第 27 卷 第 10 期
2007 年 10 月

光 学 学 报
ACTA OPTICA SINICA

Vol. 27, No. 10
October, 2007

文章编号：0253-2239(2007)10-1867-6

基于代数动力学方法实现一类相干态的构建*

王 鹏[1] 王 刚[2] 侯邦品[3] 吴绍全[3]

1 西南财经大学信息学院，成都 610074
2 西南交通大学信息学院，成都 610031
3 四川师范大学物理系，成都 610068

摘要： 最近提出的一个构建相干态的方案中，需要精确求解一个时间相关的常微分方程。基于代数动力学理论，利用该方程具有的 SU(1,1)动力学对称性，提出了对此方程在含时系数取任意函数形式时的统一的精确求解方法，并且得到了严格的解析解。运用这个精确解，就可以构造相应物理系统的精确相干态的具体表达式。给出了一个解例，即频率取“快变”函数的情形。利用得到的精确结果，讨论了这个系统的量子涨落(量子噪声)随时间演化的情况。针对动量算符不确定度随时间演化的曲线的性态，指出在制备这个系统压缩态时可以利用的一些性质。最后，讨论了这个量子系统的不确定关系随时间演化的情况。

关键词： 量子光学；代数动力学；时间相关谐振子；相干态；SU(1,1)动力学对称性

中图分类号：O431.2 文献标识码：A

Realization of the Construction of a Class of Coherent States Based on Algebraic Dynamics

Wang Peng[1] Wang Gang[2] Hou Bangpin[3] Wu Shaoquan[3]

1 *School of Information Engineering, Southwest University of Finance and Economics, Chengdu* 610074
2 *School of Information Science and Technology, Southewest Jiaotong University, Chengdu* 610031
3 *Department of Physics, Sichuan Normal University, Chengdu* 610068

Abstract: In an approach to construct coherent states proposed recently, there is the requirement to solve a time-dependent ordinary differential equation (TDODE). Based on the consideration that the equation possesses SU(1,1) dynamical symmetry, we propose a uniform method for solving the TDODE exactly by means of the theory of algebraic dynamics, whatever the time-dependent frequency takes what form as a function of time. Then, after impacting the time-dependent frequency take a specific form, which is a sudden change function, we obtain the exact solution with the method. Next, we construct the corresponding coherent states with the help of this exact solution. Then the evolution of quantum fluctuation (quantum noise) is discussed. According to the property of the curve of the uncertainty of momentum operator, we point out some properties which can be utilized when preparing the squeezed states of this quntum system. At last, the evolution of the uncertainty relation with time is discussed.

Key words: quantum optics; algebraic dynamics; time-dependent harmonic oscillator; coherent states; SU(1,1) dynamical symmetry

1 引 言

相干态(Coherent states)是量子光学中的一个重要的概念[1]。自从 Glauber 在 1963 年提出相干态的概念[2]以来，它在量子光学中一直处于比较重要的地位并被广泛使用。

时间相关谐振子(Time-dependent harmonic oscillator)模型不仅在量子光学领域，而且在整个物理学乃至化学领域都被十分广泛地应用[3~6]。时间

* 四川省应用基础研究基金(02GY029-188)和四川省教育厅自然科学研究基金(2003A0780)资助的课题。

作者简介：王 鹏(1975－)，男，浙江宁波人，讲师，博士，主要从事量子光学和量子信息等方面的研究。
E-mail：duncan_wang@163.com

收稿日期：2007-02-05；收到修改稿日期：2007-04-23

相关谐振子模型的相干态是一种广义的 Glauber 相干态。曾经有很多人对此进行了深入的研究[7~18]。但是,文献[7]中构建的相干态在时间相关规范变换下不是规范协变的。文献[8,9]中的相干态依赖于一个非线性微分方程,而对这个非线性方程精确求解是非常困难的。另外,它的量子——经典对应不是很清晰。只有文献[10]提出的相干态具有比较好的性能。首先它是规范协变的,其次它的量子——经典对应很清晰,还有就是这种相干态只依赖于一个相对来讲比较容易求解的线性的非自治常微分方程。从这些方面看来,显然文献[10]比先前的工作前进了一步。

