

文章编号: 0253-2239(2007)02-0212-7

孔径平均对自由空间光通信误码率的影响

杨昌旗^{1,2} 姜文汉¹ 饶长辉¹

(¹ 中国科学院光电技术研究所, 成都 610209)
(² 中国科学院研究生院, 北京 100039)

摘要: 研究了接收端孔径平均效应对自由空间光通信误码率的影响。对数辐射方差是反映接收孔径上某一点闪烁起伏的参量。如果自由空间光通信的误码率仅仅是和对数辐射方差有关,那么得到的就是点接收器的结果。对数辐射的协方差是与接收平面上某两点间距离有关的闪烁起伏参量。孔径平均效应意味着要将误码率和对数辐射的协方差联系起来。文中考虑了两种模型:球面波和平面波,并假设接收孔径直径等于第一菲涅耳区尺度。分析的结果显示,孔径平均后的误码率有明显的减小。

关键词: 光通信;自由空间光通信;误码率;孔径平均;方差;协方差

中图分类号: TN929.12 文献标识码: A

Impact of Aperture Averaging on Bit-Error Rate for Free-Space Optical Communication

Yang Changqi^{1,2} Jiang Wenhan¹ Rao Changhui¹

(¹ Institute of Optics and Electronics, the Chinese Academy of Sciences, Chengdu 610209)
(² Graduate School of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100039)

Abstract: In free-space optical communication, the impact of aperture averaging of the receiver on the bit-error rate is studied. The log-irradiance variance is a parameter that reflects the log-intensity fluctuation of a certain point on the receiving aperture. If the bit-error rate solely depends on log-irradiance variance, the result is just for the instance of point receiver. The covariance of log-irradiance is a parameter which is fluctuating related to the spacing between two points at the receiver plane. The aperture averaging effect connects the bit-error rate and covariance of log-irradiance. Two kinds of models are considered, spherical wave and plane wave, and the diameter of the receiving aperture is supposed as the first Fresnel zone length. The result shows that the bit-error rate decreases significantly when the aperture averaging effect is taken into account.

Key words: optical communication; free-space optical communication; bit-error rate; aperture averaging; variance; covariance

1 引言

对于自由空间光通信而言,误码率是一个非常重要的参量。在分析误码率的时候,通常要首先得出对数辐射的概率密度函数,由此,再得到闪烁统计学的三个基本参量(衰减和上涨的概率、持续周期和交叉频率),进而从这三个参量出发,就可以推导出自由空间光通信的误码率^[1]。如果对数辐射的概率密度函数只是和对数辐射方差有关的函数,得到的

误码率就是点接收器的结果;如果对数辐射的概率密度函数是对数辐射的协方差的函数,得到的误码率就是接收端孔径平均的结果。之前的工作已经得到了点接收器的误码率^[1],本文将进一步考虑接收端的孔径平均效应对自由空间光通信的误码率的影响。Fried^[2]通过对接收到的辐射取孔径平均来体现孔径平均效应。受到 Fried 的启发,孔径平均效应是通过对接收到的对数辐射取孔径平均来体现的

作者简介: 杨昌旗(1980—),男,广西柳州人,博士研究生,主要从事自由空间光通信研究。E-mail: changqiyang@sohu.com

导师简介: 姜文汉(1936—),男,浙江人,研究员,中国工程院院士,博士生导师,主要从事光电工程、自适应光学研究。

E-mail: adopse@ioe.ac.cn

收稿日期: 2006-04-27; 收到修改稿日期: 2006-07-03

(其实本质是一样)。究竟是对辐射取孔径平均,还是对对数辐射取孔径平均,取决于分析误码率的是辐射的概率密度函数还是对数辐射的概率密度函数。用对数辐射的概率密度函数来分析误码率会更简单和流畅一些(当然用辐射的概率密度函数来分析误码率的结果是一样的),因此采用的是对对数辐射取孔径平均。为了简化分析过程的复杂性,文中的分析仅仅限于折射率结构参量为常数的情况。共使用了两种模型:球面波和平面波。

2 对数信号的方差

在接收端处,经过接收孔径后的对数信号为(归一化)

$$\vartheta = \frac{4}{\pi D^2} \int d\mathbf{r} W(\mathbf{r}, D) l(\mathbf{r}), \quad (1)$$

其中 \mathbf{r} 是接收平面的二维坐标, D 是接收孔径直径,接收孔径的面积为 $A = \frac{\pi}{4} D^2$, $l(\mathbf{r})$ 是进入接收孔径之前的对数辐射。要注意“辐射”和“信号”的区别,“辐射”是表示完全只由湍流影响的参量,“信号”是描述“辐射”被孔径接收后的参量。(1) 式中的 $W(\mathbf{r}, D)$ 是描述孔径的函数,即

$$W(\mathbf{r}, D) = \begin{cases} 1, & |\mathbf{r}| \leq D/2 \\ 0, & |\mathbf{r}| > D/2 \end{cases} \quad (2)$$

由于湍流造成了接收信号的起伏,所以对数信号应取其统计平均值(用 $\bar{\vartheta}$ 表示,或用 $\langle \vartheta \rangle$ 表示),即

$$\bar{\vartheta} = \frac{4}{\pi D^2} \langle \int d\mathbf{r} W(\mathbf{r}, D) l(\mathbf{r}) \rangle = \frac{4}{\pi D^2} \int d\mathbf{r} W(\mathbf{r}, D) \langle l(\mathbf{r}) \rangle = \frac{4}{\pi D^2} \int d\mathbf{r} W(\mathbf{r}, D) \left(-\frac{1}{2} \sigma_l^2 \right) = -\frac{1}{2} \sigma_l^2, \quad (3)$$

