} = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}) \quad (11)$$

决定。

在图 1 的坐标系下 $\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}$ 可以写成

$$\mathbf{E}^* \times \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{n} & \mathbf{l} & \mathbf{z} \\ E_n^* & E_l^* & E_z^* \\ H_n & H_l & H_z \end{vmatrix}.$$

考虑到量子级联激光材料只有 TM 波($H_z = 0$)可以得出

$$\bar{\mathbf{s}} = s_n = \frac{1}{2} \text{Re}(-E_z^* H_l) =$$

$$\frac{1}{2} \text{Re} \left[a_m^s G_m^s(r) \exp(jm\phi) \frac{j\omega\epsilon}{k_0^2 n_s^2 - \beta^2} \frac{\partial E_z}{\partial n} \right], \quad (12)$$

利用柱坐标系下

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial l} = -\sin\theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \phi}, \\ \frac{\partial}{\partial n} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \phi}, \end{cases} \quad (13)$$

可以得出任意截面微腔的光场分布

$$s_n = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} |a_m^s G_m^s(r)|^2 \frac{\omega\epsilon m \sin\theta}{r(\phi)k^2}, \quad (14)$$

其中 $r(\phi)$ 为对应不同外形谐振腔的边界方程[四极子形微腔对应(1)式]。对于四极子微腔边界处有^[17]

$$\tan\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial r(\phi)}{\partial \phi} \Big|_c, \quad (15)$$

将 s_n 化简为

$$s_n = \begin{cases} \sum_{m=0}^{\infty} -A \frac{J_m^2(ur)}{J_m^2(ur_c)} \frac{\omega \epsilon m}{ru^2} \frac{\epsilon' \sin 2\phi}{\sqrt{4\epsilon'^2 + 4\epsilon' \cos 2\phi + 1}}, & (r < r_c), \\ \sum_{m=0}^{\infty} -A \frac{K_m^2(\omega r)}{K_m^2(\omega r_c)} \frac{\omega \epsilon m}{r\omega^2} \frac{\epsilon' \sin 2\phi}{\sqrt{4\epsilon'^2 + 4\epsilon' \cos 2\phi + 1}}, & (r > r_c), \end{cases} \quad (16)$$

其中 A 为任意常量。

因为 s_n 中 u, ω 含有未知数 β , 所以下面推导含有 β 的本征方程。

4 含有 β 的本征方程

考虑 TM 波 ($H_z=0$) 的电场强度在边界处和切向分量 (l 方向) 连续, 有 $E_x^i = E_x^o, E_l^i = E_l^o$ 。结合 (9) 式、(13) 式、(14) 式和下面的贝塞尔函数关系:

$$J'_m(\omega r) = -\frac{mJ_m(\omega r)}{\omega r} + J_{m-1}(\omega r), \quad K'_m(\omega r) = -\frac{mK_m(\omega r)}{\omega r} + K_{m-1}(\omega r),$$

可得到本征方程为

$$\frac{J_{m-1}(\omega r_c)}{uJ_m(\omega r_c)} - \frac{K_{m-1}(\omega r_c)}{\omega K_m(\omega r_c)} = \frac{m}{r_c} \left[1 - \frac{ir_c}{r'_c(\phi)} \right] \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{\omega^2} \right), \quad (17)$$

其中 r_c 为边界曲线半径即为 (1) 式, 取 $R = 70 \mu\text{m}, \lambda = 5 \mu\text{m}, n = 3.4, n_0 = 1, \epsilon'$ 为 $0.06 \sim 0.2$ 。用计算机编程可解出对应不同角度 ϕ 时的 β 值。

