

文章编号: 0253-2239(2007)12-2179-5

基于傅里叶变换的高精度条纹细分方法*

楚兴春^{1,2} 吕海宝² 赵尚弘¹

(¹ 空军工程大学 电讯工程学院网络工程系, 西安 710077
² 国防科技大学 机电工程与自动化学院仪器系, 长沙 410073)

摘要: 针对传统傅里叶变换法在提取条纹图相位中存在的能量泄漏问题, 提出了条纹图整周期裁剪的方法, 可有效抑制能量泄漏对检相精度的影响, 提高傅里叶变换法相位计算的精度。在此基础上, 提出了一种基于傅里叶变换时移特性的叠栅条纹细分新方法。与传统傅里叶变换法相比, 该方法求取相邻两帧条纹图间的相移, 只需经过两次傅里叶变换, 不需要截取条纹图的基频再逆变换回空域, 因此计算量至少减少了一倍, 计算速度大大提高。数值计算结果表明, 对两束单色平面波形成的条纹, 理想条件下细分精度高达 10^{-12} 量级; 对高斯包络调制的条纹, 细分精度至少可达 10^{-3} 量级。

关键词: 光学测量; 条纹细分; 裁剪条纹图; 快速傅里叶变换

中图分类号: TB921 文献标识码: A

Investigation of High Precision Subdivision Method for Fringes Based on Fast Fourier Transform

Chu Xingchun^{1,2} Lü Haibao² Zhao Shanghong¹

¹ Department of Network Engineering, Telecommunication Engineering Institute, Air Force Engineering University, Xi'an 710077
² College of Mechanism Electronics Engineering and Automatization, National University of Defense Technology, Changsha 410073

Abstract: Aiming at the problem of energy leakage that occurs during the course of phase-extraction by using conventional fast Fourier transform (FFT) algorithm, a novel method that acquisition interferogram is firstly tailored to a few full-period of fringes is proposed to suppress the influence of energy leakage on the precision of phase-extraction. The precision of fast Fourier transform phase-extraction algorithm can be efficiently improved by tailoring the interferogram. Furthermore, a new subdivision method, which is based on the time-shift property of fast Fourier transform, for moiré interference fringes is developed. Compared with conventional fast Fourier transform phase-extraction algorithm, this new method pioneers a larruping means for fringes subdivision and can achieve high precision. It needs only to run fast Fourier transform algorithm twice to obtain the phase-shift between two sequential interferograms. The corresponding calculating time can then be greatly saved because it does not need to intersect the fundamental frequency of interferogram from spectral domain and inversely transform it into time domain again. Numerical results show that subdivision precision can reach 10^{-12} level for ideal situation that the interferogram is formed by two coherent plane waves and can be tailored to a few full-period of fringes. It can reach 10^{-3} level when the inteferogram is formed by two Gaussian waves.

Key words: optical measurement; fringes subdivision; tailored interferogram; fast Fourier transform (FFT)

* 国家自然科学基金(50175107)资助课题。

作者简介: 楚兴春(1972—), 男, 云南昆明人, 博士后, 主要从事光电精密测量与激光技术等方面的研究。

E-mail: kejdxc@sohu.com

导师简介: 吕海宝(1941—), 男, 江苏江阴人, 教授, 博士生导师, 主要从事光电精密测量与传感技术等方面的研究。

E-mail: lhbao998@sohu.com

收稿日期: 2007-01-08; 收到修改稿日期: 2007-06-14

1 引 言

随着光栅干涉位移测量系统向纳米级测量迈进,条纹细分误差对光栅测量系统的影响越来越大,特别是在大量程光栅测量系统中,已成为制约光栅测量系统精度的关键因素。条纹细分精度主要受非理想的条纹信号引起的细分误差和电路缺陷引起的细分误差限制。从实际情况看,电路的细分误差一般很小,细分倍数可以做得很高。而非理想的条纹信号引起的细分误差要比电路的细分误差大得多,所以细分误差主要是由非理想的条纹信号引起的^[1]。基于两路正交条纹信号的传统细分方法^[2~4]由于受条纹信号直流电平漂移、幅值不等、非正交以及谐波等因素的影响,细分精度较低,难以满足现代超精加工的要求。楚兴春等^[5]提出的任意相位差条纹信号细分方法虽然克服了两路条纹信号偏离正交态对细分的影响,但其细分精度受限于条纹信号的信噪比,仍然难以显著提高。因此,研究能够对非理想条纹信号进行高精度细分的方法成为光栅干涉位移测量系统真正迈入纳米级测量的关键,具有重要意义。