其中 σ_l^2 是对数辐射方差,而 $\langle l(\mathbf{r}) \rangle = -\frac{1}{2} \sigma_l^2$ 是在文献[1,3]中就给出了的(假设对数辐射服从正态分布)。

归一化对数信号方差为

$$\sigma_{\bar{\vartheta}}^2 = \langle (\vartheta - \bar{\vartheta})^2 \rangle = \frac{16}{\pi^2 D^4} \langle \left\{ \int d\mathbf{r} W(\mathbf{r}, D) [l(\mathbf{r}) - \langle l(\mathbf{r}) \rangle] \right\} \left\{ \int d\mathbf{r}' W(\mathbf{r}', D) [l(\mathbf{r}') - \langle l(\mathbf{r}') \rangle] \right\} \rangle, \quad (4)$$

\mathbf{r}' 是接收平面的另一个点。注意到

$$\sigma_l^2(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \langle [l(\mathbf{r}) - \langle l(\mathbf{r}) \rangle][l(\mathbf{r}') - \langle l(\mathbf{r}') \rangle] \rangle, \quad (5)$$

其中 $\sigma_l^2(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ 是对数辐射协方差[也就是后面提到的 $\sigma_l^2(\rho)$]。

交换(4)式的统计平均和双重积分的顺序,并将(5)式代入(4)式,可知

$$\sigma_{\bar{\vartheta}}^2 = \frac{16}{\pi^2 D^4} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' W(\mathbf{r}, D) W(\mathbf{r}', D) \sigma_l^2(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (6)$$

令 $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, $\boldsymbol{\rho}' = \frac{1}{2}(\mathbf{r} + \mathbf{r}')$, 而 $\rho = |\boldsymbol{\rho}|$ (ρ 表示波前上两点之间的距离), 于是(6)式变为

$$\sigma_{\bar{\vartheta}}^2 = \frac{16}{\pi^2 D^4} \int d\boldsymbol{\rho}' \int d\boldsymbol{\rho} W\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\rho}', D\right) W\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\rho}', D\right) \sigma_l^2(\boldsymbol{\rho}), \quad (7)$$

很明显,(7)式中的 $\sigma_l^2(\boldsymbol{\rho})$ 是一个与角向量无关的函数,那么 $\sigma_l^2(\boldsymbol{\rho}) = \sigma_l^2(\rho)$ 。先对 $\boldsymbol{\rho}'$ 进行积分。对 $\boldsymbol{\rho}'$ 的积分结果仅仅是 $\boldsymbol{\rho}$ 和 D 的函数, Fried 给出了这个结果^[2]:

$$K_0(\rho, D) = \int d\boldsymbol{\rho}' W\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\rho}', D\right) W\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\rho}', D\right) = \begin{cases} \frac{D^2}{2} \left\{ \arccos\left(\frac{\rho}{D}\right) - \left(\frac{\rho}{D}\right) \left[1 - \left(\frac{\rho}{D}\right)^2\right]^{1/2} \right\}, & \rho \leq D \\ 0, & \rho > D \end{cases} \quad (8)$$

将(8)式代入(7)式,并对角坐标进行积分,可得

$$\sigma_{\bar{\vartheta}}^2 = \frac{32}{\pi D^4} \int_0^D d\rho \cdot \rho K_0(\rho, D) \sigma_l^2(\rho), \quad (9)$$

从(9)式中可明显看出,对数信号方差 $\sigma_{\bar{\vartheta}}^2$ 是一个反映对数辐射协方差 $\sigma_l^2(\rho)$ 被孔径平均后的参量。(9)式中的对数辐射协方差 $\sigma_l^2(\rho)$ 可以被表示为^[4]

$$\sigma_l^2(\rho) = \sigma_{\ln x}^2(\rho) + \sigma_{\ln y}^2(\rho), \quad (10)$$

其中 $\sigma_{\ln x}^2(\rho)$ 是大尺度对数幅度协方差, $\sigma_{\ln y}^2$ 是小尺度对数幅度协方差。将(10)式代入(9)式,可知

$$\sigma_{\bar{\vartheta}}^2 = \sigma_{\bar{\vartheta} \ln x}^2 + \sigma_{\bar{\vartheta} \ln y}^2, \quad (11)$$

$$\sigma_{\bar{\vartheta} \ln x}^2 = \frac{32}{\pi D^4} \int_0^D d\rho \cdot \rho K_0(\rho, D) \sigma_{\ln x}^2(\rho), \quad (12)$$

$$\sigma_{\bar{\vartheta} \ln y}^2 = \frac{32}{\pi D^4} \int_0^D d\rho \cdot \rho K_0(\rho, D) \sigma_{\ln y}^2(\rho), \quad (13)$$

(12) 式中的 $\sigma_{\vartheta \ln x}^2$ 是一个反映大尺度对数幅度起伏被孔径平均后的参量, 可称为大尺度对数信号方差; (13) 式中的 $\sigma_{\vartheta \ln y}^2$ 是一个反映小尺度对数幅度起伏被孔径平均后的参量, 可称为小尺度对数信号方差。

