

文章编号: 0253-2239(2007)04-0647-7

小波变换轮廓术的测量范围研究*

孙 娟 陈文静 苏显渝 边心田

(四川大学电子信息学院, 成都 610064)

摘要: 利用小波“脊”处的小波系数来提取变形条纹中的相位信息可以在很大程度上抑制条纹图中有用的基频分量与零频和其它谐波频率分量的混叠, 弥补了傅里叶变换轮廓术的不足。从离散信号频域分析角度, 推导了变形条纹小波变换的频谱描述形式, 讨论了其测量范围, 包括结构条件和抽样条件。结果表明, 只有在无周期内瞬时频谱混叠, 即任意位置处物体瞬时高度变化满足 $|\partial h/\partial x|_{x=b} < 1/3$ 条件时, 和不存在抽样引起的周期间瞬时频谱混叠的抽样条件下(即一个周期内的抽样点数 $m \geq 4$ 时), 小波变换轮廓术才能正确恢复被测物体的三维面型。计算机模拟和实验验证了该结论。

关键词: 光学测量; 三维面形; 小波变换轮廓术; 小波脊; 条纹分析

中图分类号: TN247 文献标识码: A

Study the Measurement Range of Wavelet Transform Profilometry

Sun Juan Chen Wenjing Su Xianyu Bian Xintian

(School of Electronics & Information Engineering, Sichuan University, Chengdou 610064)

Abstract: By the wavelet transform profilometry, the height distribution of an object can be obtained by calculating the wavelet coefficient of the deformed fringe pattern at the “ridge” position even there are some frequency overlaps between the fundamental frequency and the higher-order spectra. It provides a way to overcome the shortcoming of Fourier transform profilometry. But by now the discussion of the measurement range of wavelet transform profilometry has not been done yet. The frequency-domain description of wavelet coefficient is deduced from the point of view of the frequency analysis. And the measurement range of the wavelet transform profilometry is discussed, including the structure condition of the measurement system and the sampling condition introduced by digitizing the deformed fringe. A conclusion has been made that as long as there aren't any instantaneous frequency overlapping, both within a frequency island and between the adjacent periods, the correct reconstruction can be obtained by wavelet transform profilometry. In another word, under conditions that the instantaneous height variation of the test object in the fringe pattern at any position satisfies $|\partial h/\partial x|_{x=b} < 1/3$ and the number m of sampling points in one period must be greater or equal to 3, the correct phase included in the deformed fringe pattern can be retrieved by this method.

Key words: optical measurement; three-dimensional shape; wavelet transform profilometry; wavelet ridge; fringe analysis

1 引 言

基于结构光投影的主动三维传感在工业检测、实物仿形、生物医学、服装制鞋等领域具有广泛的应用前景, 常用的方法有傅里叶变换轮廓术^[1]和相位测量轮廓术^[2]等。其中傅里叶变换轮廓术是一种高精度、快速的光学三维面形测量方法, 由于只需要获取一帧

变形条纹图就能获取被测物体的三维面形信息, 因此适合于实时、动态过程测量, 目前受到人们广泛关注并应用在光学条纹分析中^[3~6]。相移测量轮廓术虽然在存在频谱混叠的情况下, 也可以获得正确的相位, 不过需要获取多帧有一定相位差的条纹图, 不适合于动态测量。因为傅里叶变换缺乏获取局域信息

* 国家自然科学基金(60677028)资助课题。

作者简介: 孙 娟(1982—), 女, 陕西咸阳人, 硕士研究生, 主要从事三维面形测量的研究。E-mail: sunjuan0904@126.com

导师简介: 陈文静(1968—), 女, 四川内江人, 教授, 硕士生导师, 主要从事光信息处理、三维测量方面的研究。

E-mail: chenwj0409@163.com

收稿日期: 2006-06-27; 收到修改稿日期: 2006-09-13

的能力,当条纹图中有用的频谱分量和其他无用信息之间存在混叠时,无法从有混叠的条纹中提取出正确的相位信息,因此引入了窗口傅里叶轮廓术^[7,8],但固定的窗口大小,不能最优化地解决频谱混叠问题。由于小波变换更具良好的时-频局域分析特性,在处理非平稳信号方面具有先天优势,近年来被广泛应用于信号分析中。一种基于小波脊^[9~12]处理的小波变换轮廓术也在三维面形测量中也受到广泛关注,它适合于复杂过程的实时、动态测量。

本文选取在空域和频域都具有很好的局部化性能的 Morlet 复小波函数作为母小波对变形条纹图进行处理,提取包含在条纹中的相位信息。由于计算机处理的是离散信息,抽样对小波变换轮廓术的影响不能忽视,从频域分析角度研究了小波变换轮廓术的测量范围,分析出基于小波脊处理的轮廓术的测量范围,包括避免周期内频谱混叠的系统结构条件和避免抽样引起的周期内频谱混叠的抽样条件。