本文根据数字信号处理中的整周期采样理论,通过对条纹图进行整周期裁剪,发现傅里叶变换法的相位提取精度在条纹图裁剪后有明显提高。在此基础上,提出了一种基于傅里叶变换时移特性的快速条纹细分新方法。最后通过数值计算,表明该方法能够对条纹进行高精度细分。

2 条纹图整周期裁剪与傅里叶变换法相位提取精度的提高

用傅里叶变换分析条纹图首先是由 M. Takeda 等^[6]提出的,它利用快速傅里叶变换将条纹图由空域正交变换到频域,在频域中进行滤波处理,然后取出一阶谱再逆变换回空域,最后求解出条纹图的相位分布。在对条纹图进行空间采样时,由于光电探测器具有一定大小,条纹图总是被限制在有限的空间范围内,条纹信号被截断导致能量泄漏使提取的相位与真值之间产生误差^[7]。为抑制能量泄漏引入的测量误差,Qian Kemao^[8]采用了对条纹图采样数据加窗的方法,但对测量精度的提高有限,且进一步加大了计算量,不利于动态测量;张香春等^[9,10]采用对条纹图数据进行周期延拓的方法,用数值外插将条纹图延拓为条纹周期的整数倍以提高相位测量精度,但该方法必须要有准确的条纹图数学模型才能计算出外插数值,否则仍难于提高测量精度。

针对光栅干涉位移测量系统中条纹的细分,只需要准确提取条纹图中某一固定位置处的相位,而不需要提取条纹图中所有位置的相位。因此,本文提出条纹图整周期裁剪的方法,使采样条纹图内截为条纹周期的整数倍。当用傅里叶变换法对裁剪后的条纹图进行相位提取时,不仅数据量少、计算速度更快,而且能够保证每个位置都有较高的相位提取精度。

不失一般性,设在任意时刻 t 条纹图沿 x 轴的强度分布为

$$I(x) = 2 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{16}x + \frac{\pi}{4}\right), \quad (1)$$

在(1)式中,一个条纹周期宽度内覆盖 16 个光电探测器像素,沿 x 方向任意位置处的理论相位是 $\phi(x) = 2\pi x/16 + \pi/4$ 。若线阵光电探测器的像素总数为 100,对(1)式表示的条纹图空间等间距采样后得到图 1(a),整周期裁剪后如图 1(b)。

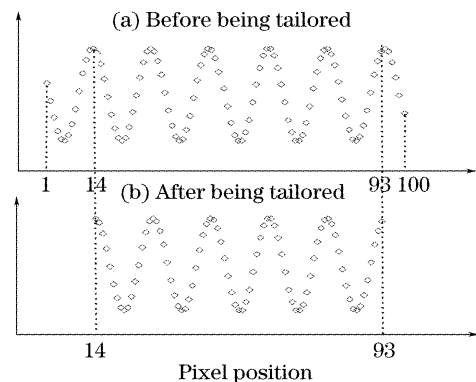


图 1 条纹图整周期裁剪示意图。(a)裁剪前,(b)裁剪后
Fig.1 Schematic diagram of acquisition interferogram being tailored to a few full-period of fringes.

(a) Before being tailored, (b) after being tailored

图 2 是对整周期裁剪前后的条纹图 1(a)和图 1(b)用傅里叶变换法计算得到的所有像素位置处的相位和绝对误差曲线,其中横轴表示条纹图沿 x 轴的空间位置或光电探测器的像素序号,纵轴表示相位。图 2(a1)是从图 1(a)得到的相位曲线,可以看出相位提取精度在条纹图内部只能达到 10^{-1} rad 量级,在条纹图的边缘则有较大的偏差,如图 2(a2)所示;图 2(b1)是从图 1(b)得到的相位曲线,可以看出对于整周期裁剪后的条纹图,相位提取精度大大提高,不论在条纹图边缘还是内部,提取相位与理论相位都保持高度一致,具有 10^{-15} rad 量级的精度,如图 2(b2)。因此,对条纹图的整周期裁剪,可以减小甚至忽略能量泄漏的影响,大大提高傅里叶变换法相位提取的精度。