5 光场分布的图形模拟

将解得的 β 值代入 (15) 式, 用 mathematica 软件模拟出不同变形因子的图形如图 2。

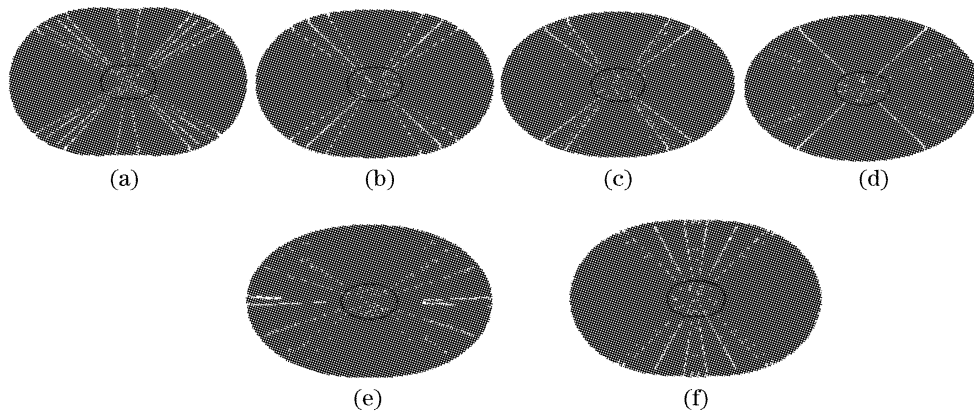


图 2 光场分布图. (a) $\epsilon' = 0.2, m = 1$, (b) $\epsilon' = 0.15, m = 1$, (c) $\epsilon' = 0.1, m = 1$, (d) $\epsilon' = 0.06, m = 1$, (e) $\epsilon' = 0.1, m = 2$, (f) $\epsilon' = 0.15, m = 2$

Fig. 2 Optical field distribution for deformation factor (a) $\epsilon' = 0.2, m = 1$, (b) $\epsilon' = 0.15, m = 1$, (c) $\epsilon' = 0.1, m = 1$, (d) $\epsilon' = 0.06, m = 1$, (e) $\epsilon' = 0.1, m = 2$, (f) $\epsilon' = 0.15, m = 2$

6 结 论

利用电磁场理论推导出四极子截面微腔的光场分布, 并用计算机模拟出不同变形因子和 m 值的四极子微腔的光场分布图, 得到 1) 当 $m = 1$ (基模) 时在 $\phi = 45^\circ, 135^\circ, 225^\circ$ 和 315° 四个方向光辐射最强与文献 [14] 得到的理论结果和文献 [15] 得到的实验结果基本吻合, 有“蝴蝶结”模式特征, 提高了光的辐射方向性; 2) 同时也发现当变形因子取较大值 $\epsilon' = 0.2$

时, 在图 2 的 (a) 中 $\phi = 90^\circ$ 和 $\phi = 270^\circ$ 附近出现了光强比较强的伴生光线, 而且随着变形因子的减小发现此伴生光线在逐渐减弱并消失; 但是当变形因子取较小值 (如 $\epsilon' = 0.06$) 时在 $\phi = 180^\circ$ 和 $\phi = 360^\circ$ 附近又开始了伴生光线, 所以得出光场分布图并不是变形因子很大或很小时最好, 而是取 $0.1 \sim 0.15$ 时才能达到“蝴蝶结”模式的最佳效果, 图 2(b)、图 2(c) 恰好说明了这一点; 3) 当 $m \geq 2$ 的高阶模时在微腔

中不能形成这种光的定向输出现象[图 2(e)和图 2(f)],通过计算发现在任何变形因子情况下高阶模都不能形成稳定的“蝴蝶结模式”,即高阶模的光场分布没有一定的分布规律,有可能在激光器中不能形成稳定的谐振。以上结论对微腔激光器辐射光的定向引出和提高输出功率提供了一定的理论依据。