3 球面波的对数信号方差

3.1 大尺度

Andrews 等^[4] 给出了球面波的大尺度对数幅度协方差, 即

$$\begin{aligned} \sigma_{\ln x}^2(\rho) \approx & 8\pi^2 k_0^2 \int_0^L dz \int_0^\infty d\kappa \kappa \times \\ & \left[0.033 C_n^2 \kappa^{-11/3} \exp\left(-\frac{\kappa^2}{\kappa_x^2}\right) \right] \times \\ & \left\{ 1 - \cos\left[\frac{\kappa^2 z}{k_0} \left(1 - \frac{z}{L}\right)\right] \right\} J_0\left[\left(1 - \frac{z}{L}\right) \kappa \rho\right] \approx \\ & 0.04 \beta_0^2 \eta_x^{7/6} {}_3F_3\left(\frac{7}{6}, \frac{3}{2}, 2; \frac{7}{2}, 3, 1; -\frac{k_0 \rho^2 \eta_x}{4L}\right), \end{aligned} \quad (14)$$

式中 k_0 是波数, L 是传输距离, κ_x 是大尺度空间截止频率, J_0 是 0 阶第一类贝塞尔函数, β_0^2 是球面波的 Rytov 方差, $\beta_0^2 \approx 0.4\sigma_R^2, \sigma_R^2 = 1.23C_n^2 k_0^{7/6} L^{11/6}$ 是平面波的 Rytov 方差, C_n^2 是水平链路的折射率结构参量。对于球面波,

$$\eta_x = L\kappa_x^2/k_0 = 8.56(1 + 0.19\sigma_R^{12/5})^{-1},$$

${}_3F_3$ 是广义超几何函数。

由(14)式可知, 球面波大尺度对数幅度方差为

$$\sigma_{\ln x}^2 = \sigma_{\ln x}^2(0) \approx 0.04\beta_0^2 \eta_x^{7/6}. \quad (15)$$

将(8)式和(14)式代入(12)式, 然后做积分, 得到球面波大尺度信号方差为

$$\begin{aligned} \sigma_{\vartheta \ln x}^2 \approx & 0.04\beta_0^2 \eta_x^{7/6} \times \\ & {}_3F_3\left(\frac{7}{6}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}; 3, 3, \frac{7}{2}; -\frac{k_0 D^2 \eta_x}{4L}\right), \end{aligned} \quad (16)$$

结合(15)式和(16)式, 可得到归一化的球面波大尺度信号方差为

$$\frac{\sigma_{\vartheta \ln x}^2}{\sigma_{\ln x}^2} \approx {}_3F_3\left(\frac{7}{6}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}; 3, 3, \frac{7}{2}; -\frac{k_0 D^2 \eta_x}{4L}\right). \quad (17)$$

图 1 描述的是归一化的球面波大尺度信号方差 $\frac{\sigma_{\vartheta \ln x}^2}{\sigma_{\ln x}^2}$ 和 $\frac{k_0 D^2}{4L} \eta_x$ 之间的函数关系。横坐标是 $\frac{k_0 D^2}{4L} \eta_x$, 纵坐标是 $\frac{\sigma_{\vartheta \ln x}^2}{\sigma_{\ln x}^2} \cdot \frac{k_0 D^2}{4L} \eta_x = \frac{k_0 D^2}{4L} \frac{L\kappa_x^2}{k_0} = \left(\frac{D}{2}\right) \kappa_x^2 \cdot D/2$ 是接收孔径的半径, κ_x 是大尺度的低通截止频率, 即通过频率的上限, 也表示通过尺度的下限。那么, $\frac{k_0 D^2}{4L} \eta_x$ 就是一个描述半径与大尺度通过尺度的下

限的比值的平方的参量。当 η_x 取定值的时候, 图 1 描述的是 $\frac{\sigma_{\vartheta \ln x}^2}{\sigma_{\ln x}^2}$ 和 $\frac{k_0 D^2}{4L}$ 的函数关系。由图可见, 随着接收端孔径直径的增大, 大尺度信号方差 $\sigma_{\vartheta \ln x}^2$ 是迅速减小的。横坐标为 0 的时候(点接收器), 纵坐标为 1, 此时的 $\sigma_{\vartheta \ln x}^2$ 就是球面波的大尺度对数幅度方差 $\sigma_{\ln x}^2$ 。

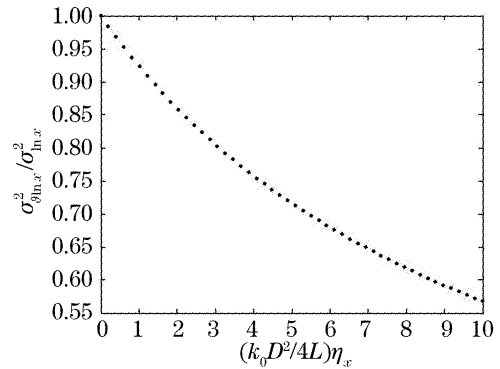


图 1 $\frac{\sigma_{\vartheta \ln x}^2}{\sigma_{\ln x}^2}$ 和 $\frac{k_0 D^2}{4L} \eta_x$ 之间的函数关系

Fig. 1 $\frac{\sigma_{\vartheta \ln x}^2}{\sigma_{\ln x}^2}$ as the function of $\frac{k_0 D^2}{4L} \eta_x$

3.2 小尺度

球面波的小尺度对数幅度协方差函数为^[4]

$$\begin{aligned} \sigma_{\ln y}^2(\rho) \approx & 8\pi^2 k_0^2 \int_0^L dz \int_0^\infty d\kappa \kappa \times \\ & [0.033 C_n^2 (\kappa^2 + \kappa_y^2)]^{-11/6} \times \\ & \left\{ 1 - \cos\left[\frac{\kappa^2 z}{k_0} \left(1 - \frac{z}{L}\right)\right] \right\} J_0\left[\left(1 - \frac{z}{L}\right) \kappa \rho\right] \approx \\ & 3.18\beta_0^2 \eta_y^{-5/6} {}_1F_2\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{6}, \frac{3}{2}; \frac{k_0 \rho^2 \eta_y}{4L}\right) - \\ & 2.22\beta_0^2 \left(\frac{k_0 \rho^2}{L}\right)^{5/6} {}_1F_2\left(\frac{4}{3}; \frac{11}{6}, \frac{7}{3}; \frac{k_0 \rho^2 \eta_y}{4L}\right), \end{aligned} \quad (18)$$