虽然文献[10]中的线性非自治常微分方程求解的复杂程度较之文献[8,9]中的非线性方程有所降低,但是对该方程的精确求解依然是非常困难的。如果找不到该方程的精确解,文献[10]提出的相干态的构建方案虽好,但显得缺乏一个基础。事实上,文献[10]也没有给出一个对该方程精确求解的方法,这就为进一步的研究工作留下了较大的空间。

事实上,关于这个方程求解的研究文献是比较多的,但提出的主要都限于近似方法[19~22],其中又以绝热近似方法居多。且在方程的含时系数 $\omega(t)$ 取定某种特殊函数形式比如线性函数时,提出了一些针对相应的特定问题的精确求解方法[4]。但是,对于 $\omega(t)$ 取时间的任意形式函数的情况,目前尚无一种统一的处理方法。可见,用传统的方法处理这一问题是非常困难的。我们发现处理量子力学中的时间相关薛定谔方程的代数动力学(Algebraic dynamics)方法[23],在略做修改后也可以用来处理非自治的常微分方程。本文的工作主要就是基于代数动力学,提出了一个针对这类问题的统一的处理方法。

2 运动方程及其精确求解方法

文献[10]提出的相干态依赖的线性非自治常微分方程是

$$\ddot{x}(t)+\omega^2(t)x(t)=0, \tag{1}$$

其中 $x(t)$ 就是相干态中的参量,$\omega(t)$ 是对应的量子光学系统的频率,它可以取时间的任意函数。仔细观察不难发现,(1) 式实际上就是经典谐振子的运动方程。由于它的频率 $\omega(t)$ 是时间的函数(不像普通物理教科书上,谐振子频率一般作为常量出现),这给方程的精确求解带来了很大的困难。

(1) 式可以改写成如下形式

$$\dot{x}(t)=p,\quad \dot{p}(t)=-\omega^2(t)x, \tag{2}$$

这实际就是经典谐振子的哈密顿方程,坐标 x 和动量 p 是一对正则变量。(2) 式的特点是两个待求变量 x 和 p 在两个方程中是交叉耦合的,这是一个对方程的精确求解不利的因素[另一个因素当然就是这个系统的频率是时间相关的($\omega(t)$)]。

如果令 $\boldsymbol{\varphi}=[x,p]^{\mathrm{T}}$(T 表示转置运算)和 $\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\omega^2(t) & 0\end{bmatrix}$,那么(2) 式可以改写成紧凑的矩阵形式

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{\varphi}, \tag{3}$$

而 $\boldsymbol{L}$ 正是这个系统的刘维算子。

如果给予 $\boldsymbol{k}_+$,$\boldsymbol{k}_0$ 和 $\boldsymbol{k}_-$ 以下矩阵形式的定义:

$$\boldsymbol{k}_+=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{k}_0=\begin{bmatrix}1/2 & 0\\ 0 & -1/2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{k}_-=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}, \tag{4}$$

不难看出,它们满足如下的对易关系:

$$[\boldsymbol{k}_+,\boldsymbol{k}_-]=2\boldsymbol{k}_0,\quad [\boldsymbol{k}_0,\boldsymbol{k}_\pm]=\pm\boldsymbol{k}_\pm, \tag{5}$$

这样,$\boldsymbol{k}_+$,$\boldsymbol{k}_0$ 和 $\boldsymbol{k}_-$ 不是别的,正是 SU(1,1) 群的三个生成元。而(3) 式中的刘维算子 $\boldsymbol{L}$ 可以用它们表示成

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{k}_+-\omega^2(t)\boldsymbol{k}_-. \tag{6}$$

