

文章编号: 0253-2239(2007)05-0853-6

光偏折层析的 Tikhonov 正则化重建技术

张 斌 宋 旻 贺安之

(南京理工大学信息物理与工程系, 南京 210094)

摘要: 从不适应问题的求解思想出发,建立了使用 Tikhonov 正则化方法计算流场参量分布的光偏折层析重建技术。理论上详细讨论了偏折信息的转化、投影方程组的正则化、以及由共轭梯度法实现求解等三个主要步骤。用数值模拟考察该方法对非对称温度分布的重建效果,分别计算了对应不同采样数的欠定与超定投影方程组。结果表明,10 次迭代后重建分布的平均误差和峰值误差分别为 2.1% 和 5.2%。使用正则化方法对采集的多方向叠栅偏折投影进行计算,重建出双峰温度场。结果表明,使用正则化方法的双峰值相对误差略高,迭代次数减少,可提高重建效率。

关键词: 信息光学; 流场重建; 偏折层析; 正则化

中图分类号: O438 文献标识码: A

Tikhonov Regularization Method for Deflectometric Tomographic Reconstruction

Zhang Bin Song Yang He Anzhi

(Department of Information Physics and Engineering, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094)

Abstract: The problems arising in the computed tomography area are well known for their high dimensions and ill-posed. Tikhonov regularization method is developed to reconstruct temperature distribution from deflectometric projection data. Beam deflection angles obtained from moiré deflectograms are integrated to optical path length differences, and a modified regularization method is applied to the linear projection equations. The conjugate gradient method is used to compute the regularized solution for the least-square equations. In numerical simulation, the approach produced reliable reconstructions by computing underdetermined equations and overdetermined equations respectively for asymmetrical distribution. The average errors were 2.1% and the maximum value errors were 5.2% after 10 iterations, which provided a good indication of the precision and convergence of the method. The experimental results of reconstruction from real projection data were satisfactory when compared with the reconstruction results by deflection angle revision reconstruction technique (DARRT) and the direct thermocouple measurements.

Key words: information optics; flow-field reconstruction; deflectometric tomography; regularization

1 引 言

光偏折层析技术具有动态范围大、抗干扰能力强、装置简单易调等优点,已经成为测量复杂流场的有力工具^[1]。在流场的光偏折显示技术和投影信息提取技术得到改进和完善后,发展快速而有效的重建方法成为光偏折层析技术实用化的关键。现有的偏折层析重建算法可以分为两类——变换类算法和级数展开类算法。逆阿贝尔(Abel)变换法^[2,3]较早

就在风洞复杂密度场的测量中得到了应用,但其只能测量轴对称流场;直接逆拉东(Radon)变换法^[4]和滤波反投影法^[5,6]在使用全场视角范围的大量等间隔采样数据进行重建时可以得到较好的效果,但这两种方法却很难处理非完全数据。相比之下,级数展开类算法^[7],尤其是代数重建技术^[8](ART)因其可以灵活地处理非完全采样而更具实用价值。近期发展起来的改进代数重建技术——偏折角修正重

作者简介: 张 斌(1978—),男,山东淄博人,博士研究生,主要从事复杂流场的光学层析方面的研究。

E-mail: zb-sh@163.com

导师简介: 贺安之(1938—),男,四川遂宁人,教授、博士生导师,主要从事复杂流场的测量和高速公路路面检测等方面的研究。E-mail: haz@mail.njust.edu.cn

收稿日期: 2006-06-21; 收到修改稿日期: 2006-07-21

建算法^[9~11] (DARRT) 由基本的偏折公式推导出, 结合降噪处理技术^[12], 已经在复杂密度场和温度场的测量中得到了应用。然而, 上述两种代数重建技术存在计算量大、费时的缺点, 要达到所需精度往往需要数十甚至数百次迭代, 影响了重建效率。

分析发现, 层析重建在绝大部分情况下都属于不适定的反问题, 这种不适应性主要表现在两个方面。一方面, 由于客观条件的限制, 反问题中的输入数据往往是欠定或过定的, 这就导致解的不唯一或不存在; 另一方面, 反问题的解对输入数据往往不具有连续依赖性。自 20 世纪 60 年代 Tikhonov 提出处理不适定问题的正则化方法以来, 该方法已经在数字图像重建^[13,14]、等离子体诊断^[15]、以及基于辐射能成像的高温诊断^[16,17]等领域得到了应用。本文在光偏折层析中使用正则化技术重建流场参量分布, 讨论偏折信息的转化、投影方程组的正则化、以及由共轭梯度法实现求解的整套方法, 并使用该方法对模拟数据和真实偏折数据进行了重建, 分析了重建误差。

