

文章编号: 0253-2239(2007)12-2117-6

基于光强传播方程的相位恢复*

王 潇 毛 珩 赵达尊

(北京理工大学 信息科学技术学院光电工程系, 北京 100081)

摘要: 对于圆形孔径的光学系统,利用光强传播方程进行相位恢复时很难得到相位的边界径向斜率值,另外,要获得精确的圆域边界采样值也并非易事。为了克服上述困难,提出了一种相位恢复的改进方法,即改变了方程的表示形式、计算区域和边界条件,并用多重网格法进行求解获得重构相位,最后再将其修正。为了对重构相位进行修正,还得到了重构相位与原始相位之间泽尼克系数的传递矩阵。对均匀照明的情形进行了仿真,发现该方法不仅可以避免复杂的边界条件,减少运算时间,而且还能够较好地恢复出原始波前的泽尼克系数,即便在加噪的情况下,修正相位与原始相位的均方根误差也在可以接受的范围内。

关键词: 自适应光学; 相位恢复; 相位修正; 光强传播方程; 多重网格法

中图分类号: O439 文献标识码: A

Phase Retrieval Based on Intensity Transport Equation

Wang Xiao Mao Heng Zhao Dazun

(Department of Optoelectronic Engineering, College of Information Science and Technology,
Beijing Institute of Technology, Beijing 100081)

Abstract: For the optical system with circular apertures, it is difficult to get the boundary radical slope of phase and the accurate sampling value in the circular domain boundary when the intensity transport equation is used to recover the original phase. An improved method is put forward, in which the equation, computation domain and boundary condition are changed, and then the phase is reconstructed by the multigrid method and corrected at last. In order to correct the reconstructed phase, the transport matrix from the reconstructed phase to the original phase is also obtained. The case of uniform illumination is simulated and it is found that the method can recover Zernike coefficients of the original phase well while avoiding complicated boundary condition and reducing computation time, and furthermore the root-mean-square value between the corrected phase and the original phase is acceptable even when noise is added.

Key words: adaptive optics; phase retrieval; phase correction; intensity transport equation; multigrid method

1 引 言

相位恢复是指利用光束传播时所探测到的光强信息反演出相位^[1],为了获得更多的光强信息以把相位恢复到最佳,一次光强测量是不够的,因此这就要求在光学系统的输出或成像光轴方向上进行多次光强测量。当光束可以被认为是傍轴入射到光学系统中时(如天文观测),通常将光强传播方程^[2]作为相位恢复的基础,通过求解该方程便可以恢复出光

学系统在瞳面上的相位分布。

由于一般的光学系统都具有圆形光瞳,而在天文观测时瞳面所探测到的光强近似均匀分布,因此在利用光强传播方程进行相位恢复时,则需要以原始相位在圆形区域的边界径向斜率值作为边界条件^[3],但是在实际情况中,相位的边界径向斜率值很难得到,此外,网格采样时要获得精确的圆域边界采样值也并非易事。基于以上在相位恢复中的困难,

* 国家 973 计划(20063215)资助课题。

作者简介: 王 潇(1981—),男,北京人,博士研究生,主要从事自适应光学方面的研究。

E-mail: warren1212@bit.edu.cn

导师简介: 赵达尊(1939—),男,江西九江人,教授、博士生导师,主要从事颜色科学、自适应光学等方面的研究。

E-mail: zhdz@bit.edu.cn

收稿日期: 2007-03-01; 收到修改稿日期: 2007-05-21

本文提出了一种改进方法,即在扩大计算区域和改变边界条件的前提下,利用光强传播方程的近似形式进行相位恢复,最后再将所恢复的相位进行泽尼克多项式的系数修正。

2 光强传播方程

2.1 方程推导

一束单色电磁波的复振幅可以表示成:

$$u(r) = I^{1/2}(r)\exp[i\varphi(r)], \quad (1)$$

式中 $r = (x, y, z)$, $I(r)$ 为 r 处的光强, $\varphi(r)$ 表示 r 处的相位。将 z 方向定义为光轴方向,在傍轴近似的条件下,复振幅 $u(r)$ 满足抛物面方程^[4]

$$(2ik\partial_z + \Delta)u(x, y, z) = 0, \quad (2)$$

式中 k 为波数, $\partial_z = \partial/\partial z$, $\Delta = \nabla^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2$ 表示二维拉普拉斯算符。