上式中, 对于球面波, $\eta_y = \frac{L\kappa_y^2}{k_0} = 9(1 + 0.23\sigma_R^{12/5})$, κ_y 是小尺度的空间截止频率, ${}_1F_2$ 是广义超几何函数。

由(18)式可知, 小尺度对数幅度方差为

$$\sigma_{\ln y}^2 = \sigma_{\ln y}^2(0) \approx 3.18\beta_0^2 \eta_y^{-5/6}. \quad (19)$$

将(8)式和(18)式代入(13)式, 然后做积分, 得到

$$\begin{aligned} \sigma_{\vartheta \ln y}^2 \approx & 3.18\beta_0^2 \eta_y^{-5/6} {}_2F_3\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{1}{6}, 2, 3; \frac{k_0 D^2}{4L} \eta_y\right) - \\ & 2.1144\beta_0^2 \left(\frac{k_0 D^2}{4L}\right)^{5/6} {}_1F_2\left(\frac{4}{3}; \frac{23}{6}, \frac{17}{6}; \frac{k_0 D^2}{4L} \eta_y\right), \end{aligned} \quad (20)$$

上式中, ${}_2F_3$ 是广义超几何函数。结合(19)式和(20)式, 可知归一化的球面波小尺度信号方差为

$$\frac{\sigma_{\theta \ln y}^2}{\sigma_{\ln y}^2} \approx {}_2F_3\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{1}{6}, 2, 3; \frac{k_0 D^2}{4L} \eta_y\right) - 0.6649 \left(\frac{k_0 D^2}{4L} \eta_y\right)^{5/6} {}_1F_2\left(\frac{4}{3}; \frac{23}{6}, \frac{17}{6}; \frac{k_0 D^2}{4L} \eta_y\right). \quad (21)$$

图 2 描述的是归一化的球面波小尺度信号方差 $\frac{\sigma_{\theta \ln y}^2}{\sigma_{\ln y}^2}$ 和 $\frac{k_0 D^2}{4L} \eta_y$ 之间的函数关系。横坐标是 $\frac{k_0 D^2}{4L} \eta_y$ ，纵坐标是 $\frac{\sigma_{\theta \ln y}^2}{\sigma_{\ln y}^2} \cdot \frac{k_0 D^2}{4L} \eta_y = \frac{k_0 D^2 L \kappa_y^2}{4L k_0} = \left(\frac{D}{2}\right)^2 \kappa_y$ 。是高通下限截止频率，即通过频率的下限，或通过尺度的上限。那么， $\frac{k_0 D^2}{4L} \eta_y$ 就是一个描述半径与小尺度通过尺度的上限的比值的平方的参量。当 η_y 取定值的时候，图 2 描述的就是 $\frac{\sigma_{\theta \ln y}^2}{\sigma_{\ln y}^2}$ 和 $\frac{k_0 D^2}{4L}$ 的函数关系。可以看见，随着接收端孔径直径的增大，小尺度信号方差 $\sigma_{\theta \ln y}^2$ 是迅速减小的。横坐标为 0 的时候(点接收器)，纵坐标为 1，此时的 $\sigma_{\theta \ln y}^2$ 就是小尺度对数幅度方差 $\sigma_{\ln y}^2$ 。

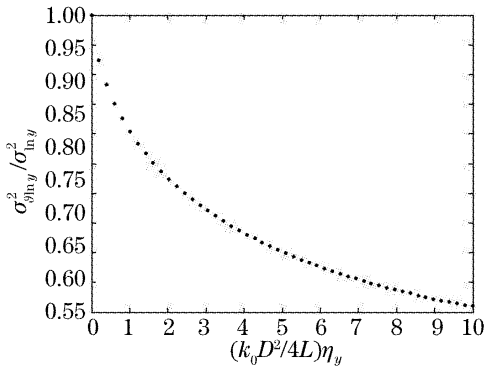


图 2 $\frac{\sigma_{\theta \ln y}^2}{\sigma_{\ln y}^2}$ 和 $\frac{k_0 D^2}{4L} \eta_y$ 之间的函数关系

Fig. 2 $\frac{\sigma_{\theta \ln y}^2}{\sigma_{\ln y}^2}$ as the function of $\frac{k_0 D^2}{4L} \eta_y$

将(16)式和(20)式代入(11)式，可得到球面波的对数信号方差为

$$\sigma_{\theta}^2 \approx 0.04 \beta_0^2 \eta_x^{7/6} {}_3F_3\left(\frac{7}{6}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}; 3, 3, \frac{7}{2}; \frac{-k_0 D^2 \eta_x}{4L}\right) + 3.18 \beta_0^2 \eta_y^{-5/6} {}_2F_3\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{1}{6}, 2, 3; \frac{k_0 D^2}{4L} \eta_y\right) - 2.1144 \beta_0^2 \left(\frac{k_0 D^2}{4L}\right)^{5/6} {}_1F_2\left(\frac{4}{3}; \frac{23}{6}, \frac{17}{6}; \frac{k_0 D^2}{4L} \eta_y\right). \quad (22)$$