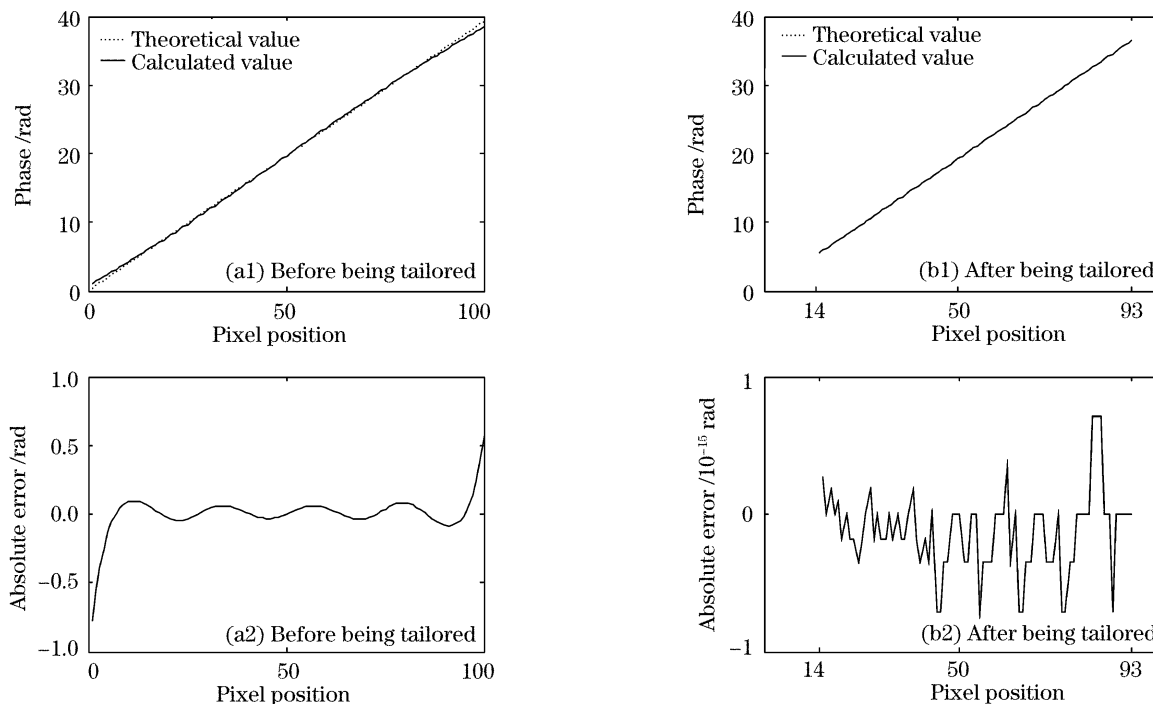


图 2 条纹图整周期的傅里叶变换法相位提取精度的比较。(a1),(a2)裁剪前,(b1),(b2)裁剪后

Fig. 2 Comparison of phase-extracting precision of interferogram with fast Fourier transform. (a1),(a2) before being tailored, (b1),(b2) after being tailored

3 基于傅里叶变换时移特性的条纹细分新方法

在光栅干涉位移测量系统中,光栅的位移使叠栅条纹在空间沿 x 轴移动。从数字信号处理的角度来说,由于叠栅条纹在 x 方向的周期性,条纹图在空间上的移动相当于时间序列产生了时移。因此,本文基于傅里叶变换的时移特性提出了一种条纹细分新方法。

在采样时刻 t_0 ,若条纹图由线阵光电探测器空间离散采样并经模数转换为数字信号 $I_0(n)$, $0 \leq n \leq (N-1)$, N 为采样点数,则其傅里叶变换 $I_0(k)$ 为

$$I_0(k) = \mathcal{F}[I_0(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} I_0(n) W_N^{nk}, \quad (2)$$

式中 $W_N = \exp(j2\pi/N)$ 。由于光栅位移使条纹移动,经过一个采样时间间隔 Δt 后,若条纹沿像素序号减小的方向移动了 m 个像素位置,则此时采样条纹图强度为 $I_1(n) = I_0(n+m)$,其傅里叶变换 $I_1(k)$ 为

$$I_1(k) = \sum_{n=0}^{N-1} I_0(n+m) W_N^{nk}, \quad (3)$$

由傅立叶变换的时移特性可得

$$\frac{I_1(k)}{I_0(k)} = \cos\left(2\pi \frac{mk}{N}\right) - j \sin\left(2\pi \frac{mk}{N}\right). \quad (4)$$

若一个条纹周期宽度内覆盖 M 个像素,条纹在空间移动 m 个像素位置后,相位变化为

$$\Delta\phi_i = 2\pi m/M. \quad (5)$$

于是(4)式变为

$$\frac{I_1(k)}{I_0(k)} = \cos\left(\frac{kM}{N} \Delta\phi_i\right) - j \sin\left(\frac{kM}{N} \Delta\phi_i\right). \quad (6)$$