分别用 u 乘以(2)式的共轭和用 u 的共轭乘以(2)式,得到两个新的等式,再合并两新等式并利用(1)式进行化简便可以得到光强传播方程:

$$-k\partial_z I = \nabla \cdot (I\nabla\varphi) = I\Delta\varphi + \nabla I \cdot \nabla\varphi, \quad (3)$$

(3)式将傍轴传播时光波相位的曲率分布和斜率分布同光强沿光轴方向的变化率联系起来。因此,如果探测到沿光轴方向的光强变化,便可以将相位恢复出来,只是所恢复的相位可以加上一个任意常量 C ,即若 φ 为(3)式的解,则 $\varphi + C$ 同样也满足(3)式。因此需要利用边界条件来确定该常量,不过这个常量对于相位重构来说并不十分重要。

2.2 光强变化率的测量

求解(3)式的前提是获得光强在光轴方向的变化率,由于不能精确测量,通常利用相对于瞳面对称的两个面上的光强进行差分而获得其估计值(如图1),即

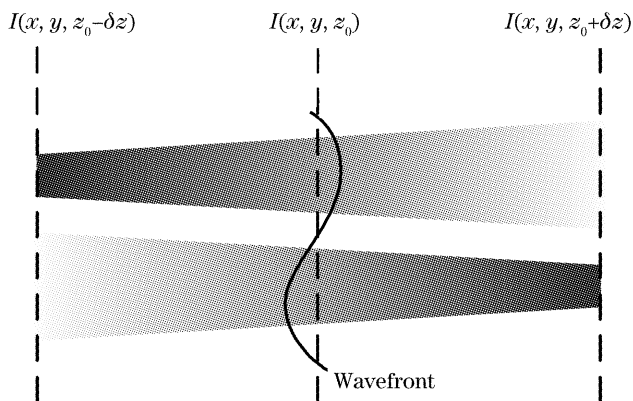


图1 测量光强变化率的原理

Fig. 1 Principle of measuring intensity change rate

$$\left. \frac{\partial I(x, y, z)}{\partial z} \right|_{z=z_0} \approx \frac{I(x, y, z_0 + \delta z) - I(x, y, z_0 - \delta z)}{2\delta z}, \quad (4)$$

式中 δz 是两个探测面与瞳面之间的距离,为了与实际情况中的网格采样相对应,这里改用了直角坐标系。

2.3 模型简化

大部分光学系统都具有圆形的通光孔径,而且在天文观测时所接收到的来自探测目标光波的强度近似均匀,因此可以假定光学系统的入瞳和出瞳均为圆形,且瞳内的光强分布均匀,瞳外光强为零。若采用柱坐标 (r, θ, z) (其中 z 为光轴),则光强分布可写成 $I(r, \theta, z)$,且当出瞳位于 $z = z_0$ 处时,有

$$I(r, \theta, z_0) = I_0 W(r), \quad (5)$$

$$W(r) = \begin{cases} 1, & r \leq R \\ 0, & r > R \end{cases}$$

上式中 I_0 表示出瞳内的光强, W 为窗口函数,而 R 表示出瞳圆形区域的半径。将(5)式代入(3)式,并在 $z = z_0$ 平面处取值,则可以得到

$$-kI_0^{-1}\partial_z I(r, \theta, z) \Big|_{z=z_0} = W(r)\Delta\varphi - \delta_B(r)\partial_r\varphi, \quad (6)$$