2 原 理

2.1 偏折投影信息的转化

如图 1 所示, 设某截面的折射率 \hat{n} 为

$$\hat{n}(x, y) = n_0 + n(x, y), \quad (1)$$

式中 n_0 为环境折射率, n 为折射率。当平行于 x' 轴的人射光线经过流场时, 光线沿 y' 方向的偏折角 φ 为

$$\varphi(y', \theta) = \frac{1}{\hat{n}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial n(x', y')}{\partial y'} dx', \quad (2)$$

而该光线的光程差 Φ 的表达式为

$$\Phi(y', \theta) = \int_l n(x', y') dl = \int_{-\infty}^{+\infty} n(x', y') \delta[y' - r \sin(\psi - \theta)] dx', \quad (3)$$

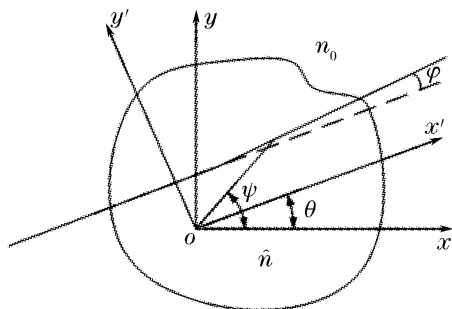


图 1 光线偏折与坐标系示意图

Fig. 1 Schematic diagram of the beam deflection and the coordinate system

式中 l 是光线经过被测场的光程。当光线小角度偏折时, 光线在被测区域可近似为直线传播,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y'} \int_l n(x', y') dl = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial n(x', y')}{\partial y'} dx' \approx n_0 \varphi(y', \theta), \quad (4)$$

因此由积分运算便可将偏折投影转化为光程差投影数据, 即

$$\Phi(x', y') = \int_{-\infty}^{+\infty} n_0 \varphi(x', y') dy'. \quad (5)$$

2.2 投影方程组的正则化

将重建区域划分为 $k = N \times N$ 个网格, 设共有 q 个投影方向, 每个方向的采样数为 r , 则总投影采样数为 $m = r \times q$ 。由 (5) 式可以将一阶偏微分偏折投影方程组转化为线性的光程差投影方程组

$$\mathbf{A}\mathbf{n} = \mathbf{p}, \quad (6)$$

式中, $\mathbf{n} \in \mathbf{R}^{k \times 1}$, $\mathbf{n} = [n_1, \dots, n_i, \dots, n_k]^T$ 为离散折射率, $\mathbf{R}^{k \times 1}$ 为 $k \times 1$ 维的实数域; $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^m$, $\mathbf{p} = [p_1, \dots, p_j, \dots, p_m]^T$ 为采样转化后的光程差; $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m \times n}$ 为系数矩阵, A_{ij} 为第 j 条光线与第 i 个网格的相交长度。

求解方程组 (6) 的正则化方法的基本思想是利用具体问题的某些附加信息对不适定问题解的概念重新定义, 进而引进稳定泛函来给出一个逼近原问题解的稳定方法。Tikhonov 将求解不适定问题转化为求 \mathbf{n}_α 使其极小化泛函^[13~17]

$$J_\alpha(\mathbf{n}) = \|\mathbf{A}\mathbf{n} - \mathbf{p}\|^2 + \alpha \|\mathbf{n}\|^2, \quad (7)$$

其中 α 为正则参量, 实际应用中正则解 \mathbf{n}_α 可以由标准方程组 (8) 得到

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \alpha \mathbf{D}^T \mathbf{D}) \mathbf{n}_\alpha = \mathbf{A}^T \mathbf{p}, \quad (8)$$