在实际计算过程中, $I_0(n)$ 和 $I_1(n)$ 的傅里叶变换为复数形式,可表示为 $I_0(k) = a + jb$ 和 $I_1(k) = c + jd$,于是得

$$\tan\left(\frac{kM}{N} \Delta\phi_i\right) = \frac{ad - bc}{ac + bd}, \quad (7)$$

当用条纹图的基频进行相位计算时,有 $kM/N = 1$,由(7)式可得

$$\Delta\phi_i = \arctan\left(\frac{ad - bc}{ac + bd}\right), \quad (8)$$

采用该方法计算相移时,为保证能够正确识别位移方向,相邻两帧条纹图间的相位变化必须满足 $|\Delta\phi_i| < \pi$,即在采样时间间隔 Δt 内条纹的最大移动不超过半个周期。

若光栅系统在 $t_0 \rightarrow t$ 的时间内连续采集了 L 帧条纹图,则在时刻 t 内光栅的位移 X 为

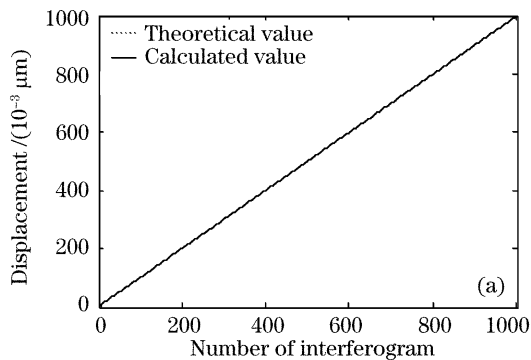
$$X = \frac{p}{2\pi} \sum_{i=1}^L \Delta\phi_i, \quad (9)$$

式中 p 为一个条纹周期代表的位移当量。

与传统傅里叶变换法相比,基于傅里叶变换时移特性的条纹细分法在计算相邻两帧条纹图间的相移时,只需经过两次傅里叶变换,而不需要在频域中截取条纹图的基频再逆变换回空域,因此计算量至少减少了一倍,计算速度得以大大提高,从而使傅里叶变换法更适用于叠栅条纹的动态测量。

4 数值验证与分析

设条纹图在每个采样时间间隔 Δt 内均沿同一方向移动 0.001 个条纹周期,即相邻两帧条纹图间相位变化 0.002π 。条纹图共移动 1000 次,也就是移动一个条纹周期。此外,计算过程中每帧条纹图首先都经过整周期裁剪,裁剪位置由 t_0 时刻的条纹图决定。设一个条纹周期代表的位移当量 $p =$



$1 \mu\text{m}$,位移由(9)式计算得到。

4.1 对两束单色平面波干涉条纹的细分

不失一般性,设在起始时刻 t_0 条纹沿 x 轴的强度分布为

$$I(x) = 2 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{32}x + \frac{\pi}{4}\right), \quad (10)$$

在(10)式表示的条纹图中,一个条纹周期宽度内覆盖 32 pixel。图 3 是对两束单色平面波干涉条纹的细分和绝对误差曲线。可以看出,细分曲线与理论曲线完全重合,它们之间的绝对误差为 10^{-12} 量级。与图 2(b2)相比,细分误差有所增大,主要是由于计算过程中舍入误差和累积误差造成的。因此,条纹图经过整周期裁剪后,用基于傅里叶变换时移特性的条纹细分法完全可以对叠栅条纹实现高精度细分。

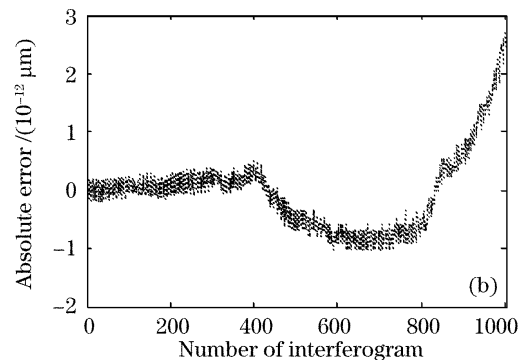


图 3 两束单色平面波干涉条纹的细分(a)和误差(b)曲线

Fig. 3 Subdivision and absolute error curves for fringes of two coherent plane waves