图 3 描述的是球面波对数信号方差和湍流强度的关系，横坐标是湍流强度 β_0 ，纵坐标是球面波对数信号的方差 σ_{θ}^2 。点线是没有孔径平均效应的结果(也就是对数辐射方差)，实线是孔径平均后的结果(也就是对数信号方差，取值为 $\sqrt{k_0 D^2 / 4L} = 1, \sqrt{k_0 D^2 / 4L}$

近似等于 $D / \sqrt{\lambda L}$ ， λ 为波长)。可见，孔径平均效应后，接收到的对数信号的方差有了很明显的减小。

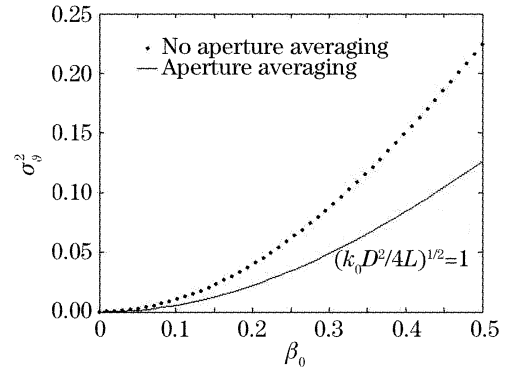


图 3 球面波的对数信号方差和湍流强度的关系
Fig. 3 Log-signal variance of spherical wave as the function of turbulence strength

4 平面波的对数信号方差

4.1 大尺度

平面波的大尺度对数幅度协方差函数为^[4]

$$\sigma_{\ln x}^2(\rho) \approx 8\pi^2 k_0^2 \int_0^L dz \int_0^\infty d\kappa \kappa \times \left[0.033 C_n^2 \kappa^{-11/3} \exp\left(-\frac{\kappa^2}{\kappa_x^2}\right) \right] \times \left[1 - \cos\left(\frac{\kappa^2 z}{k_0}\right) \right] J_0(\kappa \rho) \approx 0.160 \sigma_R^2 \eta_x^{7/6} {}_1F_1\left(\frac{7}{6}; 1; \frac{-k_0 \rho^2 \eta_x}{4L}\right), \quad (23)$$

其中，对于平面波，

$$\eta_x = L \kappa_x^2 / k_0 = 2.61(1 + 1.11 \sigma_R^{12/5})^{-1},$$

${}_1F_1$ 是合流超几何函数。

由(23)式可知，平面波的大尺度对数幅度方差为

$$\sigma_{\ln x}^2 = \sigma_{\ln x}^2(0) \approx 0.160 \sigma_R^2 \eta_x^{7/6}. \quad (24)$$

将(8)式和(23)式代入(12)式，然后积分，得到平面波大尺度信号方差为

$$\sigma_{\theta \ln x}^2 \approx 0.160 \sigma_R^2 \eta_x^{7/6} {}_2F_2\left(\frac{7}{6}, \frac{3}{2}; 2, 3; \frac{-k_0 D^2 \eta_x}{4L}\right), \quad (25)$$

其中 ${}_2F_2$ 是广义超几何函数。结合(24)式和(25)式，可得到归一化平面波大尺度信号方差为

$$\frac{\sigma_{\theta \ln x}^2}{\sigma_{\ln x}^2} \approx {}_2F_2\left(\frac{7}{6}, \frac{3}{2}; 2, 3; \frac{-k_0 D^2 \eta_x}{4L}\right). \quad (26)$$

图 4 描述的是平面波的归一化大尺度信号方差 $\frac{\sigma_{\theta \ln x}^2}{\sigma_{\ln x}^2}$ 和 $\frac{k_0 D^2}{4L} \eta_x$ 之间的函数关系。横坐标是 $\frac{k_0 D^2}{4L} \eta_x$ ，

纵坐标是 $\frac{\sigma_{\theta \ln x}^2}{\sigma_{\ln x}^2}$ 。当 η_x 取定值的时候,图 4 描述的就是 $\frac{\sigma_{\theta \ln x}^2}{\sigma_{\ln x}^2}$ 和 $\frac{k_0 D^2}{4L}$ 的函数关系。可以看见,随着接收端孔径直径的增大,大尺度信号方差 $\sigma_{\theta \ln x}^2$ 是迅速减小的。横坐标为 0 的时候(点接收器),纵坐标为 1,此时的 $\sigma_{\theta \ln x}^2$ 就是大尺度对数幅度方差 $\sigma_{\ln x}^2$ 。

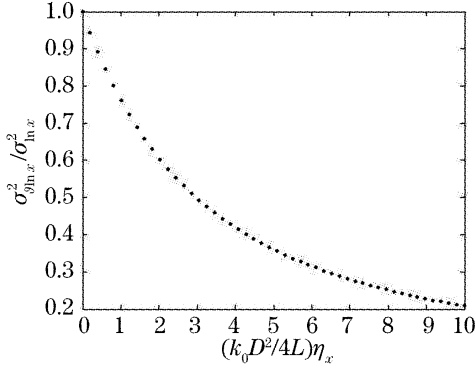


图 4 $\frac{\sigma_{\theta \ln x}^2}{\sigma_{\ln x}^2}$ 和 $\frac{k_0 D^2}{4L} \eta_x$ 之间的函数关系

Fig. 4 $\frac{\sigma_{\theta \ln x}^2}{\sigma_{\ln x}^2}$ as the function of $\frac{k_0 D^2}{4L} \eta_x$