其中 $\mathbf{D} \in \mathbf{R}^{k \times k}$ 是根据具体应用而确定的正则化矩阵。在实施正则化方法的过程中, 确定合适的正则参量 α 是核心问题, 使用 James Paul Holloway 等^[15] 推导得出的 α 近似解公式

$$\alpha \approx \frac{2 \|\mathbf{p} - \mathbf{A}\mathbf{n}(0)\|^2}{\|\mathbf{D}\mathbf{n}(0)\|^2}, \quad (9)$$

式中, $\mathbf{n}(0)$ 为方程组 (6) 的最小二乘解:

$$\mathbf{n}(0) = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{p}, \quad (10)$$

对于离散折射率场的重建, 正则化矩阵可以由 (11) 式并结合图 2 所示的网格关系求得:

$$D_{0s} = n_0 - \frac{1}{8} (n_1 + n_2 + \dots + n_8), \quad (11)$$

$$s = 1, 2, \dots, k$$

式中 D_{0s} 为 n_0 对应的行元素。图 2(a) 表示四个角上

的网格与其相邻网格,图 2(b)表示四条棱上的网格[除去满足图 2(a)的网格]与其相邻网格,图 2(c)表示其余的内部网格与其相邻网格。将与 n_0 对应的 D_0 按照三种网格关系计算后,得到 $k \times k$ 维的正则化矩阵。

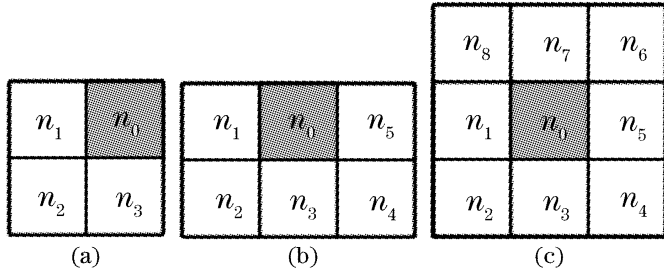


图 2 构造正则化矩阵的三种单元格与其相邻网格的关系。(a) 单元格位于 4 个角上, (b) 单元格位于 4 条棱上, (c) 其余的内部网格

Fig. 2 Three kinds of elements having different relationships with their neighbor elements. (a) Elements in the crank points, (b) elements along the edge, (c) all the rest of the elements

2.3 共轭梯度法求解正则化矩阵

对于大型线性矛盾方程组,一般不宜用直接法求其最小二乘解,而多采用迭代法。共轭梯度(CG)法是比较受推崇的一种有效迭代方法,用改进的共轭梯度法计算方程组(8)的步骤如下。

给定初始向量 $n^{(0)}$, 令 $P^{(1)} = Q^{(0)} = E - Fn$, 其中 $E = A^T p$, $F = A^T A + \alpha D^T D$ 。对 $u = 1, 2, \dots$, 可顺次得出

$$\begin{cases} \beta_u = [Q^{(u-1)}, Q^{(u-1)}] / [P^{(u)}, FP^{(u)}], \\ n^{(u)} = n^{(u-1)} + \beta_u P^{(u)}, \\ Q^{(u)} = Q^{(u-1)} - \beta_u FP^{(u)}, \\ \chi_{u+1} = [Q^{(u)}, Q^{(u)}] / [Q^{(u-1)}, Q^{(u-1)}], \\ P^{(u+1)} = Q^{(u)} + \chi_{u+1} P^{(u)}, \end{cases} \quad (12)$$