2 基本原理及测量范围

2.1 基本原理

小波变换轮廓术与傅里叶变换轮廓术的测量光路^[1]完全相同,见图 1。成像装置获得的变形结构光场表示为

$$g(x, y) = r(x, y) \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \times \exp\{j[2\pi n f_0 x + n\phi(x, y)]\}, \quad (1)$$

式中 f_0 为光栅像的基频, $r(x, y)$ 为物体表面非均匀反射率, n 为谐波级次, A_n 指 n 次谐波的幅值, $\phi(x, y)$ 为物体高度分布 $h(x, y)$ 引起的相位调制。对 $g(x, y)$ 沿条纹结构方向作一维小波变换, 设 $g(x, y)$ 在此方向上的一维分布表示为 $f(x)$, 其连续小波变换系数定义为

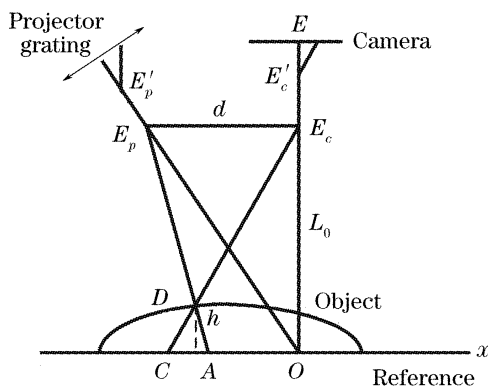


图 1 测量系统光路图

Fig. 1 Experimental setup

$$W_f(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_r f(x) \bar{\Psi}\left(\frac{t-b}{a}\right) dt = \frac{1}{\sqrt{a}} \langle f(x), \bar{\Psi}_{a,b}(x) \rangle, \quad (2)$$

其中 $\bar{\Psi}(t)$ 为母小波的复共轭, a 为小波函数的尺度伸缩因子, b 为位移因子。(2) 式表明小波变换的实质是描述信号与小波序列函数的相似程度, 当函数的局部频率与相应尺度的小波函数振荡频率相同或者相近时, 对应的小波变换系数的幅值相应较大。若 $W_f(a, b)$ 的实部和虚部分别记为 $\text{Re}[W_f(a, b)]$ 和 $\text{Im}[W_f(a, b)]$, 则幅值 $A(a, b)$ 和相位 $\phi(a, b)$ 可分别表示为

$$A(a, b) = \sqrt{\{\text{Im}[W_f(a, b)]\}^2 + \{\text{Re}[W_f(a, b)]\}^2}, \quad (3)$$

$$\phi(a, b) = \arctan\{\text{Im}[W_f(a, b)]/\text{Re}[W_f(a, b)]\}, \quad (4)$$

沿尺度轴方向上, 不同位置小波变换幅值的最大值位置的连线定义为小波变换的“脊”, “脊”所对应的 a 就是最佳尺度, 记做 a_b 。提取脊所对应的相位值, 得到含有物体高度信息的调制相位, 表示为

$$\phi(b) = \phi(a_b, b), \quad (5)$$

在远心投影光路条件下, 考虑到实际测量中 $L_0 \gg h(x, y)$, 被测物体的高度分布与相位的关系为

$$\phi(x, y) = \Delta\phi(x, y) = -2\pi f_0 dh(x, y)/L_0, \quad (6)$$

L_0, d 都为结构参量。

2.2 测量范围的讨论

由于计算机处理的是离散信号, 信号 $f(x)$ 抽样后的频谱分布可以表示为

$$\mathcal{F}\left\{f(x) \text{comb}\left(\frac{x}{\Delta x}\right)\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\omega - \frac{n_1}{\Delta x}\right), \quad (7)$$

式中 n_1 为频谱“岛”的重复次数, Δx 为抽样间隔, $1/\Delta x$ 为频域中相邻频谱“岛”之间的间隔, $\Delta x = mf_0$, m 为一个周期内的抽样点数。抽样信号的小波变换可以表示为

$$W_{fs}(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int f(x) \text{comb}\left(\frac{x}{\Delta x}\right) \bar{\Psi}\left(\frac{x-b}{a}\right) dx, \quad (8)$$

由于 $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(j\omega x) d\omega$,

$$W_{fs}(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \iint \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\omega - \frac{n_1}{\Delta x}\right) \times \exp(j\omega x) \bar{\Psi}\left(\frac{x-b}{a}\right) d\omega dx, \quad (9)$$

令 $x' = (x-b)/a$, 设“脊”对应的伸缩因子为 a_b , 则

“脊”处小波系数表示为

$$W_{f_s}(a_{rb}, b) = \sqrt{a_{rb}} \iint \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\omega - \frac{n_1}{\Delta x}\right) \bar{\Psi}(x') \exp[j\omega(a_{rb}x' + b)] d\omega dx',$$