式中下标 B 为圆形区域的边界, δ 表示狄拉克函数,而 $\partial_r\varphi = \partial\varphi/\partial r$ 表示原始相位在出瞳平面内的径向斜率。由于原始相位在圆形区域边界上的径向斜率值很难得到,此外网格采样时要获得精确的圆域边界采样值也并非易事,因此通常情况下无法利用(6)式进行相位恢复。

但是,由于光束传播时衍射效应的存在,在两个探测面上圆形以外的区域仍有光强分布,即由(4)式所得到的 $\partial_z I(r, \theta)$ 在光瞳以外的区域内仍有非零值。因此为了充分利用所探测到的光强变化率,可以将计算区域扩展到包含圆形区域的某一矩形区域 Ω ,如图2所示。此外,若把均匀的光强分布也同

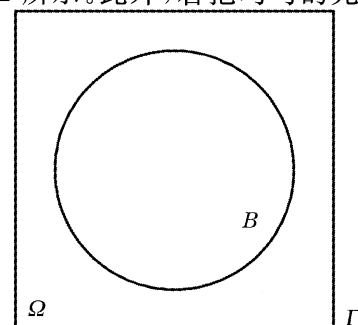


图2 计算区域

Fig. 2 Domain of computation

时进行扩展,即假设在瞳面上的区域 Ω 内具有均匀的光强分布,而只有 B 内的区域通光,则在 Ω 内便有 $\nabla I = 0$ 。这时可以规定一个新的边界条件,即令边界 Γ 附近的相位值 φ_Γ 为一常量,则在 Γ 处有 $\nabla\phi = 0$ 。因此在瞳面上(3)式变为

$$\begin{cases} -kI_0^{-1}\partial_z I(r,\theta) = \Delta\varphi, & (r,\theta) \in \Omega \\ \varphi_\Gamma = \varphi_0, & (r,\theta) \in \Gamma \end{cases} \quad (7)$$

式中 $\partial_z I(r,\theta)$ 为 $\partial_z I(r,\theta,z)|_{z=z_0}$ 的简写,下面不再进行说明。这样便可以通过求解具有边界条件 φ_0 的泊松方程来确定相位分布。顺便指出,由于改变了(6)式的计算区域和边界条件,因此通过(7)式所得到的重构相位会与原始相位有所差别,需要修正,修正方法将在第4节讨论。

3 多重网格法

多重网格方法最早由 Achi Brandt^[5] 提出,并就规则区域上二阶变系数椭圆型方程证明了这种方法的收敛性。它和有限差分方法相结合,已成为求解线性和非线性偏微分方程最有效的方法之一。

利用5点差分格式将(7)式离散化可以得到:

$$\begin{aligned} \varphi(i,j) = & [\varphi(i+1,j) + \varphi(i-1,j) + \\ & \varphi(i,j+1) + \varphi(i,j-1) - \\ & h^2 \cdot \beta(i,j)]/4, \end{aligned} \quad (8)$$

式中 $\beta(i,j) = -kI_0^{-1}\partial_z I(i,j)$, h 为 x 和 y 方向上相同的采样间距, (i,j) 代表 x,y 平面上各离散点的坐标位置。求解(8)式通常是在给定某一初值的前提下,利用传统的迭代方法(如高斯-赛德尔方法等)进行计算。但是这些方法通常只是对于去除高频误差效果较好,而对于低频误差却无能为力。因此在初始的几次迭代中误差会迅速下降,之后的几十次甚至几百次的迭代中精度不再提高,发生了停滞现象。但若将计算区域按不同的采样间距划分成一系列的网格(通常每层网格的采样间距都是上一层网格的2倍),则细网格上的低频误差在粗网格上看来便变成了高频误差,因此在较粗的网格上进行求解便可以有效地减少原来的低频误差。

多重网格的思想是在给定初值的条件下首先在最细的网格上进行迭代求解,之后计算迭代解的残差以及残差的解,再利用限制算子将此残差传递到较粗一级的网格上对残差求解,并计算这一级网格上残差解的残差。这样在每一级网格上便可以得到相对于上一级网格的残差的解,当网格粗到一定程度时(即达到最粗网格时),可以认为最粗网格的残