用线阵光电探测器对干涉图空间离散采样时,由于像素总有一定的大小,一个条纹周期宽度很难恰好覆盖整数个像素,因此不能完全保证裁剪后的条纹图宽度刚好是条纹周期宽度的整数倍。但是,由于线阵光电探测器像素的离散性,这种偏差最大只能为 ± 1 pixel。图 4 所示为当条纹图裁剪偏差一个像素时细分值与理论值的绝对误差曲线。可以看

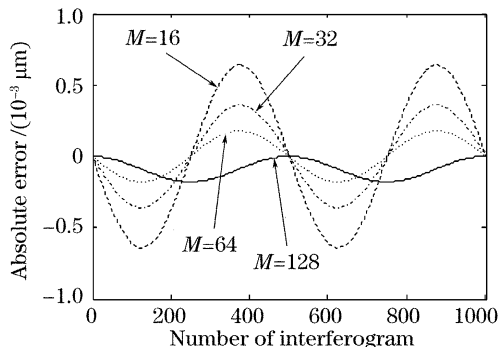


图 4 裁剪后条纹图与整周期裁剪偏差一个像素时的误差曲线

Fig. 4 Error curves of tailored interferogram that has one pixel offset from a full-period fringes

出,当不能实现条纹图的整周期裁剪时,在一个条纹内的细分误差具有周期性,其频率是条纹频率的两倍。同时,细分误差还随一个条纹周期宽度内覆盖的像素数 M 的增多而减小,原因是单位范围内的像素增多,即每个像素本身尺寸所占据的空间比例减小时,裁剪后的条纹图更加接近条纹周期宽度的整数倍。在图 4 中,一个条纹周期被 1000 倍细分,当一个条纹周期宽度内覆盖 $M=16$ pixel 时,最大细分误差约为 $0.7 \times 10^{-3} \mu\text{m}$;而当 $M=128$ 时,最大的细分误差降低为 $0.2 \times 10^{-3} \mu\text{m}$ 。

4.2 对高斯包络调制条纹的细分

在光栅干涉位移测量系统中,激光器出射的光束是高斯光束,形成的条纹是受高斯包络调制的。因此,有必要对高斯包络调制条纹的细分精度进行分析。

不失一般性,设 t_0 时刻高斯包络调制条纹沿 x 轴的强度分布为

$$I(x) = \exp\left(\frac{-x^2}{10000}\right) \left[2 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{32}x + \frac{\pi}{4}\right) \right]. \quad (11)$$

图 5 是对高斯包络调制条纹的细分和误差曲线。可以看出,当条纹图受高斯包络调制时,细分精度只能达到 10^{-3} μm 量级。原因是由于条纹图并不是以高斯包络来进行整周期裁剪的,高斯包络的存在导致能量泄漏,引入细分误差。经过改变高斯包络调制参量,

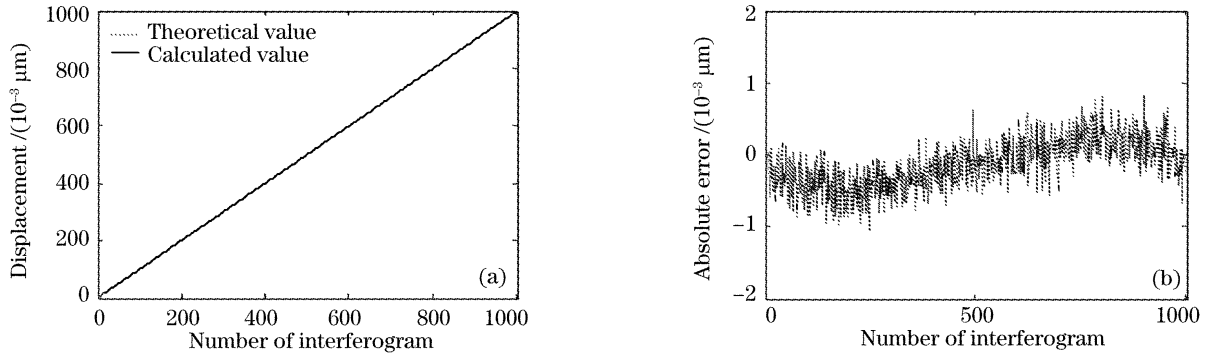


图 5 高斯包络调制条纹信号的细分(a)和误差(b)曲线

Fig. 5 Subdivision and absolute error curves for fringes formed by two Gaussian waves