为了使表达式合乎表述习惯, 用 x 代替 x' (实质上此处 x 同 x' 的含义一样), 则

$$W_{f_s}(a_{rb}, b) = \sqrt{a_{rb}} \iint \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\omega - \frac{n_1}{\Delta x}\right) \bar{\Psi}(x) \exp(j\omega a_{rb}x) \exp(j\omega b) d\omega dx = \sqrt{a_{rb}} \int \exp(j\omega b) d\omega \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\omega - \frac{n_1}{\Delta x}\right) \int \bar{\Psi}(x) \exp(j\omega a_{rb}x) dx, \quad (10)$$

(10) 式中, 设 $\int \bar{\Psi}(x) \exp(j\omega a_{rb}x) dx = \hat{\Psi}(a_{rb}\omega)$, $\hat{\Psi}(a_{rb}\omega)$ 为尺度 a_{rb} 对应的小波共轭函数的频谱。即抽样信号的小波系数表达为

$$W_{f_s}(a_{rb}, b) = \sqrt{a_{rb}} \int \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\omega - \frac{n_1}{\Delta x}\right) \hat{\Psi}(a_{rb}\omega) \exp(j\omega b) d\omega, \quad (11)$$

由(11)式可知, 不同位置 b 处的小波系数与信号的局部频谱和小波函数的频谱有关, 如果信号在 b 处出现局部频谱混叠, 则小波系数存在误差, 利用小波脊提取出来的相位也存在误差。为了获得准确的小波脊信息, 需要讨论小波变换的测量范围。

2.2.1 防止周期内局部频谱混叠的条件

利用瞬时频率的定义^[1], 位置 b 处信号的瞬时频谱可以表示为: $nf_0 + \frac{n}{2\pi} \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x=b}$, n 为谐波的级次。如果在位置 b 处信号的局部频谱发生了混叠, 则小波系数中会包含误差, 影响面形恢复。由于二次谐波对基频的影响最大, 因此保证小波系数正确的条件为

$$f_0 + \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x=b} \right) < 2f_0 - \frac{2}{2\pi} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x=b} \right), \quad (12)$$

(12) 式的左边表示 b 处的瞬时基频, 右边表示同一位置处的瞬时二次频谱, 因此可得

$$\left| \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x=b} < \frac{2\pi f_0}{3}. \quad (13)$$

2.2.2 防止抽样引起的局部频谱混叠条件

由于离散信号的频谱为周期重复的频谱岛, 如果局部频谱中混入了来自相邻周期的信号, 同样无法得到正确的小波系数。为了防止这种频谱混叠, 需要满足条件:

$$f_0 + \frac{1}{2\pi} \left| \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x=b} < mf_0 - \left(2f_0 - \frac{2}{2\pi} \left| \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x=b} \right. \right), \quad (14)$$

$$\text{即} \quad \left| \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x=b} < \frac{2\pi}{3} (m-3) f_0, \quad (15)$$

由于在周期内局部频谱不混叠的基础上, 讨论周期间局部频谱的混叠问题才有意义, 结合(13)式和(15)式得

$$\frac{2\pi}{3} (m-3) f_0 > \frac{2\pi}{3} f_0, \quad (16)$$

即 $m \geq 4$ 。

3 模拟及实验

本节采用计算机模拟来验证理论分析的正确性。模拟的被测物体由 peaks 函数表示(高度可调以满足不同的模拟要求)。当 $h = \text{peaks}$ 时, 其最大高度为 8.10 mm, 图像尺寸为 128 pixel \times 128 pixel, 如图 2 所示, 模拟系统结构参量为 $L_0/d = 1$ 。分别验证一个周期内基频与二次频混叠对测量范围的影响以及周期间因抽样引起的频谱混叠对测量范围的影响。对于周期内的频谱混叠, 只需要找到变形条纹的最密处(通过计算机编程选取), 计算该处的傅里叶频谱, 再判断该局部谱的零频和高次频是否存在混叠; 而对于周期间的频谱混叠, 无法直接判断: 因为所分析的对象是瞬时变化的, 只能通过理论分析得出满足奈奎斯特抽样条件的瞬时谱的频谱范围, 再作相应分析判断局部频谱是否存在混叠。