差解便为满足精度要求的残差精确解。之后再将此精确解插值到上一层的网格以便对该网格残差的解进行修正而得到新的残差精确解,直到获得最细网格的残差精确解,使其与最细网格的残差解一起作为对泊松方程初始迭代解的校正,具体流程如图3所示。

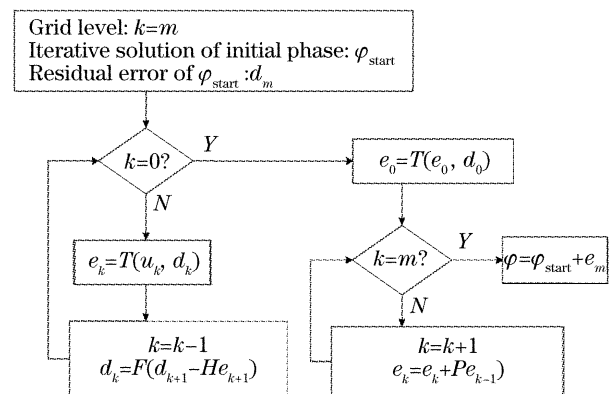


图3 多重网格方法流程图

Fig. 3 Flow chart of multigrid method

其中, d_k 和 e_k 分别表示第 k 层网格的残差和残差的解, u_k 表示在第 k 层网格计算 e_k 时的初始估值, T 表示高斯-赛德尔迭代算子, H 表示泊松方程的计算算子, P 表示线性插值算子, F 为9点限制算子^[6], 通常表示为

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1/16 & 1/8 & 1/16 \\ 1/8 & 1/4 & 1/8 \\ 1/16 & 1/8 & 1/16 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

4 重构相位与原始相位的泽尼克系数差别

由于(7)式的计算区域和边界条件相对于(6)式都发生了变化,因此通过(7)式重构的相位必然会与原始相位有所差别。为了找出这一差别所遵从的规律,将相位表示为泽尼克多项式的线性组合,并分别令泽尼克多项式的每一项作为待测光波相位,经过多重网格法的计算,将结果重新展开成泽尼克多项式的系数,便可以找到重构相位与原始相位之间的系数差别。

为了具体计算,圆形区域的直径定为 $D=2R=2\text{ m}$, 矩形区域的边长相等为 $L=2.4\text{ m}$, 边界条件为 $\varphi_0=0$, 光波强度为 $I_0=1$ (任意单位), 当把原始光波相位和所得到的重构相位均展开成前10项泽尼克多项式时结果如表1所示。

表1中 a 表示泽尼克多项式的系数, 可以发现,

由于(7)式代替了(6)式,所重构相位的泽尼克多项式某些系数之间出现了耦合关系且量值也发生了变化。

但是大部分非相关系数还是基本为零的,此外,根据 L 与 D 所选取的不同,表 1 中的值会稍有不同。

表 1 以泽尼克多项式 2~10 项系数表示的相位重构结果

Table 1 Phase reconstruction results of 2nd~10th term of Zernike polynomials

Original phase	Result of phase reconstruction								
	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
$a_2=1$	0.199	0	0	0	0	0	0	0	-0.01
$a_3=1$	0	0.199	0	0	0	0	0	0.011	0
$a_4=1$	0	0	0.975	0	0	0	0	0	0
$a_5=1$	0	0	0	0.352	0	0	0	0	0
$a_6=1$	0	0	0	0	0.284	0	0	0	0
$a_7=1$	0	-1.08	0	0	0	0.985	0	0.016	0
$a_8=1$	-1.08	0	0	0	0	0	0.985	0	-0.01
$a_9=1$	0	0.071	0	0	0	0	0	0.391	0
$a_{10}=1$	-0.07	0	0	0	0	0	0	0	0.391

