第 27 卷 第 2 期
2007 年 2 月

光 学 学 报
ACTA OPTICA SINICA

Vol. 27, No. 2
February, 2007

文章编号：0253-2239(2007)02-0340-4

纠缠双原子对场熵压缩特性的影响

周 明 方家元 孔凡志 黄春佳

（长沙理工大学物理与电子科学学院光电子学研究所，长沙 410076）

摘要： 研究了相干态光场与纠缠双原子相互作用系统中场熵的压缩性质，借助于数值计算，讨论了双原子纠缠度及光场强度对场熵压缩的影响。所得结果表明，双原子初态的纠缠度对压缩的持续时间和压缩深度具有决定性的影响。当双原子初始时刻处于最大纠缠态时，场熵具有较大的压缩深度和较长的压缩时间。初始光场强度对场熵的压缩深度和压缩时间也具有显著的影响。光场愈弱，场熵的压缩性愈好。

关键词： 量子光学；纠缠双原子；相干态光场；场熵压缩

中图分类号：O431.2 文献标识码：A

Influence of Entangled-Atoms Pair on Squeezing of Field Entropy

Zhou Ming Fang Jiayuan Kong Fanzhi Huang Chunjia

(*Institute of Optoelectronics, College of Physics and Electronic Science, Changsha University of Science and Technology, Changsha* 410076)

Abstract: The entropy squeezing properties of the coherent field interacting with a pair of entangled atoms are studied by means of quantum theory. With the numerical method, the influence of two-atom's entanglement and field intensity on the field entropy squeezing properties is discussed. The results show that the initial entanglement of atoms and initial intensity of field as well affect intensively both time and depth of field entropy squeezing. The greater depth and longer time of field entropy squeezing appear when the pair of atoms are initially in the maximally entangled state. The weaker the field is, the better the entropy squeezing of field is.

Key words: quantum optics; entangled-atoms pair; coherent field; field entropy squeezing

1 引 言

光场压缩效应的研究一直是量子光学中十分引人注目的研究课题。由于压缩光在光信息技术等领域具有重要的应用前景，自 1976 年 H. P. Yuen[1] 提出压缩态概念以来，人们对压缩光进行了广泛的研究，并在理论和实验方面均取得了重要进展[2~10]。在理论上已经证明，光场的压缩可以通过光场与原子的相互作用来实现，从而使得研究光场和原子相互作用系统中光场的压缩效应具有实际意义。然而，在以往大量有关光场压缩的理论研究中，一般是从海森伯测不准关系出发，用光场某一正交分量的均方偏差来度量光场的量子涨落，并根据其是否小于真空极限来判断光场的该正交分量是否出现压缩效应。但从统计物理学的理论可知，一个更为合理的量子涨落的量度是给定问题的信息熵。50 多年前，Everett 和 Hirschman 提出了具有普遍意义的熵测不准关系。这个关系后来由 Beckner、Bialynicki-Birula 和 Mycielski 等人所证明。

根据熵的定义，一个物理量的熵与该物理量在量子态中的概率分布直接相联系，而概率分布是可测量的，所以熵是一个十分灵敏的、可通过测量确定的物理量。因此，对光场熵压缩效应的研究不但具有理论意义，而且具有实用价值。本文应用全量子理论，研究了相干态光场与纠缠双原子相互作用系统中场熵的压缩性质，借助于数值计算，讨论了双原子纠缠度及光场强度对场熵压缩的影响。

2 态矢与光场约化密度算符

在旋转波近似下，单模辐射场与两个全同的二能级原子相互作用系统的哈密顿量为[11]

作者简介：周 明(1956—)，女，安徽合肥人，教授，主要从事量子光学、原子与分子物理等方面的研究。
E-mail：zhoumtr@126.com；hcjcsust@126.com

收稿日期：2006-03-28；收到修改稿日期：2006-07-22

$$H=\omega a^{+}a+\omega_0\sum_{l=1}^{2}S_3^{(l)}+\varepsilon\sum_{l=1}^{2}[a^{+}S_{-}^{(l)}+aS_{+}^{(l)}],\quad(1)$$

其中 a^{+} 和 a 分别为光场的产生和湮没算符，$S_3^{(l)}$ 和 $S_{\pm}^{(l)}$ 为第 $l(l=1,2)$ 个原子的赝自旋算符，ω 为光场频率，ω_0 为原子的本征跃迁频率，ε 为原子-光场间的耦合常数。为简便起见，只考虑共振情形，即 $\omega=\omega_0$。