4.2 小尺度

平面波的小尺度对数幅度协方差函数为^[4]

$$\begin{aligned} \sigma_{\ln y}^2(\rho) &\approx 8\pi^2 k_0^2 \int_0^L dz \int_0^\infty d\kappa \kappa \times \\ &[0.033 C_n^2 (\kappa^2 + \kappa_y^2)^{-11/6}] \times \\ &[1 - \cos(\frac{\kappa^2 z}{k_0})] J_0(\kappa \rho) \approx \\ &1.27 \sigma_R^2 \left(\frac{k_0 \rho^2}{L \eta_y}\right)^{5/12} K_{5/6}\left(\sqrt{\frac{k_0 \rho^2 \eta_y}{L}}\right), \end{aligned} \quad (27)$$

上式中,对于平面波, $\eta_y = \frac{L \kappa_y^2}{k_0} = 3(1 + 0.69 \sigma_R^{12/5})$, $K_{5/6}$ 是 (5/6) 阶的第二类变形贝塞尔函数, 0 是其奇点。

由(27)式可知,小尺度对数幅度起伏的方差为

$$\sigma_{\ln y}^2 = \sigma_{\ln y}^2(0) \approx 1.27 \sigma_R^2 \eta_y^{-5/6}. \quad (28)$$

将(8)式和(27)式代入(13)式,然后积分,得到平面波的小尺度信号方差为

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta \ln y}^2 &\approx 4.26 \sigma_R^2 \left(\frac{k_0 D^2}{4L}\right)^{-1} \eta_y^{-11/6} - \\ &4.26 \sigma_R^2 \left(\frac{k_0 D^2}{4L}\right)^{-1} \eta_y^{-11/6} {}_1F_2\left(\frac{1}{2}; -\frac{5}{6}, 1; \frac{k_0 D^2 \eta_y}{4L}\right) - \\ &6.43 \sigma_R^2 \left(\frac{k_0 D^2}{4L}\right)^{5/6} {}_1F_2\left(\frac{7}{3}; \frac{17}{6}, \frac{17}{6}; \frac{k_0 D^2 \eta_y}{4L}\right) - \\ &1.28 \sigma_R^2 \eta_y^{-5/6} {}_1F_2\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{6}, 3; \frac{k_0 D^2 \eta_y}{4L}\right) + \\ &4.16 \sigma_R^2 \left(\frac{k_0 D^2}{4L}\right)^{5/6} {}_1F_2\left(\frac{7}{3}; \frac{11}{6}, \frac{23}{6}; \frac{k_0 D^2 \eta_y}{4L}\right), \end{aligned} \quad (29)$$

结合(28)式和(29)式,可知

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{\theta \ln y}^2}{\sigma_{\ln y}^2} &\approx 3.36 \left(\frac{k_0 D^2}{4L} \eta_y\right)^{-1} - \\ &3.36 \left(\frac{k_0 D^2}{4L} \eta_y\right)^{-1} {}_1F_2\left(\frac{1}{2}; -\frac{5}{6}, 1; \frac{k_0 D^2 \eta_y}{4L}\right) - \\ &5.06 \left(\frac{k_0 D^2}{4L} \eta_y\right)^{5/6} {}_1F_2\left(\frac{7}{3}; \frac{17}{6}, \frac{17}{6}; \frac{k_0 D^2 \eta_y}{4L}\right) - \\ &1.01 {}_1F_2\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{6}, 3; \frac{k_0 D^2 \eta_y}{4L}\right) + \\ &3.28 \left(\frac{k_0 D^2}{4L} \eta_y\right)^{5/6} {}_1F_2\left(\frac{7}{3}; \frac{11}{6}, \frac{23}{6}; \frac{k_0 D^2 \eta_y}{4L}\right). \end{aligned} \quad (30)$$

图 5 描述的是归一化的平面波小尺度信号方差 $\frac{\sigma_{\theta \ln y}^2}{\sigma_{\ln y}^2}$ 和 $\frac{k_0 D^2}{4L} \eta_y$ 之间的函数关系。横坐标是 $\frac{k_0 D^2}{4L} \eta_y$, 纵坐标是 $\frac{\sigma_{\theta \ln y}^2}{\sigma_{\ln y}^2}$ 。当 η_y 取定值的时候,图 5 描述的就是 $\frac{\sigma_{\theta \ln y}^2}{\sigma_{\ln y}^2}$ 和 $\frac{k_0 D^2}{4L}$ 的函数关系。可以看见,随着接收端孔径直径的增大,小尺度信号方差 $\sigma_{\theta \ln y}^2$ 是迅速减小的。横坐标为 0 的时候(点接收器),纵坐标为 1,此时的 $\sigma_{\theta \ln y}^2$ 就是平面波的小尺度对数幅度方差 $\sigma_{\ln y}^2$ 。

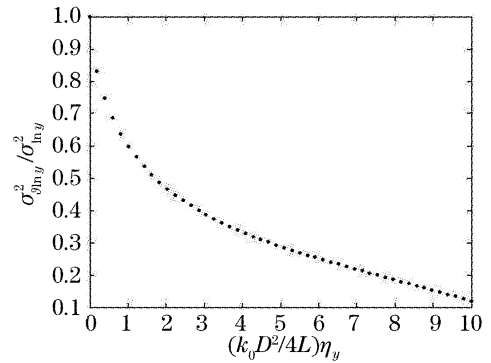


图 5 $\frac{\sigma_{\theta \ln y}^2}{\sigma_{\ln y}^2}$ 和 $\frac{k_0 D^2}{4L} \eta_y$ 之间的函数关系

Fig. 5 $\frac{\sigma_{\theta \ln y}^2}{\sigma_{\ln y}^2}$ as the function of $\frac{k_0 D^2}{4L} \eta_y$