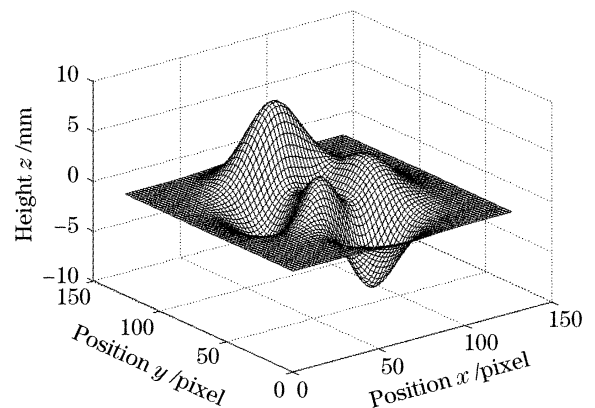


图 2 模拟的物体

Fig. 2 Simulated object

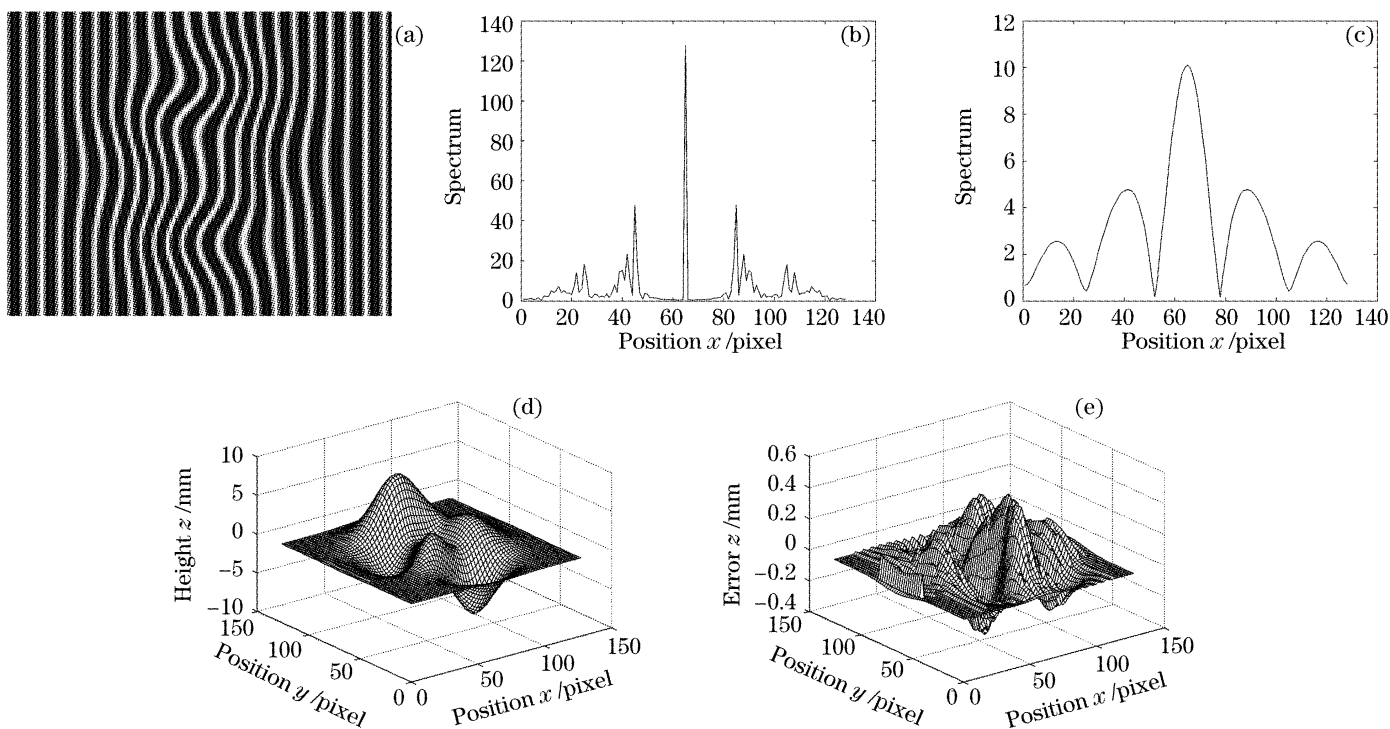


图 3 在 $m=6$ 时模拟高度函数为 peaks 的物体。(a) 变形条纹, (b) 第 86 行的条纹全局频谱, (c) 第 86 行中(45 到 55 列) 对应的局部频谱, (d) 恢复出来的物体, (e) 误差分布

Fig. 3 Computer simulation when the object function is selected as “peaks” and $m=6$. (a) Deformed fringe pattern, (b) spectrum of the 86th row, (c) local spectrum from 45th to 55th column of the 86th row fringe, (d) restored function, (e) error distribution