5 结 论

提出了条纹图整周期裁剪的方法,提高了傅里叶变换法的相位提取精度。在此基础上,提出了一种基于傅里叶变换时移特性的叠栅条纹细分新方法。该方法与传统傅里叶变换法相比,计算相邻两帧条纹图间的相移时,只需经过两次傅里叶变换,而不需要在频域中截取条纹图的基频再逆变换回空域,因此计算量至少减少了一半,计算速度得以大大提高,从而使傅里叶变换法更适用于叠栅条纹的动态测量。该方法突破了基于两路正交信号的传统条纹细分法的思维定势,用条纹图来进行细分,提高了条纹的细分精度。数值计算结果表明,对两束单色平面波形成的条纹,当采样条纹图能被理想地整周期裁剪时,细分精度高达 10^{-12} 量级。而当条纹图裁减存在偏差时,细分精度仍能达到 10^{-4} 量级;当条纹信号受高斯包络调制时,由于高斯包络调制的存在导致能量泄漏,高斯包络调制较明显时,条纹细分的精度只能达到 10^{-3} 量级,随着高斯包络调制的减弱,细分误差减小,细分精度提高。

参 考 文 献

- 1 Liu Wenwen, Fei Yetai. A high accuracy algorithm for the interpolated displacement of grating signal [J]. *J. Applied Sciences*, 1999, **17**(1): 70~74 (in Chinese)
刘文文,费业泰. 高精度的光栅信号细分算法[J]. *应用科学学报*, 1999, **17**(1): 70~74
- 2 Cao Jianian, Li Xuyou, Zhang Likun *et al.*. Research on increasing the accuracy of a digital interferometric fiber optic sensor[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2000, **29**(12): 1103~1107

多次的数值计算结果表明,条纹图整周期裁剪后,在采用基于傅里叶变换时移特性的条纹细分法时,若高斯包络调制的影响较大,则细分误差较大。随着高斯包络调制影响的减小,细分误差也减小,细分精度提高。当没有高斯包络调制时,细分精度最高。

(in Chinese)

- 曹家年,李绪友,张立昆. 提高数字式干涉型光纤传感器条纹细分的研究[J]. *光子学报*, 2000, **29**(12): 1103~1107
- 3 Chu Xingchun, Lü Haibao, Du Liebo. Research on counting and subdividing method for orthogonal Moiré (interference) fringes signals[J]. *J. Test and Measurement Technology*, 2004, **18**(3): 249~252 (in Chinese)
楚兴春,吕海宝,杜列波. 正交莫尔(干涉)条纹区段跟踪计数细分法[J]. *测试技术学报*, 2004, **18**(3): 249~252
- 4 Chu Xingchun, Lü Haibao, Cao Jiliang. Research on direction recognizing and subdividing method for Moiré (interference) fringes[J]. *Chin. Opt. Lett.*, 2003, **1**(12): 692~694
- 5 Chu Xingchun, Lü Haibao, Du Liebo *et al.*. Research on subdividing method for random phase difference fringes signals [J]. *Acta Optica Sinica*, 2005, **25**(4): 497~500 (in Chinese)
楚兴春,吕海宝,杜列波等. 任意相位差条纹信号细分方法的研究[J]. *光学学报*, 2005, **25**(4): 497~500
- 6 M. Takeda, H. Ima, S. Kobayashi. Fourier-transform method of fringe-pattern analysis for computer-based topography and interferometry[J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1982, **72**(1): 156~160
- 7 J. B. Liu, P. D. Ronney. Modified Fourier transform method for interferogram fringe pattern analysis[J]. *Appl. Opt.*, 1997, **36**(25): 6231~6241
- 8 Qian Kema. Two-dimensional windowed Fourier transform for fringe pattern analysis: principles, applications and implementations[J]. *Opt. and Lasers in Engng.*, 2007, **45**: 304~317
- 9 Zhang Xiangchun, Song Yaozu. Analysis of measurement accuracy for mini-displacement of Moiré fringe by Fourier transform[J]. *Acta Optica Sinica*, 2003, **23**(12): 1445~1450 (in Chinese)
张香春,宋耀祖. 傅里叶变换求取叠栅条纹微小位移的精度分析[J]. *光学学报*, 2003, **23**(12): 1445~1450
- 10 Wang Yulei, Lu Zhiwei, Wang Yan *et al.*. New method for interferogram fringe pattern analysis based on Fourier transform method[J]. *Acta Optica Sinica*, 2006, **26**(8): 1167~1171 (in Chinese)
王雨雷,吕志伟,王岩等. 一种基于傅里叶变换的分析载波条纹的新方法[J]. *光学学报*, 2006, **26**(8): 1167~1171