设初始时刻($t=0$)A、B 两原子组成的双原子系统处于如下纠缠态：

$$|\psi(0)\rangle=\sqrt{\gamma}|e,e\rangle-\sqrt{1-\gamma}|g,g\rangle,\quad(2)$$

(2) 式中 γ 为表征双原子系统纠缠程度的参量，且 $0\leqslant\gamma\leqslant1$。初始时刻原子的密度算符为

$$\rho_a(0)=|\psi(0)\rangle\langle\psi(0)|,\quad(3)$$

子系统 A 和 B 的约化密度算符分别为

$$\rho_A(0)=\mathrm{tr}_B\{\rho_a(0)\},\quad(4)$$

$$\rho_B(0)=\mathrm{tr}_A\{\rho_a(0)\},\quad(5)$$

双原子系统的部分熵纠缠度则为[12]

$$\begin{aligned}E_a(0)=&-\mathrm{tr}\{\rho_A(0)\log_2\rho_A(0)\}=\\&-\mathrm{tr}\{\rho_B(0)\log_2\rho_B(0)\}=\\&-[\gamma\log_2\gamma+(1-\gamma)\log_2(1-\gamma)],\quad(6)\end{aligned}$$

其中的对数取底数为 2。$E_a(0)$ 随 γ 变化的关系曲线如图 1 所示。当取 $\gamma=0.5$ 时，部分熵纠缠度有最大值 $E_a(0)_{\max}=1$(本文图中坐标单位均为归一化的量)。

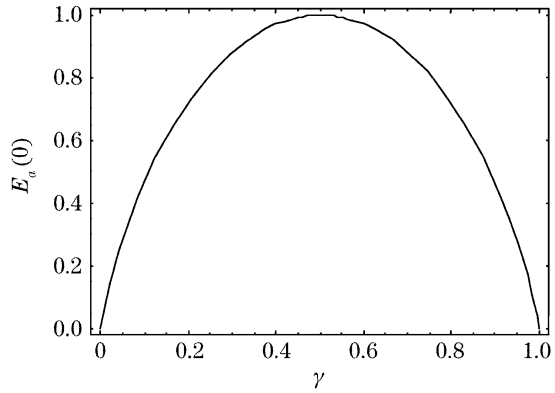

图 1　$E_a(0)$随 γ 变化的关系曲线

Fig. 1　Variation of $E_a(0)$ with γ

若初始时刻光场处于相干态，则原子-光场相互作用系统初始时刻的态矢可表示为

$$|\psi(0)\rangle\sum_{n=0}^{\infty}f_n(\sqrt{\gamma}|e,e,n\rangle+\sqrt{1-\gamma}|g,g,n\rangle),\quad(7)$$

$$f_n=\exp\left(-\frac{n_0}{2}\right)\frac{n_0^{n/2}}{\sqrt{n!}}\exp(\mathrm{i}n\xi),\quad(8)$$

式中 n_0 为辐射场初始平均光子数；ξ 为相位角，为简便起见，本文取 $\xi=0$。

设 t 时刻系统状态演化为

$$|\psi^I(t)\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}[a(n,t)|e,e,n\rangle+b(n,t)|g,g,n\rangle+c(n,t)|e,g,n\rangle+d(n,t)|g,e,n\rangle],\quad(9)$$

将(9)式代入薛定谔方程

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}|\psi^I(t)\rangle=V^I|\psi^I(t)\rangle,\quad(10)$$

可解得

$$a(n,t)=\alpha(n)+2\beta(n)\cos[\sqrt{2(2n+3)}t],\quad(n=0,1,2,3,\cdots)\quad(11)$$

$$b(n,t)=\{(1-n)\alpha(n-2)+2n\beta(n-2)\cos[\sqrt{2(2n-1)}t]\}/\sqrt{n(n-1)},\quad(n=2,3,\cdots)\quad(12)$$

$$c(n,t)=d(n,t)=-\mathrm{i}\{\sqrt{2(2n+1)}\beta(n-1)\sin[\sqrt{2(2n+1)}t]\}/\sqrt{n},\quad(n=1,2,3,\cdots)\quad(13)$$

$$b(0,t)=\sqrt{1-\gamma}f_0,\quad(14)$$

$$b(1,t)=\sqrt{1-\gamma}f_1\cos(\sqrt{2}t),\quad(15)$$

$$c(0,t)=d(0,t)=-\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\gamma}f_1\sin(\sqrt{2}t),\quad(16)$$