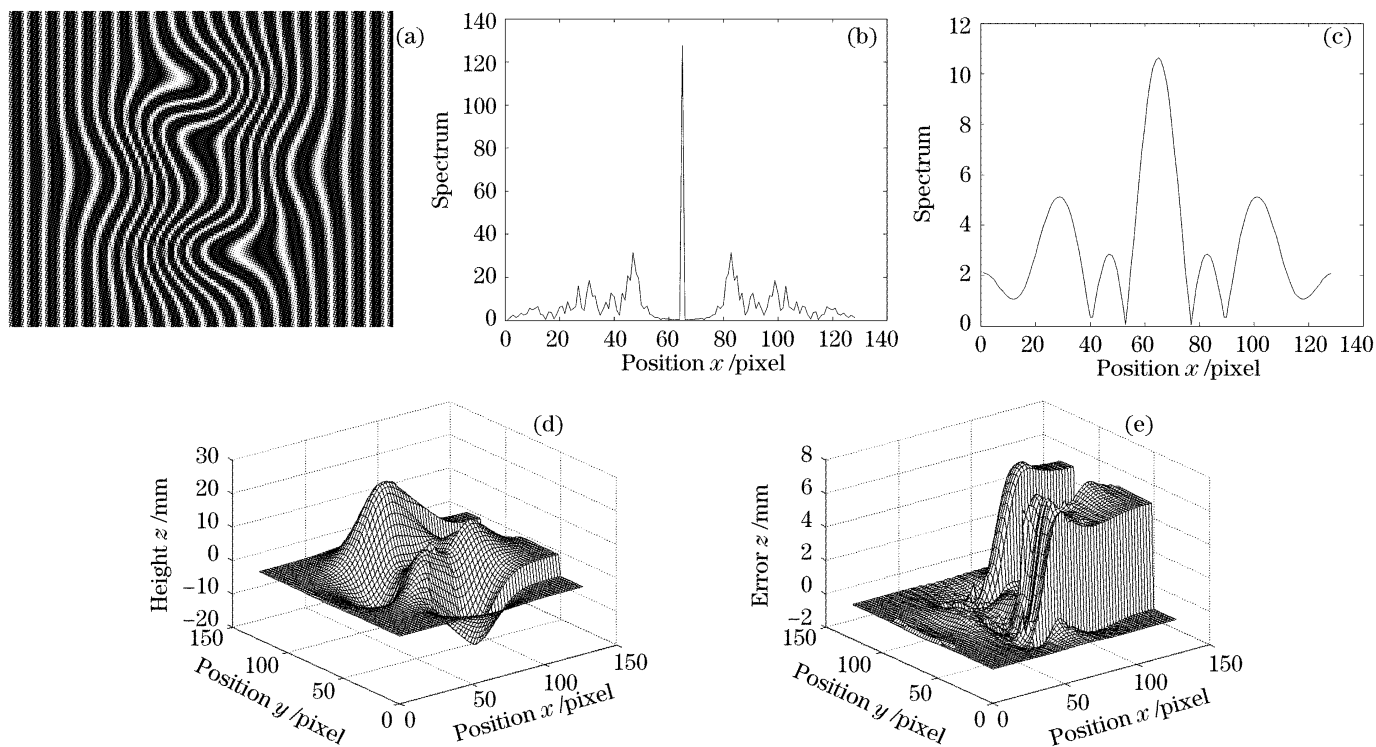


图 4 在 $m=6$ 时模拟高度函数为 3 peaks 的物体。(a) 变形条纹, (b) 第 86 行的条纹全局频谱, (c) 第 86 行中 (45 到 55 列) 对应的局部频谱, (d) 恢复出来的物体, (e) 误差分布

Fig. 4 Computer simulation when the object function is selected as “3 peaks” and $m=6$. (a) Deformed fringe pattern, (b) spectrum of the 86th row fringe, (c) local spectrum from 45th to 55th column of the 86th row fringe, (d) restored function, (e) Error distributing