计算时可以根据先验知识在迭代过程中结合限制条件,以加快收敛速度并提高重建精度。

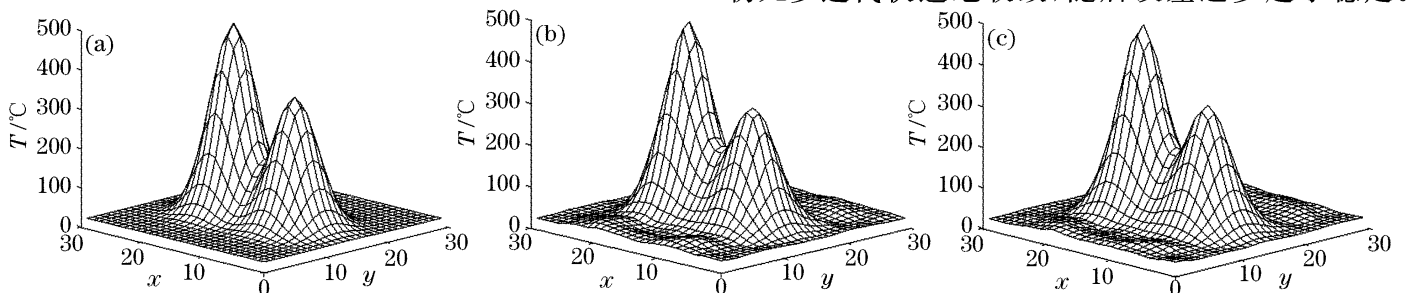


图 3 模拟实验与结果。(a) 原场, (b) 由欠定方程组得到的重建分布, (c) 由超定方程组得到的重建分布

Fig. 3 Numerical simulation for reconstruction. (a) Exact field, (b) the reconstruction distribution by computing underdetermined equations, (c) the reconstruction distribution by computing overdetermined equations

3 实验与结果

3.1 实验

模拟重建采用的是满足高斯分布的双峰温度场,如图 3(a),在 30×30 网格的重建区域,温度分布函数为

$$t(x, y) = 480 \exp\left[-\frac{(x-15)^2 + (y-10)^2}{15}\right] + 330 \exp\left[-\frac{(x-15)^2 + (y-20)^2}{15}\right]. \quad (13)$$

模拟该温度场环境温度为 20°C , 因此双峰温度值实际分别为 500°C 和 350°C 。为了描述重建分布和真实分布的差异,我们选用平均误差 E_a 和峰值误差 E_m 这两个评价参量,它们的定义分别为(14)式和(15)式:

$$E_a = \frac{\sum |t_e(x_i, y_i) - t_r(x_i, y_i)|}{k \cdot \max\{t_e(x_i, y_i)\}}, \quad (14)$$

$$E_m = \frac{|\max\{t_e(x_i, y_i)\} - \max\{t_r(x_i, y_i)\}|}{\max\{t_e(x_i, y_i)\}}, \quad (15)$$

式中 t_e 和 t_r 分别为原场温度分布和重建温度分布。计算时采用 $20^\circ \sim 160^\circ$ 范围内 20° 等间隔的 8 个投影,每个投影方向采样数为 100 时,得到欠定方程组;每个投影方向采样数为 125 时,得到超定方程组。分别将这两个方程组正则化,取初值 $n^{(0)} = 10^{-5}$, 迭代过程中结合 $t_r(x_i, y_i) \geq 20^\circ\text{C}$ 的限制条件,迭代 10 次后得到折射率分布,由格拉斯顿-戴尔(Gladstone-Dale)公式进而算出温度分布以及重建误差。

从图 3 和图(4)中的重建结果可以看出,由欠定和超定方程组均可计算得到双峰结构,双峰比例也与原场基本相符。在迭代过程中没有进行任何滤波处理的情况下,整个网格表面没有出现尖锐的毛刺。尽管图 3(b)、图 3(c)在原场环境温度对应的平坦区域出现了小幅的起伏,但重建的双峰网格表面已经非常平滑。图 4 给出了定量的误差分析,重建在最初几步迭代快速地收敛,随后误差逐步趋于稳定。