其中

$$\alpha(n)=[(n+2)\sqrt{\gamma}f_n-\sqrt{(n+1)(n+2)(1-\gamma)}f_{n+2}]/(2n+3),\quad(17)$$

$$\beta(n)=[(n+1)\sqrt{\gamma}f_n-\sqrt{(n+1)(n+2)(1-\gamma)}f_{n+2}]/(4n+6),\quad(18)$$

可得到量子系统光场约化密度算符为

$$\begin{aligned}\rho_f(t)=&\mathrm{tr}_a\rho(t)=\mathrm{tr}_a|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|=\\&\sum_n\sum_m\{a(n,t)a^*(m,t)+b(n,t)b^*(m,t)+c(n,t)c^*(m,t)+d(n,t)d^*(m,t)\}|n\rangle\langle m|,\quad(19)\end{aligned}$$

3 数值结果

由密度矩阵 $\rho_f(t)$ 描写的量子态，其位置熵和动量熵可以分别定义为[2~5]

$$S_{fx}(t) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \langle x|\rho_f(t)|x\rangle \log\langle x|\rho_f(t)|x\rangle \mathrm{d}x, \tag{20}$$

$$S_{fp}(t) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \langle p|\rho_f(t)|p\rangle \log\langle p|\rho_f(t)|p\rangle \mathrm{d}p, \tag{21}$$

其中的对数取底数为 2。相应的熵测不准关系为

$$\delta x(t)\delta p(t) \geqslant \pi e, \tag{22}$$

其中

$$\begin{aligned} \delta x(t) &\equiv \exp[S_{fx}(t)], \\ \delta p(t) &\equiv \exp[S_{fp}(t)], \end{aligned} \tag{23}$$

为熵指数。熵测不准关系(22)式是描述给定系统位置和动量量子涨落的普遍关系式。对于真空态，可以求得其位置熵和动量熵相等，其值为

$$S_{x0} = S_{p0} = \frac{1}{2}(1 + \ln \pi), \tag{24}$$

相应的熵指数为

$$\delta x_0(t) = \delta p_0(t) = \sqrt{\pi e}, \tag{25}$$

$\delta x_0(t)$ 和 $\delta p_0(t)$ 度量了真空态的位置分量和动量分量的量子涨落，分别为位置熵和动量熵的真空极限。引入

$$\delta X = \delta x - \sqrt{\pi e}, \quad \delta p = \delta p - \sqrt{\pi e}, \tag{26}$$

若

$$\delta A < 0, \quad (A = x \text{ 或 } p) \tag{27}$$

则称光场的 A 分量呈现熵压缩。

由于光场的位置熵和动量熵的解析式不易求出，只能借助于数值计算来分析场熵的时间演化行为。不失一般性，本文仅讨论光场位置熵的时间演化行为，以及光场位置熵的压缩对双原子纠缠度及光场强度的依赖关系。

图 2 给出了在弱光场情形下(计算时取 $n_0 = 1$)，原子初始时刻处于不同纠缠状态时光场位置熵涨落的压缩随时间演化的情况，揭示出纠缠双原子对场熵压缩的影响。可以看出，不论初始时刻原子处于何种初态(纠缠态或非纠缠态)，$\delta x(t)$ 均随时间振荡式地变化。当两原子初态均为基态($\lambda = 0$)时，$\delta x(t)$ 随时间的变化具有较好的周期性，如图 2(a) 所示；而图 2(b) ～ 图 2(c) 表明，当双原子初态为纠缠态或两原子初态均为激发态($\lambda \neq 0$)时，$\delta x(t)$ 变化的周期性随双原子初态中激发态成分的增加(λ 增大)而削弱。另一方面，双原子初态的纠缠度对压缩的持续时间和压缩深度具有决定性的影响。当双原子初始时刻处于最大纠缠态($\lambda = 0.5$)时，位置熵的涨落 $\delta x(t)$ 具有较大的压缩深度和较长的压缩时间，其最大压缩深度达到 -0.75，相当于位置熵真空极限 $\sqrt{\pi e} \approx 2.922$ 的 25%，如图 2(b) 所示；而当双原子初始时刻处于非纠缠态时($\lambda = 0,1$)时，$\delta x(t)$ 的压缩深度较浅[图 2(a)]或完全不可压缩[图 2(c)]。上述结果表明，对于弱光场，与处于最大纠缠态的双原子相互作用，将有利于场熵的压缩。