将(25)式和(29)式代入(11)式,可得到平面波的对数信号方差为

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta}^2 &\approx 0.160 \sigma_R^2 \eta_x^{7/6} {}_2F_2\left(\frac{7}{6}, \frac{3}{2}; 2, 3; -\frac{k_0 D^2 \eta_x}{4L}\right) + \\ &4.26 \sigma_R^2 \left(\frac{k_0 D^2}{4L}\right)^{-1} \eta_y^{-11/6} - \\ &4.26 \sigma_R^2 \left(\frac{k_0 D^2}{4L}\right)^{-1} \eta_y^{-11/6} {}_1F_2\left(\frac{1}{2}; -\frac{5}{6}, 1; \frac{k_0 D^2 \eta_y}{4L}\right) - \\ &6.43 \sigma_R^2 \left(\frac{k_0 D^2}{4L}\right)^{5/6} {}_1F_2\left(\frac{7}{3}; \frac{17}{6}, \frac{17}{6}; \frac{k_0 D^2 \eta_y}{4L}\right) - \\ &1.28 \sigma_R^2 \eta_y^{-5/6} {}_1F_2\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{6}, 3; \frac{k_0 D^2 \eta_y}{4L}\right) + \\ &4.16 \sigma_R^2 \left(\frac{k_0 D^2}{4L}\right)^{5/6} {}_1F_2\left(\frac{7}{3}; \frac{11}{6}, \frac{23}{6}; \frac{k_0 D^2 \eta_y}{4L}\right), \end{aligned} \quad (31)$$

图 6 描述的是平面波的对数信号方差和湍流强度的关系,横坐标是湍流强度 σ_R ,纵坐标是平面波的对数信号方差 σ_θ^2 。点线是没有孔径平均效应的结果(也就是平面波的对数辐射方差 σ_l^2),实线是孔径平均后的结果(也就是平面波的对数信号方差,取值为 $\sqrt{k_0 D^2/4L} = 1$)。可见,孔径平均效应后,接收到的对数信号的方差有了很明显的减小。

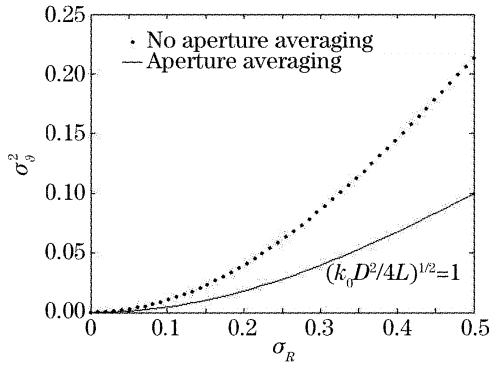


图 6 平面波的对数信号方差和湍流强度的关系
Fig. 6 Log-signal variance of plane wave as the function of turbulence strength

5 误码率

为了得出误码率,必须得出对数辐射 l 的分布。当只考虑大气为唯一因素的时候(点接收器,无孔径平均效应),假设对数辐射服从正态分布^[1],即

$$P(l) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\sigma_l^2)^{1/2}} \exp\left[-\frac{(l - \langle l \rangle)^2}{2\sigma_l^2}\right]. \quad (32)$$

当必须要考虑孔径平均效应的时候,仍假设对数辐射服从正态分布,稍作一下改动,如下所示

$$P(l) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\sigma_\theta^2)^{1/2}} \exp\left[-\frac{(l - \bar{\vartheta})^2}{2\sigma_\theta^2}\right]. \quad (33)$$

由(3)式,(33)式变为

$$P(l) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\sigma_\theta^2)^{1/2}} \exp\left[-\frac{(l + \sigma_l^2/2)^2}{2\sigma_\theta^2}\right]. \quad (34)$$

(33) 式中,对于 $\bar{\vartheta}$,当 $D \rightarrow 0$ 时,

$$\bar{\vartheta} = \frac{4}{\pi D^2} \langle \int dr W(\mathbf{r}, D) l(\mathbf{r}) \rangle =$$

$$\lim_{A \rightarrow 0} \frac{A}{A} \langle l(\mathbf{r}) \rangle = \langle l(\mathbf{r}) \rangle,$$

其实从(3)式也可看出, $\bar{\vartheta}$ 恒等于 $\langle l(\mathbf{r}) \rangle$;而对于 σ_θ^2 ,当 $D \rightarrow 0$ 时,也就是接收器为点接收器时, σ_θ^2 刚好蜕化到对数辐射方差 σ_l^2 [结合公式(6)]。

由此,当 $D \rightarrow 0$ 时,孔径平均后的概率分布(33)式刚好蜕化到无孔径平均的结果(32)式。由于 $\bar{\vartheta}$ 恒等于 $\langle l(\mathbf{r}) \rangle$,也就是说,(33)式和(32)式的差别仅仅在于对应于点接收器的 σ_l^2 和对应于孔径

平均的 σ_θ^2 的不同。

类似于文献[1]的方法,可知一个开关键控系统(OOK)在考虑了孔径平均效应后的误码率(BER)可以被表示为

$$\text{BER(OOK)} = \frac{1}{2} P(1) \left\{ 1 + \text{erf} \left[\frac{{}^l F_0 + \sigma_l^2/2}{\sqrt{2}\sigma_\theta} \right] \right\} +$$

$$\frac{1}{2} P(0) \left\{ 1 - \text{erf} \left[\frac{{}^l S_0 + \sigma_l^2/2}{\sqrt{2}\sigma_\theta} \right] \right\}, \quad (35)$$

式中 $P(1)$ 是发送 1 的概率, $P(0)$ 是发送 0 的概率, erf 是误差函数, ${}^l F_0$ 是辐射衰减 F_0 dB 的时候所对应的 l 值, ${}^l S_0$ 是辐射上涨 S_0 dB 的时候所对应的 l 值, σ_θ 是 σ_θ^2 的开根号值。