迭代 10 次后由欠定方程组得到的 E_a 和 E_m 分别为 2.1 % 和 5.2 %，由超定方程组得到的 E_a 和 E_m 分

别为 1.9 % 和 4.9 %。可见，使用正则化技术已经较好地重建出流场分布。

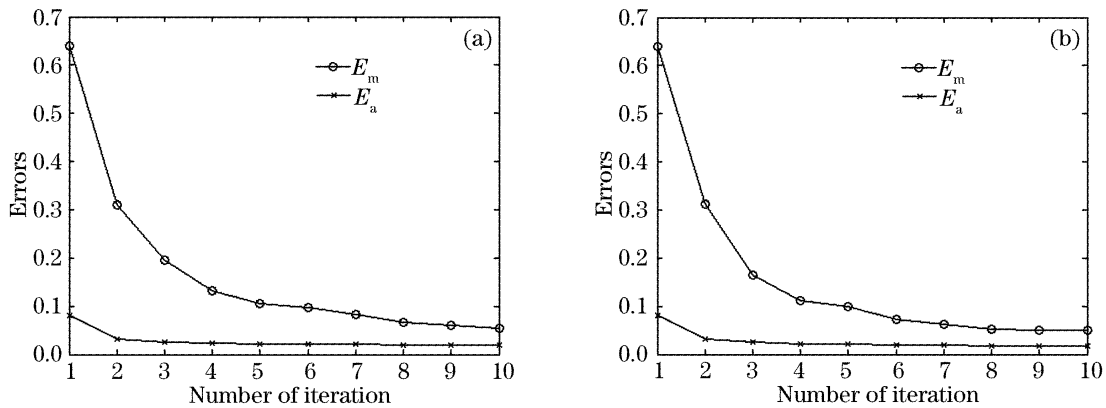


图 4 重建误差曲线。(a) 计算欠定方程组的误差曲线，(b) 计算超定方程组的误差曲线

Fig. 4 Error curves. (a) Error curves of computing underdetermined equations, (b) error curves of computing overdetermined equations

3.2 真实温度场的对比重建

对采集的叠栅偏折图^[9]进行重建，实验装置如图 5 所示，连接可控电压的两只电烙铁置于中心被测区域 O ，其余元件全部固定于大理石基座上，并可绕 O 做 180° 旋转。在基座下安装有精度为 1° 的角度传感器，基座转动过程中可以把所处视角显示在成像屏上。为保证被测场均匀并不受扰动，使用留有光线通路的矩形玻璃罩将被测场罩住，该玻璃罩置于基座上，可保持与光学元件同步旋转。将电烙铁加热一段时间，待温度场趋于稳定，匀速转动基座，便可采集到全视场范围的叠栅偏折图，图 6 给出了部分视角 θ 的叠栅条纹图(条纹上方显示的是投影所处的视角)。选取距离烙铁上方 8 mm 处为重建面，使用傅里叶变换相位展开法从条纹图提取偏折角。采用正则化方法重建温度场，划分 30×30 网

格，环境温度 20°C ，使用从 $20^\circ \sim 160^\circ$ 范围内间隔为 20° 的 8 个投影方向数据参与重建，每个投影方向的采样数为 150，折射率初值为 10^{-5} ，迭代 10 次后的重建结果如图 7 所示。

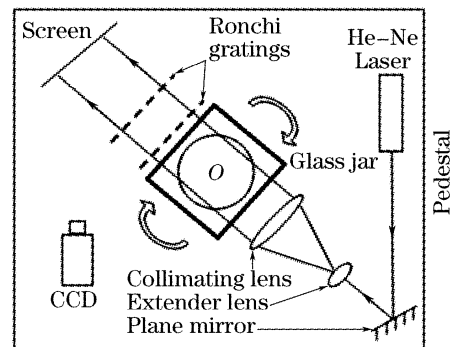


图 5 旋转叠栅偏折系统示意图

Fig. 5 Schematic diagram of rotatable moiré deflectometric system

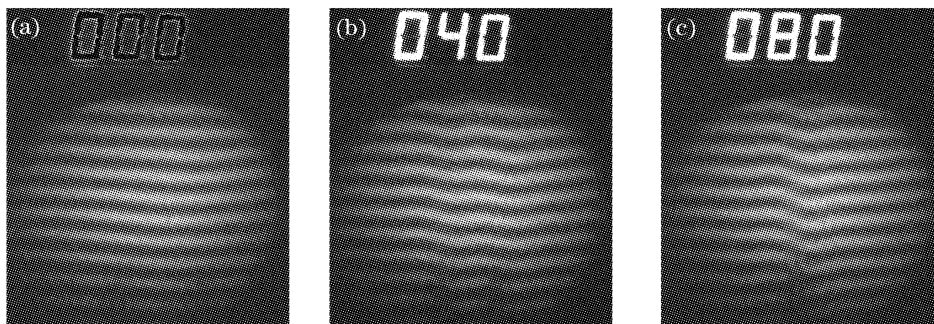


图 6 温度场的叠栅条纹图。(a) 加热前，(b) 加热后， $\theta=40^\circ$ ，(c) 加热后， $\theta=80^\circ$

Fig. 6 Moiré deflectograms of temperature field. (a) Before heating, (b) $\theta=40^\circ$, after heating, (c) $\theta=80^\circ$ after heating