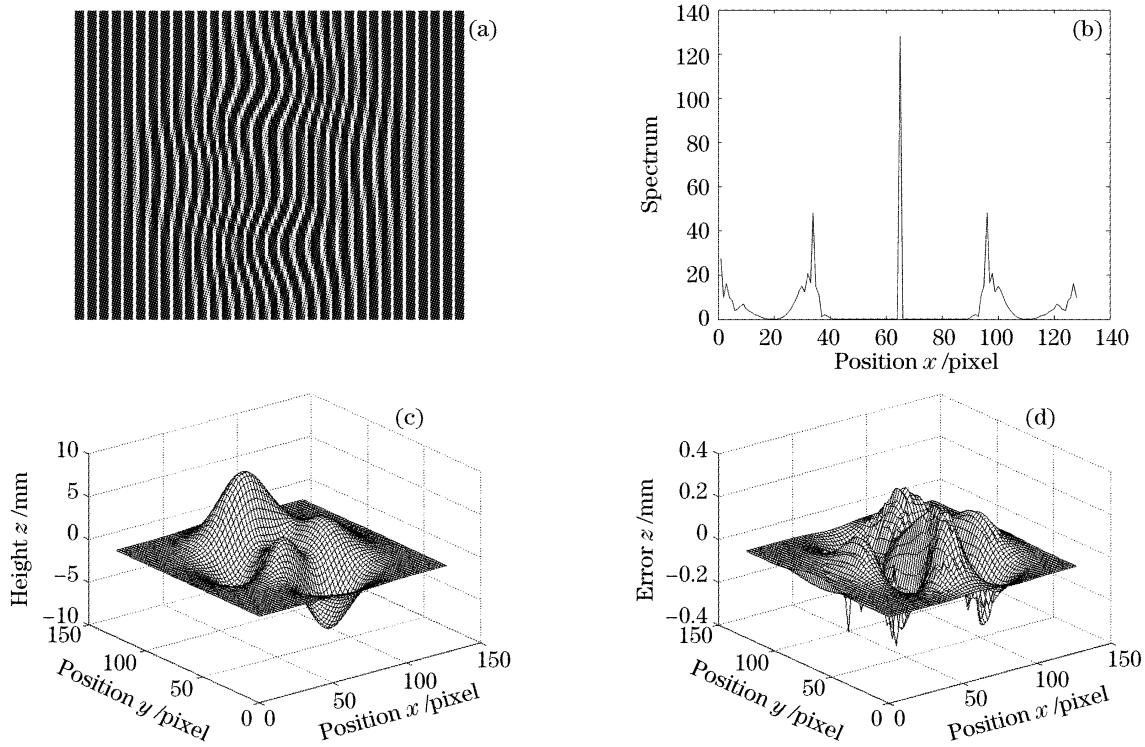


图 5 在 $m=4$ 时模拟高度函数为 peaks 的物体。(a) 变形条纹, (b) 第 86 行的条纹全局频谱, (c) 恢复出来的物体, (d) 误差分布

Fig. 5 Computer simulation when the object function is selected as “peaks” and $m=4$. (a) Deformed fringe pattern, (b) spectrum of the 86th row fringe, (c) restored function, (d) error distributing

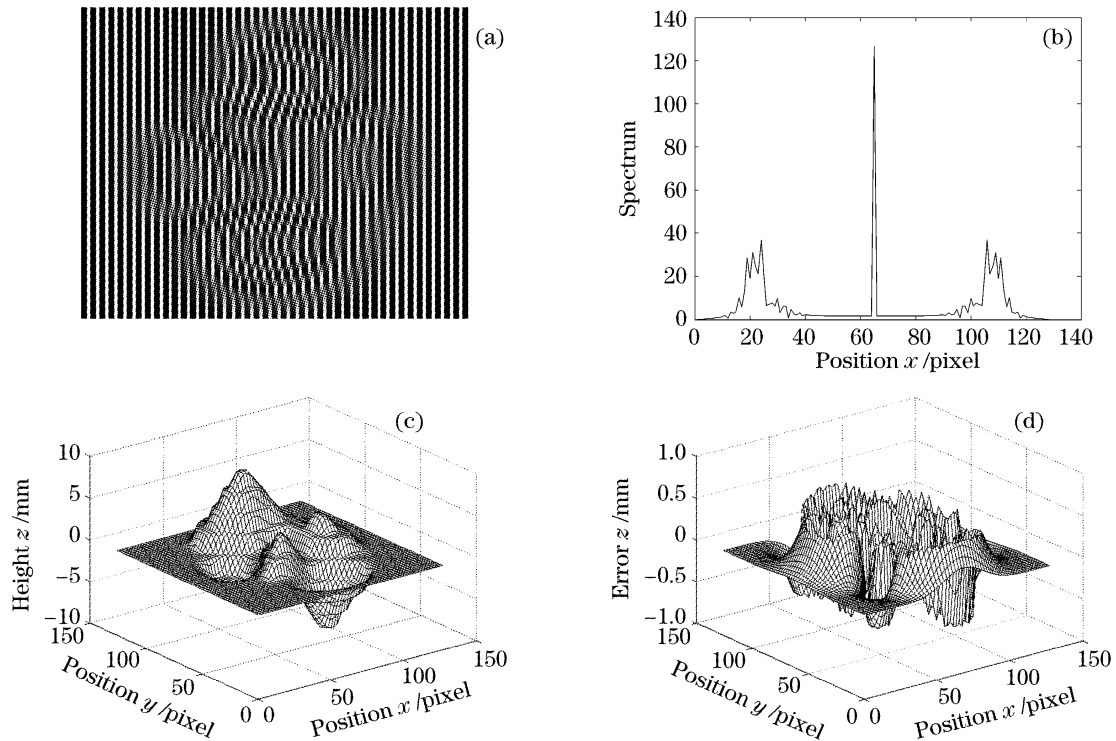


图 6 在 $m=3$ 时模拟高度函数为 peaks 的物体。(a) 变形条纹, (b) x 方向上的全局频谱, (c) 恢复出来的物体高度, (d) 误差分布

Fig. 6 Computer simulation when the object function is selected as “peaks” and $m=3$. (a) Deformed fringe pattern, (b) whole field spectrum of x -axes, (c) restored function, (d) error distribution