5 相位修正

若令 φ_1, φ_2 和 φ'_1, φ'_2 分别表示两个不同的泽尼克项及其相应的重构结果,即

$$-k\partial_z I_i = I_i \Delta \varphi_i + \nabla I_i \cdot \nabla \varphi_i, \quad -k\partial_z I_i = \Delta \varphi'_i (I_0 = 1), \quad i = 1, 2 \quad (10)$$

对于原始相位 $\varphi = m\varphi_1 + n\varphi_2$ (其中 m, n 为任意常数),则有

$$\begin{aligned} -k\partial_z I &= I\Delta\varphi + \nabla I \cdot \nabla\varphi = I\Delta(m\varphi_1 + n\varphi_2) + \nabla I \cdot \nabla(m\varphi_1 + n\varphi_2) = \\ &= m(I_1\Delta\varphi_1 + \nabla I_1 \cdot \nabla\varphi_1) + n(I_2\Delta\varphi_2 + \nabla I_2 \cdot \nabla\varphi_2) = \\ &= -m \cdot k\partial_z I_1 - n \cdot k\partial_z I_2 = m\Delta\varphi'_1 + n\Delta\varphi'_2 = \Delta(m\varphi'_1 + n\varphi'_2) = \Delta\varphi', \end{aligned} \quad (11)$$

式中所用到的光强分布和计算区域与前面相同,即 $I=I_1=I_2$ 。因此通过(10)式和(11)式,可以发现这些系数的变化存在着线性关系,即若原始相位是泽尼克多项式的任意线性组合,那么利用(7)式重构后的相位泽尼克系数也是表 1 中相应系数变化的线性组合结果,这就是进行相位修正的理论基础。

若令 $A_{\text{compute}}, A_{\text{origin}}$ 和 A_{correct} 分别表示由重构相位、原始相位和修正后相位的第 2~10 项泽尼克系数,则根据系数变化线性的规则有

$$A_{\text{compute}} = \mathbf{B}^T \cdot A_{\text{origin}}, \quad (12)$$

其中 \mathbf{B} 为表 1 中的 9×9 矩阵,条件数为 11.3,经计算知 \mathbf{B} 可逆,因此将重构相位修正为

$$A_{\text{correct}} = (\mathbf{B}^T)^{-1} \cdot A_{\text{compute}}. \quad (13)$$

6 数值仿真

为了验证以上结论的正确性,先假定一含有像差的待测波前,由角谱理论计算得到与瞳面距离相等的两个探测面上的光强分布,之后利用(4)式、(7)式和(8)式得到重构相位,并按(13)式将其修正。此外,也同时仿真了在光强探测面上加入均值为零,标准差为光强探测值的 1% 和 3% 的高斯随机噪声^[7]的相位恢复情况。在仿真中, L, D 和 I_0 的取值同

上,矩形区域中的离散采样点数为 255×255 ,而圆形区域中的采样点数为 35733。

由于多重网格方法相对于传统的迭代方法具有很高的收敛速度,而且在仿真中使用多重网格方法进行计算时,随着网格的不断放粗,每一层网格计算时所需要的迭代次数也在不断减少,即使在最细的网格上进行计算时迭代次数也没有超过 100,因此在以上的仿真中只是将迭代次数作为循环的结束条件。具体的仿真结果如图 4 和表 2 所示。

从仿真结果能够看出,该方法可以比较好地恢复出待测波前的泽尼克系数,只是两个倾斜项(第 2、3 项)恢复的情况较差,这可能是由于在圆形区域边界处的采样造成的,但是即便在加入噪声的情况下,所恢复的相位与原始相位的均方根误差也在可以接受的范围内。

由于角向数与径向数相同的泽尼克项的曲率值为零,因此由(6)式可知,相位中这些项的系数信息全都包含在了圆形区域的边界上,通过仿真的相位恢复系数可以知道,尽管(7)式采用了不同的计算区域、边界条件和方程形式进行相位恢复,但是如果可以获得正确的轴向光强差分,就能够充分利用圆形区域边界上的信息。