图 3 给出了双原子初始时刻处于最大纠缠态($\lambda = 0.5$)时，光场强度对光场位置熵压缩的影响。从图 3(a)可以看出，当光场很弱时(n_0. 1)，场熵的压缩呈现准周期性的振荡；随着光场的逐渐增强(n_0 增大)，场熵压缩的周期性逐渐消失，如图 3(b)～图 3(c)所示。图 3 还表明，场熵的压缩深度和压缩时间随着初始光场强度的增强而迅速减弱。当光场很弱时(如 $n_0 = 0.1$)，场熵在大部分时间内处于压

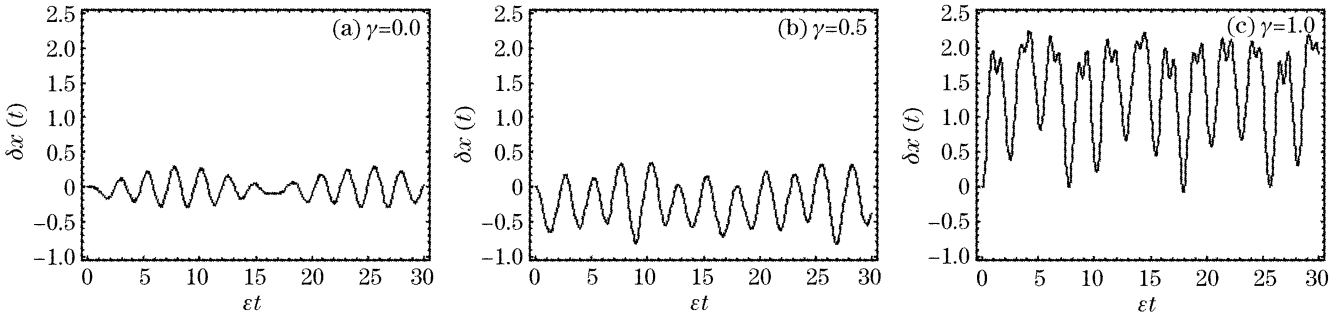

图 2 双原子纠缠对场熵压缩的影响($n_0 = 0.1$)

Fig. 2 Influence of two-atom's entanglement on the squeezing of field entropy with $n_0 = 0.1$

缩状态，如图 3(a)所示；而当光场较强时(如 $n_0=2.0$)，场熵的涨落则不能被压缩，如图 3(c)所示。光场强度对场熵压缩的这种显著影响表明，利用光场与原子间的相互作用制备压缩光时，光场愈弱，场熵的压缩性愈好。

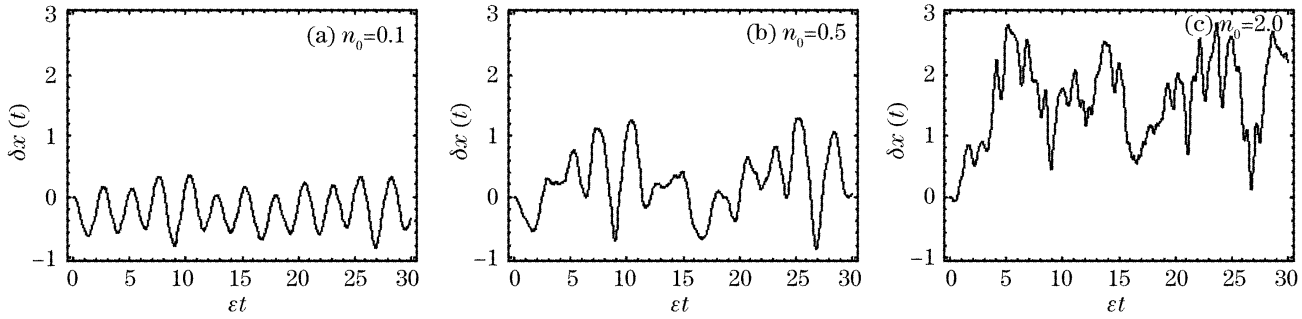

图 3　光场强度对场熵压缩的影响($\gamma=0.5$)

Fig. 3　Influence of field intensity on the squeezing of field entropy with $\gamma=0.5$