从(6) 式可以看出,刘维算子 $\boldsymbol{L}$ 是三个 SU(1,1) 生成元的线性叠加。于是,这个系统具有 SU(1,1) 动力学对称性。根据代数动力学理论[23],这个系统是可积的,即原方程(1) 可积。

为求解(3) 式,引入以下的时间相关规范变换

$$U=\exp(v_-\boldsymbol{k}_-)\exp(v_+\boldsymbol{k}_+), \tag{7}$$

其中规范变换后的正则变量 $\bar{x}$ 和 $\bar{p}$ 为

$$\bar{\boldsymbol{\varphi}}=\begin{bmatrix}\bar{x}\\ \bar{p}\end{bmatrix}=U^{-1}\begin{bmatrix}x\\ p\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(1+v_+v_-)x-v_+p\\ -v_-x+p\end{bmatrix}, \tag{8}$$

一种最佳的规范选择就是通过选取规范变换参量 $v_+(t)$ 和 $v_-(t)$,使得

$$\dot{v}_-=-v_-^2-\omega^2(t), \tag{9a}$$

$$\dot{v}_+=1+2v_+v_-, \tag{9b}$$

在这种特殊的规范变换下,规范刘维算子 $\boldsymbol{L}$ 变为

$$\boldsymbol{L}=2v_-(t)\begin{bmatrix}1/2 & 0\\ 0 & -1/2\end{bmatrix}=2v_-(t)\boldsymbol{k}_0=f(t)\boldsymbol{I}. \tag{10}$$

上面这种特殊的规范变换优点在于：1）规范刘维算子 $\boldsymbol{L}$ 被成功地对角化；2）$\boldsymbol{L}$ 被分离成了两个部分——时间无关的卡坦(Cartan)算子 $\boldsymbol{I}$ 和一个时间变量 t 的函数 $f(t)$。这一选择对方程的求解起到了关键性的作用。基于以上的这些结果，很容易得到原方程(2)的通解为

$$x(t)=x(0)\exp\left[\frac{1}{2}\int_0^t f(t')\mathrm{d}t'\right]+p(0)v_+\exp\left[-\frac{1}{2}\int_0^t f(t')\mathrm{d}t'\right], \tag{11a}$$

$$p(t)=x(0)v_-\exp\left[\frac{1}{2}\int_0^t f(t')\mathrm{d}t'\right]+p(0)(1+v_+v_-)\exp\left[-\frac{1}{2}\int_0^t f(t')\mathrm{d}t'\right], \tag{11b}$$

其中 $x(0)$ 和 $p(0)$ 是 x 和 p 的初值，$f(t)=2v_-(t)$。在(9)式的变量取初值 $v_+(0)=0$ 和 $v_-(0)=0$ 的条件下，结合(8)式可看出 $x(0)=\bar{x}(0)$，$p(0)=\bar{p}(0)$。以上求解详细的过程见附录。

当含时参量 $\omega^2(t)$ 取定了具体的函数形式之后，首先通过求解(9a)式和(9b)式获得 $v_+(t)$ 和 $v_-(t)$ 解析解，然后把它们代入式(11a)和(11b)，就可以得到正则方程(2)的精确解。

乍看起来，常微分方程(9a)和(9b)并不比正则运动方程(2)简单，甚至它们的非线性更使问题复杂化。但是，常微分方程(9a)和(9b)有两个显著的特点，给一维时间相关的经典谐振子的求解带来新的希望：

1）方程(9)实现了两个待求函数 $v_+(t)$ 和 $v_-(t)$ 的运动方程的退耦合：运动方程(9a)只含有待求函数 $v_-(t)$，可以先行求解；然后把求得的解代入(9b)可使其也变成只关于一个函数 $v_+(t)$ 的线性的运动方程。相反，在正则运动方程(2)，待求函数 x 和 p 在运动方程中却是耦合在一起的，无法针对 x 和 p 中的一个单独求解。