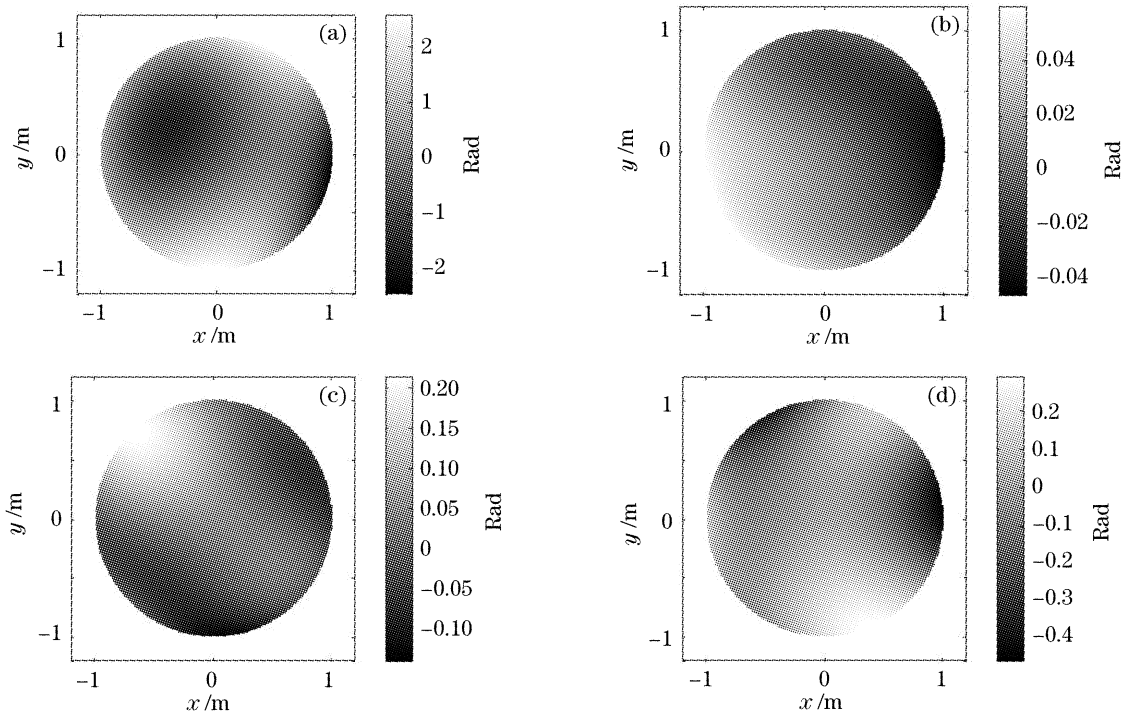


图 4 (a) 原始相位(峰谷值 0.7939λ), (b) 无噪声时的波前传感误差, (c) 加入 1% 噪声时的波前传感误差, (d) 加入 3% 噪声时的波前传感误差

Fig. 4 (a) Original phase (peak-valley value 0.7939λ), (b) wavefront sensing error without noise, (c) with 1% noise, (d) with 3% noise

表 2 原始相位泽尼克系数和相位恢复泽尼克系数

Table 2 Zernike coefficients of original phase and recovered phase

Term number of Zernike polynomials	Zernike coefficients of original phase	Zernike coefficients of recovered phase		
		Zero noise	1% noise	3% noise
2	0.2	0.161820	0.153220	0.175470
3	-0.5	-0.517530	-0.421530	-0.614830
4	0.8	0.801900	0.769870	0.765680
5	0.5	0.504960	0.422020	0.513900
6	-1.0	-1.00090	-1.000100	-1.125500
7	0.4	0.401640	0.396060	0.391940
8	-0.7	-0.700150	-0.701481	-0.718310
9	0.3	0.301890	0.294010	0.290800
10	-0.4	-0.404920	-0.378900	-0.542070
Root-mean-square wavefront error		$3.977 \times 10^{-3} \lambda$	$1.222 \times 10^{-2} \lambda$	$3.802 \times 10^{-2} \lambda$