图 7 的双峰结构与使用偏折角修正重建技术得到的结果相似，但它的网格表面相对更为光滑。考察双峰点 P_1 、 P_2 以及双峰中间点 P_3 ，将使用正则化方法、偏折角修正重建技术与热电偶直接测量的温度值进行比较。表 1 反映了两种计算方法的迭代次数、重

建的三点温度值以及与热电偶测量值比较的相对误差 E_r 。可知，两种重建方法对温度分布的三个关键点重建相对误差都已经低于 5%，尽管使用正则化方法的双峰值相对误差略高，但它的迭代次数大为减少，有效地提高了重建效率。

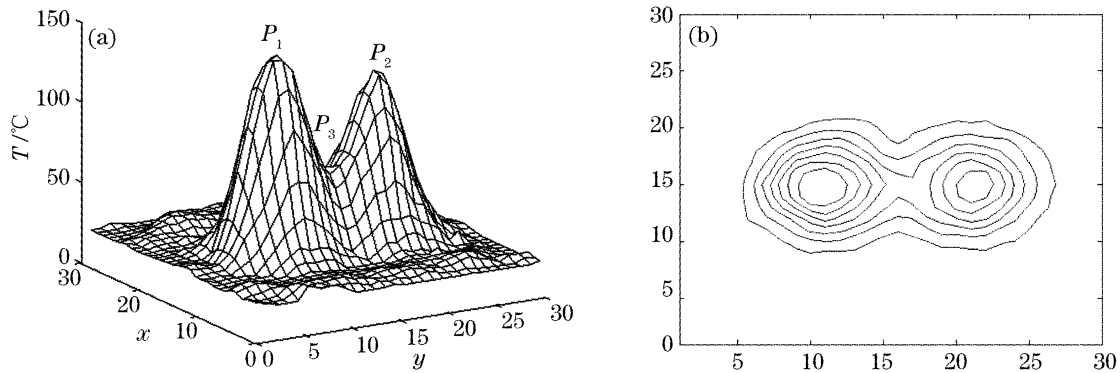


图 7 重建的温度分布。(a) 截面温度分布, (b) 等温线图

Fig. 7 Reconstructed temperature distribution at a designated section. (a) Three-dimensional asymmetric temperature field, (b) temperature contour map

表 1 使用不同方法得到的双峰及双峰中间点温度值与重建误差对比

Table 1 Comparison of temperature values and reconstruction errors at three critical points by different measurement and reconstruction methods

	Number of iterations	P ₁		P ₂		P ₃	
		$t / ^\circ\text{C}$	$E_r / \%$	$t / ^\circ\text{C}$	$E_r / \%$	$t / ^\circ\text{C}$	$E_r / \%$
Thermocouple		153		126		69	
DARRT	100	148	3.3	124	1.6	67	2.9
Regularization	10	146	4.6	129	2.4	67	2.9

DARRT: Deflection angle revision reconstruction technique

4 讨论与总结

绝大部分的层析问题都是不适定的,因此使用求解不适定问题的正则化方法重建流场分布具有更直观的数学物理意义。模拟实验证明,根据流场模型特征将投影方程组正则化后,使用共轭梯度法只需很少的迭代次数就能将重建分布收敛到较高的精度。正则化方法也有缺点,实际层析重建中通常是带噪声的观测数据,数据的微小扰动对计算结果的影响很大。真实温度场实验中,尽管在使用傅里叶变换相位展开技术提取偏折投影数据时自然进行了滤波操作,噪声还是给重建结果造成了较大的误差。因此,进一步提高正则化层析重建精度和收敛速度还需要结合许多改良和辅助技术。正则参量在正则化方法中发挥着关键作用,关于它的最优选择,始终是一个重要而具有魅力的课题;当 Tikhonov 正则化方法不能达到最优收敛阶时,迭代的 Tikhonov 正则化形式可以使之得到提高;当投影方程组系数矩阵的条件数很大时,使用预条件共轭梯度(PCG)法的收敛性更好;而面对带有粗差的测量数据,则需要结合基于统计分布的抗差最小二乘技术。