2）方程(9a)是著名的里卡蒂(Riccati)方程，对它的求解积累了丰富的经验。事实上，各种形式的里卡蒂方程已经形成了一个规模庞大的族，几乎所有常见形式的里卡蒂方程都有其对应的求解方法[24]。

3　解例和讨论

下面给出一个解例。前文提到，以前研究方程(2)的工作，主要以绝热近似的方法为主。这种近似要求含时频率随时间的变化不能太快，最好是变化趋势比较平缓，否则作绝热近似的效果就不好。最近，对于含时频率取随时间“快变”的形式的研究越来越多[25~27]。其中文献[25,26]介绍了当含时频率经历非绝热变化时，如果系统本身处于相干态，那么频率的这种非常快速的变化就会导致压缩态的产生。可见对这种情况的研究，无论对量子光学理论，还是对实际应用中一些光学器件的设计，都是很有意义的。于是，使含时参量 $\omega(t)$ 取一个具有“快变”性质的函数形式为

$$\omega^2(t)=\frac{Y_2(t)Y_0(t)+Y_0^2(t)-4Y_1^2(t)}{2Y_0^2(t)}, \tag{12}$$

其中 $Y_\nu(t)(\nu=0,1,2)$ 是第二类贝塞尔函数(有时又被称为诺依曼函数)，ν 表示这类函数的阶。此时，频率随时间的变化特征如图 1 所示。

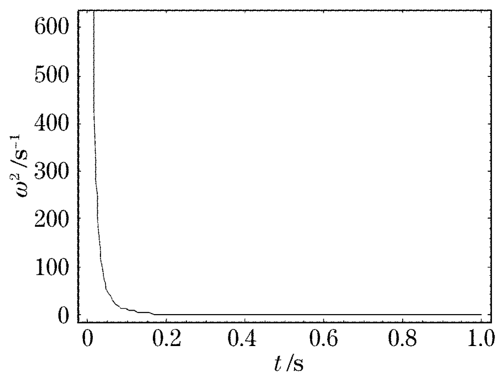

图 1　含时频率随时间的变化特征

Fig. 1　Characteristic of the time-dependent frequency

从图 1 不难看出，频率的变化经历了一个从很大的数值迅速降到 0 附近的“快变”过程，这正是我们选取式(12)这种形式的原因。而使含时参量 $\omega^2(t)$ 取式(12)形式的另一个原因是，以前提出的对方程(2)精确处理的方法中，有很大一部分都是针对 $\omega^2(t)$ 取线性函数的非常简单的情形，而这里将给出当 $\omega^2(t)$ 取复杂函数形式时的精确结果。

当 $\omega^2(t)$ 取(12)式的形式时，方程(9a)和(9b)的一组精确解为

$$v_-=Y_1(t)/Y_0(t),$$

$$v_+=\frac{1}{4}\frac{\sqrt{\pi}}{Y_0^2(t)}G_{1,1}^{3,1}\left(t\,\middle|\,\begin{matrix}1,1\\1/2,1/2,1/2,0\end{matrix}\right), \tag{13}$$

其中 $Y_\nu(t)(\nu=0,1,2)$ 仍然是第二类贝塞尔函数，$G_{1,1}^{3,1}\left(t\,\middle|\,\begin{matrix}1,1\\1/2,1/2,1/2,0\end{matrix}\right)$ 是著名的迈耶 G 函数(Meijer's G function)，很多文献对这个函数的性质有深入的讨论[28~30]。

把(13)式的结果代入(11a)式，就得到了利用文

献[10]提出的构建相干态需要的重要参量 $x(t)$ 为

$$x(t)=x(0)Y_0^{-1}(t)+\frac{1}{4}\sqrt{\pi}p(0)Y_0^{-1}(t)G_{1,1}^{3;1}\left(t\left|\begin{matrix}1,1\\1/2,1/2,1/2,0\end{matrix}\right.\right),\tag{14}$$