5.1 球面波

当(35)式中 σ_θ 的取值为(22)式时,就得到了开关键控制系统的误码率和湍流强度的关系(球面波)。图 7 中,横坐标是湍流强度 β_0 ,纵坐标是开关键控制系统的误码率。点线和短划线是无孔径平均效应的结果,点划线和实线是(35)式的结果(有孔径平均效应)。可以看到,考虑了孔径平均效应后,误码率得到了很明显的减小。

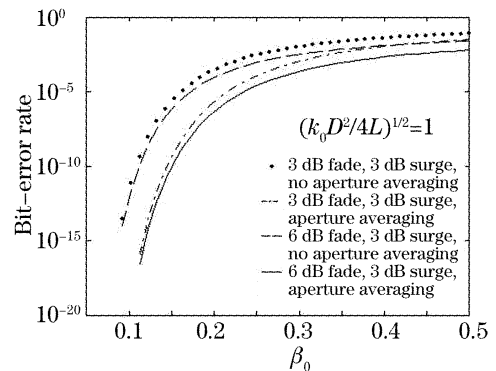


图 7 开关键控制系统的误码率和湍流强度的关系(球面波)
Fig. 7 Bit-error rate of on-off keying OOK system as the function of turbulence strength (spherical wave)

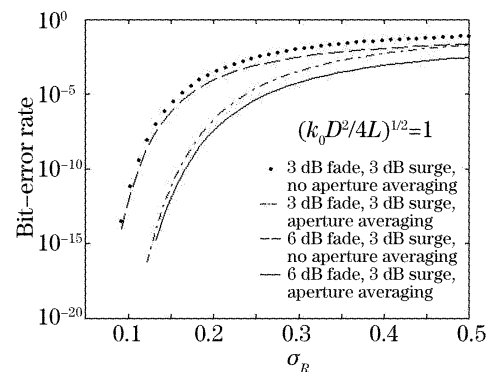


图 8 开关键控制系统的误码率和湍流强度的关系(平面波)
Fig. 8 Bit-error rate of OOK system as the function of turbulence strength (plane wave)

5.2 平面波

当(35)式中 σ_θ 的取值为(31)式时,就得到了开关键控系统的误码率和湍流强度的关系(平面波)。图8中,横坐标是湍流强度 σ_R ,纵坐标是开关键控系统的误码率。点线和短划线是文献[1]的结果(无孔径平均效应),点划线和实线是(35)式的结果(有孔径平均效应)。可以看到,考虑了孔径平均效应后,误码率得到了很明显的减小。

6 结 论

考虑了接收端孔径平均效应对误码率的影响。分两种模型:球面波和平面波。可见,误码率得到了明显的减小。误码率之所以会减小,是由于孔径平均效应抑制了信号的起伏^[2,5]。在接收端处,存在一个信号起伏的相关距离 d_0 。通常可以把面积为 $\pi \frac{D^2}{4}$ 的接收孔径理解为由很多个面积为 $\pi \frac{d^2}{4}$ 的子孔径拼接而成。在每个子孔径内的辐射起伏是完全相关的,而在不同的子孔径之间不存在明显的辐射起伏的相关。因此,对应于每一个子孔径都存在着一个独特的信号起伏。最为重要的就是,根据大数定理,接收端总的信号起伏将随着独立子孔径的数目的增加而减小。

相对于微波通信来说,自由空间光通信极大的提高了信息传递的速率和保密性。但是,在自由空间光通信中,由于光波的传输介质是湍流大气,这会

使得误码率有所增加。在水平光路中,通过加大接收端的孔径直径,会发现,接收端的信号的起伏明显的弱了许多,由此获得的误码率的减小是非常显著的,这样会大大地提高自由空间光通信的性能。

最后要指出,文中仅仅是给出理论上的结果。至于结果是否能够反映实际系统的真实情况,将由实验来检验,这将在以后的工作中涉及到。将来的工作还包括将自适应光学^[6]融合到自由空间光通信系统中来。

参 考 文 献

- 1 Changqi Yang, Wenhan Jiang, Changhui Rao. Bit-error rate for free-space optical communication with tip-tilt compensation[J]. *Waves in Random and Complex Media*, 2006, **16**(3): 281~292
- 2 D. L. Fried. Aperture averaging of scintillation[J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1967, **57**(2): 169~175
- 3 H. T. Yura, W. G. McKinley. Optical scintillation statistics for IR ground-to-space laser communication systems[J]. *Appl. Opt.*, 1983, **22**(21): 3353~3358
- 4 Larry C. Andrews, Ronald Philips, Cynthia Y. Hopen. *Laser Beam Scintillation with Applications* [M]. Bellingham: SPIE Optical Engineering Press, 2001. 97~148
- 5 Rao Ruizhong, Gong Zhiben, Wang Shipeng *et al.*. Aperture averaging of saturated scintillation of laser propagation in the atmosphere[J]. *Acta Optica Sinica*, 2002, **22**(1): 36~40 (in Chinese)
饶瑞中,龚知本,王世鹏等. 激光大气闪烁饱和的孔径平均效应[J]. *光学学报*, 2002, **22**(1): 36~40
- 6 Rao Changhui, Jiang Wenhan, Ling Ning *et al.*. Temporal correction effectiveness of adaptive optical system for light wave[J]. *Acta Optica Sinica*, 2001, **21**(8): 933~938 (in Chinese)
饶长辉,姜文汉,凌宁等. 自适应光学系统对实际大气湍流波前的时域校正效果[J]. *光学学报*, 2001, **21**(8): 933~938