4　结　　论

本文应用全量子理论，研究了相干态场与纠缠双原子相互作用系统中场熵的压缩性质，借助于数值计算，讨论了双原子纠缠度及光场强度对场熵压缩的影响。所得结果表明，不论初始时刻原子处于何种初态(纠缠态或非纠缠态)，光场位置熵的涨落 $\delta x(t)$ 均随时间振荡式地变化。双原子初态的纠缠度对压缩的持续时间和压缩深度具有决定性的影响。当双原子初始时刻处于最大纠缠态时，场熵具有较大的压缩深度和较长的压缩时间，其最大压缩深度达到位置熵的真空极限的 25%，这说明光场与处于最大纠缠态的双原子相互作用，将有利于光场的压缩。另一方面，初始光场强度对场熵的压缩深度和压缩时间也具有显著的影响。当光场很弱时，场熵在大部分时间内处于压缩状态，当光场增强时，场熵的压缩性随之减弱，这说明，对于光场与原子相互作用系统，光场愈弱，场熵的压缩性愈好。

参　考　文　献

1 H. P. Yuen. Two-photon coherent states of the radiation field[J]. *Phys. Rev. A*, 1976, **13**(6): 2226～2243

2 A. Orlowski. Information entropy and squeezing of quantum fluctuations[J]. *Phys. Rev. A*, 1997, **56**(4): 2545～2548

3 J. S. Ruiz. Position-momentum entropic uncertainty relation and complementarity in single-slit and double-slit experiments[J]. *Phys. Rev. A*, 1998, **57**(3): 1519～1525

4 M. J. W. Hall. Universal geometric approach to uncertainty, entropy, and information[J]. *Phys. Rev. A*, 1999, **59**(4): 2602～2615

5 Fang Maofa, Chen Jumei. Entropic uncertainty relation and entropic squeezing of the field[J]. *Acta Optica Sinica*, 2001, **21**(1): 8～12 (in Chinese)
方卯发，陈菊梅. 熵测不准关系与光场的熵压缩[J]. 光学学报，2001，**21**(1)：8～12

6 Liu Sanqiu, Wan Lin, Liu Sumei. Squeezing effect of two coupling atoms interacting with a single mode light field in Kerr medium[J]. *Acta Optica Sinica*, 2002, **22**(8): 902～906 (in Chinese)
刘三秋，万　琳，刘素梅. 克尔介质中“耦合双原子-场”模型的光场压缩效应[J]. 光学学报，2002，**22**(8)：902～906

7 Feng Xunli, Xu Zhizhan, Xia Yuxing. The squeezed vacuum pumped two-photon laser[J]. *Acta Physica Sinica*, 2000, **49**(2): 235～240 (in Chinese)
冯勋立，徐至展. 夏宇兴. 压缩真空态光场抽运的双光子激光[J]. 物理学报，2000，**49**(2)：235～240

8 Huang Chunjia, Li Jiangfan, Zhou Ming. Light squeezing in the system of two-mode squeezed vacuum field interacting with a two-level atom[J]. *Acta Optica Sinica*, 2001, **21**(8): 923～928 (in Chinese)
黄春佳，厉江帆，周　明. 双模压缩真空场与二能级原子相互作用系统中光场的压缩特性[J]. 光学学报，2001，**21**(8)：923～928

9 Huang Chunjia, Li Jiangfan, He Huiyong. Quantum properties of light of squeezed vacuum field Raman interacting with two coupled atoms[J]. *Acta Physica Sinica*, 2001, **50**(3): 473～477 (in Chinese)
黄春佳，厉江帆，贺慧勇. 压缩真空场与耦合双原子 Raman 相互作用过程中光场的量子特性[J]. 物理学报，2001，**50**(3)：473～477

10 Huang Chunjia, Zhou Ming, Li Jiangfan *et al.*. The entropy squeezing properties in a system of single-mode field interacting with coupled atoms [J]. *Acta Physica Sinica*, 2002, **51**(4): 805～808 (in Chinese)
黄春佳，周　明，厉江帆 等. 单模辐射场与耦合双原子相互作用系统中场熵的压缩特性[J]. 物理学报，2002，**51**(4)：805～808

11 Peng Jinsheng, Li Gaoxiang. *Introduction of Modern Quantum Optics* [M]. Beijing: Science Press, 1996. 410～411 (in Chinese)
彭金生，李高翔. 近代量子光学导论[M]. 北京：科学出版社，1996. 410～411

12 C. H. Bennett, D. P. DiVincenzo, J. A. Smolin *et al.*. Mixed-state entanglement and quantum error correction[J]. *Phys. Rev. A*, 1996, **54**(5): 3824～3851