Y_0^{-1} 和 $\frac{1}{4}\sqrt{\pi}Y_0^{-1}(t)G_{1,1}^{3;1}\left(t\left|\begin{matrix}1,1\\1/2,1/2,1/2,0\end{matrix}\right.\right)$ 是(2)式根据常微分方程理论的两个线性无关的特解，于是可以由它们引进下列复数解：

$$f(t)=\frac{1}{4}\sqrt{\pi}Y_0^{-1}(t)G_{1,1}^{3;1}\left(t\left|\begin{matrix}1,1\\1/2,1/2,1/2,0\end{matrix}\right.\right)+\mathrm{i}\frac{1}{Y_0(t)},\tag{15}$$

有了这个复数解后，很容易就可以写出相应的相干态。在文献[10]中，在对原量子系统进行求解的过程中，使用了一个动力学卡坦算子 $\hat{Q}(t)$，它在位置表象中的本征值是 $\lambda_n=(n+1/2)\kappa$(κ 是任意正数)，而相应的本征态是

$$|\lambda_n,t\rangle=\exp\left[\frac{\dot{s}(t)}{2}\hat{J}_+\right]\exp[-s(t)\hat{J}_0]\sqrt{\frac{\kappa^{1/2}}{\pi^{1/2}2^n n!}}\times\exp\left[-\frac{1}{2}\kappa^{1/2}q^2\right]H_n(\kappa^{1/2}q),$$

其中 $\hat{J}_+$ 和 $\hat{J}_0$ 是两个算符，它们的定义是 $\hat{J}_+=\frac{\mathrm{i}}{2}q^2$，$\hat{J}_=-\frac{\mathrm{i}}{4}(qp+pq)$，而 p 和 q 分别是动量算符和位置算符。$H_n(\kappa^{1/2}q)$ 是 n 阶厄米(Hermite)多项式。$s(t)=\ln(|f(t)|^2)$，这个 $f(t)$ 具有(15)式的精确形式。

若定义 $\psi(t)=\exp[\mathrm{i}\theta_n(t)]|\lambda_n,t\rangle$，即 $\psi(t)$ 是 $|\lambda_n,t\rangle$ 再乘以一个时间演化因子 $\exp[\mathrm{i}\theta_n(t)]$ $\left[\text{其中 }\theta_n(t)=-(n+1/2)\kappa\int_0^t\frac{\mathrm{d}t'}{|f(t')|^2}\right]$，根据文献[9,10]，相应的相干态 $|\alpha,t\rangle$ 是 $\psi(t)$ 的叠加态

$$|\alpha,t\rangle=\exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)\sum_n\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\exp[\mathrm{i}\theta_n(t)]|\lambda_n,t\rangle,\tag{16}$$

在(16)式中，$\alpha=a+\mathrm{i}b$ 是一个任意的复数。

在相干态确定了之后，通常人们比较关心的是动量算符 p 和位置算符 q 的不确定度随时间演化的情况。在频率取了"快变"函数的形式(12)式之后，尤其重要的是不确定度在"快变"的时间区域内的行为。按照量子光学理论[1]结合文献[10]可得 p 和 q 各自的不确定度

$$(\Delta p)^2=\langle p^2\rangle-\langle p\rangle^2=[\rho^{-2}(t)+\dot{\rho}^2(t)]/2,$$
$$(\Delta q)^2=\langle q^2\rangle-\langle q\rangle^2=\rho^2(t)/2,$$