参 考 文 献

- O. Kafri, I. Glatt. Moire deflectometry; a ray deflection approach to optical testing[J]. *Opt. Engng.*, 1985, **24**(6): 944~960
- J. Stricker, E. Keren, O. Kafri. Axisymmetric density field measurements by Moire deflectometry[J]. *AIAA*, 1983, **21**(12): 1767~1769
- J. Stricker, O. Kafri. A new method for density gradient measurements in compressible flows[J]. *AIAA*, 1982, **20**(6): 820~823
- J. Stricker. Analysis of 3-D phase objects by Moire deflectometry [J]. *Appl. Opt.*, 1984, **23**(20): 3657~3659
- Ming Wang, Li Ma. Dacheng Li *et al.*. Subfringe integration method for automatic analysis of Moire deflection tomography [J]. *Opt. Engng.*, 2000, **39**(10): 2726~2733
- Gregory W. Faris, Robert L. Byer. Three-dimensional beam-deflection optical tomography of a supersonic jet [J]. *Appl. Opt.*, 1988, **27**(24): 5202~5212
- Gao Yiqing, Gong Yongqing. Diagnostics of 3-D are temperature fields by moire CT technique[J]. *Acta Optica Sinica*, 1998, **18**(3): 376~380 (in Chinese)
高益庆, 龚勇清. 用莫尔计算机层析技术诊断三维电弧温度场 [J]. *光学学报*, 1998, **18**(3): 376~380
- Dapeng Yan, Anzhi He, Xiaowu Ni. New method of asymmetric flow field measurement in hypersonic shock tunnel [J]. *Appl. Opt.*, 1991, **30**(7): 770~774
- Zhang Bin, Song Yang, Song Yizhong *et al.*. Flow field moire tomography based on phase unwrapping and a new iterative reconstruction algorithm [J]. *Chin. J. Lasers*, 2006, **33**(4): 531~536 (in Chinese)

- 张 斌, 宋 旸, 宋一中等. 基于相位展开和一种新的迭代重建算法的流场莫尔层析术[J]. 中国激光, 2006, **33**(4): 531~536
- 10 Song Yang, Zhang Bin, He Anzhi. A novel iterative algorithm for moire tomography[J]. *Acta Optica Sinica*, 2006, **26**(3): 367~372 (in Chinese)
- 宋 旸, 张 斌, 贺安之. 一种新的叠栅层析迭代算法[J]. 光学学报, 2006, **26**(3): 367~372
- 11 Zhang Bin, Song Yang, Song Yizhong *et al.*. Measurements of asymmetric complex density distribution in supersonic wind tunnel by Moire tomography[J]. *Acta Optica Sinica*, 2006, **26**(10): 1501~1505 (in Chinese)
- 张 斌, 宋 旸, 宋一中等. 使用叠栅层析技术测量超音速风洞中的非对称复杂密度场[J]. 光学学报, 2006, **26**(10): 1501~1505
- 12 Zhang Bin, He Anzhi, Song Yang. Two-stage denoise technique for deflectometric tomographic reconstruction of flow field[J]. *Chin. J. Lasers*, 2006, **33**(12): 1665~1670 (in Chinese)
- 张 斌, 贺安之, 宋 旸. 光偏折层析重建流场中的两阶段降噪技术研究[J]. 中国激光, 2006, **33**(12): 1665~1670
- 13 D. Calvetti, L. Reichel, F. Sgallari *et al.*. A regularizing Lanczos iteration method for underdetermined linear systems[J]. *J. Comput. Appl. Math.*, 2000, **115**: 101~120
- 14 Elena Loli. Piccolomini, Fabiana Zama. The conjugate gradient regularization method in computed tomography problems[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 1999, **102**: 87~99
- 15 James Paul Holloway, Steve Shannon, Scott M. Sepke *et al.*. A reconstruction algorithm for a spatially resolved plasma optical emission spectroscopy sensor[J]. *J. QS RT*, 2001, **68**: 101~115
- 16 Huaichun Zhou, Chun Lou, Qiang Cheng *et al.*. Experimental investigations on visualization of three-dimensional temperature distributions in a large-scale pulverized-coal-fired boiler furnace [C]. *Proc. Combustion Institute*, 2005, **30**: 1699~1706
- 17 Huaichun Zhou, Shudong Han, Feng Sheng *et al.*. Visualization of three-dimensional temperature distributions in a large-scale furnace via regularized reconstruction from radiative energy images: numerical studies[J]. *J. QS & RT*, 2002, **72**: 361~383