7 结 论

本文提出了一种基于圆形孔径,利用光强传播方程进行相位恢复的改进方法。在利用光强传播方程进行相位恢复时(圆形光瞳,光强均匀分布),需要以原始相位在圆形区域的边界径向斜率值作为边界条件,但是在实际情况中,相位的边界径向斜率值很难得到,此外,网格采样时要获得精确的圆域边界采样值也并非易事。因此扩大了计算区域,改变了边界条件,得到了光强传播方程的近似表达式,并利用多重网格方法对方程进行求解来恢复相位。

由于进行了上述改变,因此得到的重构相位会与原始相位存在一定的差异。通过仿真找到了它们之间的泽尼克系数传递矩阵,从而可以将重构相位进行修正以得到接近原始相位的泽尼克系数。此方法在应用新的边界条件后,不用再考虑圆形区域的边界条件,可以忽略待测相位的径向斜率值来进行相位恢复而使问题简单化,求解方程时所用的多重网格法也有很快的迭代速度。

参 考 文 献

1 R. P. Millane. Recent advances in phase retrieval[C]. *Proc.*

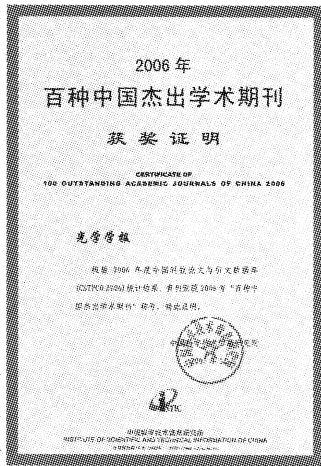
- SPIE*, 2006, **6316 OE**:1~11
- 2 Michael R. Teague. Deterministic phase retrieval; a Green's function solution[J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1983, **73**(11): 1434~1441
- 3 T. E. Gureyev, A. Roberts, K. A. Nugent. Phase retrieval with the transport-of-intensity equation; matrix solution with use of Zernike polynomials[J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1995, **12**(9): 1932~1941
- 4 Simon C. Woods, Alan H. Greenaway. Wave-front sensing by use of a Green's function solution to the intensity transport equation[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2003, **20**(3): 508~512
- 5 Achi Brandt. Multi-level adaptive solutions to boundary-value problems[J]. *Math. Comput.*, 1977, **31**(38): 333~390
- 6 Wolfgang Hackbusch. *Muti-Grid Methods and Applications* [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1985
- 7 T. E. Gureyev, K. A. Nugent. Phase retrieval with the transport-of-intensity equation. II. Orthogonal series solution for nonuniform illumination [J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1996, **13**(8): 1670~1682

《光学学报》连续3年入选“百种中国杰出学术期刊”

2007年11月15日中国科技论文统计结果发布会在北京国际会议中心召开。发布会公布了2006年度的中国科技论文统计结果和第六届百种中国杰出学术期刊的名单。中科院上海光机所《光学学报》连续3年荣获“百种中国杰出学术期刊”的称号。

中国科学技术信息研究所每年出版《中国科技期刊引证报告》，定期公布中国科技论文与引文数据库(CSTPCD)收录的中国科技论文统计源期刊的十余个科学计量指标。1999年开始，以此指标为基础，研制了中国科技学术期刊综合评价指标体系。采用层次分析法，由专家打分确定了重要指标的权重，并分学科对每种期刊进行综合评定。2002年开始了第一届中国百种杰出学术期刊评选。

《光学学报》曾于2002年、2004年、2005年获得第一届、第四届、第五届百种中国杰出学术期刊奖。此次获奖是《光学学报》第四次获此殊荣。



光学期刊联合编辑部

2007.12