先考虑满足抽样条件,但存在周期内频谱混叠情况。选择 $m=6$, 投影的条纹包含二次谐波频率。根据(12)式,再利用(6)式所示的相位与高度的对应

关系,得出当 $|\partial h/\partial x|_{x=b} < 1/3$ 时,可以保证局部频率不混叠。当 $h = \text{peaks}$ 时,图 3(a) 表示变形光栅图,图 3(b) 显示变形条纹第 86 行的全局频谱,可以

看出存在较严重的混叠,图 3(c)表示第 86 行中(第 45 到 55 列)对应的局部频谱(条纹最密处),基本无混叠情况,图 3(d)为所恢复的物体高度分布图,图 3(e)为误差分布图,可以看出面形恢复准确度较高。当局部频谱也有混叠时,物体将不能得到准确恢复。取 $h=3$ peaks,图 4(a)为变形光栅图,图 4(b)和 4(c)分别表示与图 2 对应位置处的全局频谱与局部频谱,都存在较严重的混叠,图 4(d)为所恢复的物体高度分布,图 4(e)为误差分布。考虑周期间频谱混叠对小波测量轮廓术的影响,取 $h=peaks$,当 $m=4$ 时,条纹数增加,周期内频谱不混叠,且满足抽样条件,

如图 5 所示,可以看出面形恢复准确度较高。而 $h=peaks, m=3$ 时,如图 6 所示,可看出面形出现严重失真。

为了验证我们的分析,进行了实验。采集的变形条纹图如 7(a)所示,在条纹变换方向的频谱分布如图 7(b)所示,存在频谱混叠,但局部频谱不混叠。可见只要满足抽样条件就能正确恢复面形。取 $m=6$,满足抽样条件时,恢复的面形为图 7(c),可见准确度比较高。当 $m=3$ 时,恰好不满足抽样条件时,恢复的面形为图 7(d),所恢复物体存在较大的失真。

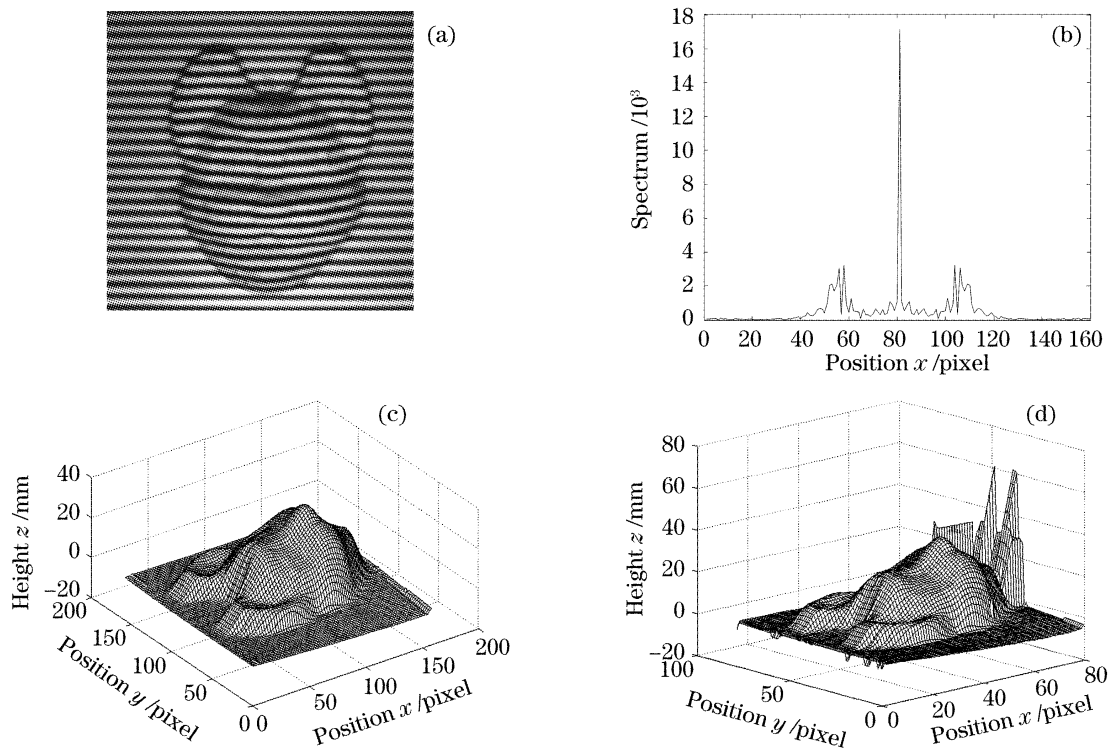


图 7 实验。(a) CCD 采集变形条纹, (b) 采样条纹 x 方向上的全局频谱, (c) $m=6$, 恢复出来的物体, (d) $m=3$, 恢复出来的物体