参 考 文 献

- 1 Gao Yongchun, Cheng Pu, Long Changyin. Characteristic study of elliptical optical waveguides[J]. *Chin. J. Quant. Electron.*, 1994, **11**(3): 171~175 (in Chinese)
高永椿,程蒲,龙长应. 椭圆光波导的特性研究[J]. *量子电子学*, 1994, **11**(3): 171~175
- 2 Lin Yuanfang, Huang Yuanqing. Properties of coaxial waveguide with annular cross section and metallic walls[J]. *Acta Optica Sinica*, 2002, **22**(6): 674~677 (in Chinese)
林远芳,黄元庆. 环状截面同轴金属波导的特性研究[J]. *光学学报*, 2002, **22**(6): 674~677
- 3 Ma Chunsheng, Liu Siyong, Gao Fubin. Mode equation of trapezoidal cross-section dielectric optical waveguide[J]. *Chin. J. Lasers*, 1991, **18**(9): 677~681 (in Chinese)
马春生,刘式塘,高福斌. 梯形截面介质光波导的模方程[J]. *中国激光*, 1991, **18**(9): 677~681
- 4 C. J. Shackleton, K. M. Abramski, H. J. Baker *et al.*. Lateral and transverse mode properties of CO₂ slab waveguide lasers[J]. *Opt. Commun.*, 1992, **89**(5,6): 423~428
- 5 Saad Michael Saad. On the higher order modes of elliptical optical fibers [J]. *IEEE Transaction on Microwave Theory and Techniques*, 1985, **MTT-33**(11): 1110~1112
- 6 Lijuan Yu, Yongzhen Huang, Jian Wang *et al.*. Experimental study of mode characteristics for equilateral triangle semiconductor microcavities[J]. *Chin. Opt. Lett.*, 2003, **1**(8): 472~474
- 7 Wen Li, Ruopeng Wang. Resonating properties of passive spherical optical microcavities [J]. *Chin. Opt. Lett.*, 2004, **2**(5): 271~274
- 8 Ruopeng Wang, Maria-Manuel Dumitrescu. Theory of optical modes in semiconductor microdisk lasers[J]. *J. Appl. Phys.*, 1997, **81**(8): 3391~3397
- 9 Bing-Jing Li, Pao-Lo Liu. Numerical analysis of microdisk lasers with rough boundaries[J]. *IEEE. J. Quant. Electron.*, 1997, **33**(5): 791~795
- 10 Claive Gmachl, Jerome Faist, Federico Capasso *et al.*. Long-wavelength microdisk quantum-cascade lasers [J]. *IEEE J. Quant. Electron.*, 1997, **33**(9): 1567~1573
- 11 S. Gianordoli, L. Hvozdar, G. Strasser *et al.*. GaAs/AlGaAs-based microcylinder lasers emitting at 10 μm [J]. *Appl. Phys. Lett.*, 1997, **75**(8): 1045~1047
- 12 M. Arzberger, G. Bohm, M.-C. Amann *et al.*. Continuous room-temperature operation of electrically pumped quantum-dot microcylinder lasers[J]. *Appl. Phys. Lett.*, 2001, **79**(12): 1766~1768
- 13 S. Anders, W. Schrenk, E. Gornik *et al.*. Room-temperature operation of electrically pumped quantum-cascade microcylinder lasers[J]. *Appl. Phys. Lett.*, 2002, **80**(22): 4094~4096
- 14 Claire Gmachl, Federico Capasso, E. E. Narimanov *et al.*. High-power directional emission from microlasers with chaotic resonators[J]. *Science*, 1998, **280**(5): 1556~1564
- 15 S. Gianordoli, L. Hvozdar, G. Strasser *et al.*. Long-wavelength ($\lambda = 10 \mu\text{m}$) quadrupolar-shaped GaAs-AlGaAs microlasers[J]. *IEEE J. Quant. Electron.*, 2000, **36**(4): 458~464
- 16 Lin Weigan, Fu guoxing, Wu Linruo *et al.*. *Theory of Electromagnetic Field* [M]. Beijing: People's Education Press, 1984. 354~355 (in Chinese)
林为干,符果行,邬琳若等. *电磁场理论*[M]. 北京:人民教育出版社, 1984. 354~355
- 17 H. Y. Yee, N. F. Audeh. Uniform waveguide with arbitrary cross-section considered by the point-matching method[J]. *IEEE Transaction On Microwave Theory and Technique*, 1965, **MTT-13**(6): 847~851