Fig. 7 Experiment. (a) Deformed fringe pattern captured by CCD, (b) whole field spectrum of x -axis, (c) restored model cat shape when $m=6$, (d) restored model cat shape when $m=3$

4 结 论

本文针对计算机处理的是离散信息的情况,对基于小波脊处理的小波变换轮廓术的测量范围进行分析,推导出离散信号小波“脊”处的小波系数的频域描述形式,研究了基于小波“脊”处理的轮廓术的测量范围,包括避免周期内瞬时频谱混叠的系统结构条件和避免抽样引起的周期间瞬时频谱混叠的抽样条件。必须保证系统结构参量,即条纹任意位置处的瞬时高度变化满足 $|\partial h/\partial x|_{x=b} < 1/3$,并且满足周期内抽样点数 $m \geq 4$ 时,才能避免变形条纹中的瞬时频谱混叠。也就是说,并不是对任意程度的

频谱混叠条纹都能利用小波变换“脊”得到正确的相位图,只有在不存在周期内和周期间的瞬时频谱混叠时,才能得到正确得恢复结果。

参 考 文 献

- 1 M. Takeda, K. Mutoh. Fourier transform profilometry for the automatic measurement 3-D object shapes [J]. *Appl. Opt.*, 1983, **22**(24): 3977~3982
- 2 Li Wansong, Su Likun, Su Xianyu. Phase-measuring profilometry in big scale measurement [J]. *Acta Optica Sinica*, 2000, **20**(6): 792~796 (in Chinese)
- 李万松, 苏礼坤, 苏显渝. 相位检测面形术在大尺度三维面形测量中的应用 [J]. *光学学报*, 2000, **20**(6): 792~796
- 3 Su Xianyu, Chen Wenjing. Fourier transform profilometry: A

- review[J]. *Optics and Lasers in Engineering*, 2001, **35**(5): 263~284
- 4 Wang Hui, Li Yong, Jin Hongzhen. Visualization using computer-generated hologram (CGH) based on three-dimensional shape measurement data of object[J]. *Acta Optica Sinica*, 2003, **23**(3): 284~288 (in Chinese)
王 辉,李 勇,金洪震. 三维面形测量数据的计算全息可视化[J]. *光学学报*, 2003, **23**(3): 284~288
- 5 Hao Yudong, Zhao Yang, Li Dacheng. Analysis of two errors in grating projection profilometry[J]. *Acta Optica Sinica*, 2000, **20**(3): 376~379 (in Chinese)
郝煜栋,赵 洋,李达成. 光栅投影式轮廓测量中两种误差的分析[J]. *光学学报*, 2000, **20**(3): 376~379
- 6 Zhang Xiangchun, Song Yaozu. Analysis of measurement accuracy for mini-displacement of moiré fringe by Fourier transform[J]. *Acta Optica Sinica*, 2003, **23**(12): 1445~1450 (in Chinese)
张香春,宋耀祖. 傅里叶变换求取叠栅条纹微小位移的精度分析[J]. *光学学报*, 2003, **23**(12): 1445~1450
- 7 Weng Jiawen, Zhong Jin'gang. Application of dilating gabor transform to three-dimensional shape analysis[J]. *Acta Optica Sinica*, 2004, **24**(6): 725~729 (in Chinese)
翁嘉文,钟金钢. 伸缩窗口傅里叶变换在三维形貌测量中的应用[J]. *光学学报*, 2004, **24**(6): 725~729
- 8 Qian Kemao. Windowed Fourier transform for fringe pattern analysis[J]. *Appl. Opt.*, 2004, **43**(13): 2695~2702
- 9 Xu Qinghong, Zhong Yuexian, You Zhifu. Study on phase demodulation technique based on wavelet transform[J]. *Acta Optica Sinica*, 2000, **20**(12): 1617~1622 (in Chinese)
许庆红,钟约先,由志福. 基于小波变换的解相技术研究[J]. *光学学报*, 2000, **20**(12): 1617~1622
- 10 Jingang Zhong, Jiawen Weng. Spatial carrier-fringe pattern analysis by means of wavelet transform; wavelet transform profilometry[J]. *Appl. Opt.*, 2004, **43**(26): 4993~4998
- 11 Jingang Zhong, Jiawen Weng. Phase retrieval of optical fringe patterns from the ridge of a wavelet transform[J]. *Opt. Lett.*, 2005, **30**(19): 2560~2562
- 12 M. Afifi, A. Fassi-Fihri, M. Marjane *et al.*. Paul wavelet-based algorithm for optical phase distribution evaluation [J]. *Opt. Commun.*, 2002, **211**(1~6): 47~51