其中 $\rho(t)=\sqrt{|f(t)|^2/\kappa}$，$f(t)$ 正是由(15)式确定的相干态参量，由于 $f(t)$ 的表达式是精确的，从而上式的结果也是精确的。图2显示了动量 p 的不确定度在"快变"的时间区域内随时间的演化。从图中可以看出，p 的不确定度在这个时间区域内存在一个极小值点，这对于压缩(抑制)p 的量子涨落(量子噪声)是大有益处的。在现实的光通信中，提高信噪比有很大的应用价值。光通信系统中噪声的来源主要是热噪声和光场物理量的量子噪声，而通常量子噪声比热噪声大得多。所以，对量子涨落随时间的演化情况人们是比较关心的。对于这个含时频率有"快变"性质的特定系统，正因为利用代数动力学求得了精确解，从而获得了动量算符 p 和位置算符 q 的不确定度随时间演化的精确表达式，这就使得对量子涨落的比较准确的考察成为可能。这无疑对更好地理解相应物理系统的相干态提供了很大的帮助。

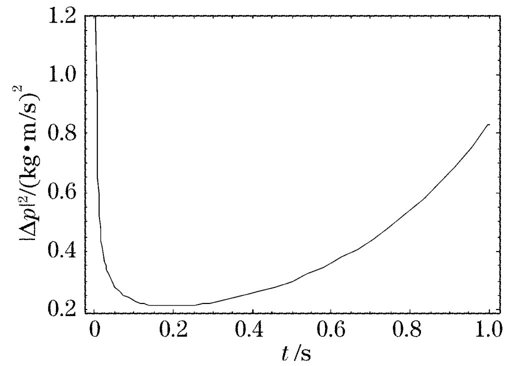

图2 动量的不确定度在"快变"的时间区域内的演化

Fig. 2 Evolution of uncertaing of momentum p in the regime of time undergone sudden change

利用相干态参量 $f(t)$ 的表达式(15)，同样也可以精确得出海森堡不确定关系为

$$(\Delta p)(\Delta q)=\frac{1}{2}[\rho^2(t)\dot{\rho}^2(t)+1]^{1/2},$$

这里还是有 $\rho(t)=\sqrt{|f(t)|^2/\kappa}$[由于把 $f(t)$ 的表达式代入上式得到的结果太过冗长，限于篇幅这里不再给出]。

4 结 论

在文献[10]提出的一种比较好的构建相干态的方案中，需要精确求解一个非自治的常微分方程，即文中的方程(1)。由于这个方程具有SU(1,1)动力学对称性，本文利用代数动力学理论，提出了对这个方程中含时系数 $\omega^2(t)$ 取任意函数形式时的统一的精确求解方法，并给出了一个解例。正因为利用代数动力学方法，求得了相干态中参量 $f(t)$ 的精确结

果，从而获得了各相关物理量的精确表达式，这就使得对相应物理系统的准确考察成为可能，有助于更好地理解物理系统的相干态。

参 考 文 献

1 D. F. Walls, G. J. Milburn. *Quantum Optics* [M]. New York: Springer-Verlag, 1995. 12～15

2 R. J. Glauber. The quantum theory of optical coherence[J]. *Phys. Rev.*, 1963, **130**(6): 2529～2539

3 M. T. Woodside, P. L. McEuen. Scanned probe imaging of single electron charge states in nanotube quantum dots [J]. *Science*, 2002, **296**(5570): 1098～1101

4 G. S. Agarwal, S. A. Kumar. Exact quantum statistical dynamics of an oscillator with time-dependent frequency and generation of nonclassical states[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1991, **67**(26): 3665～3668

5 M. S. Abdalla, R. K. Colegrave. Squeezing induced in a harmonic oscillator by a sudden change in mass or frequency[J]. *Phys. Rev. A*, 1993, **48**(2): 1526～1531

6 C. J. Bardeen, Q. Wang, C. V. Shank. Femtosecond chirped pulse excitation of vibrational wave packets in LD690 and bacteriorhodopsin[J]. *J. Phys. Chem. A*, 1998, **102**(17): 2759～2766

7 A. K. Rajagopal, J. T. Marshall . New coherent states with applications to time-dependent systems[J]. *Phys. Rev. A*, 1982, **26**(5): 2977～2980

8 C. M. Cheng, P. C. W. Fung. The evolution operator technique in solving the Schrödinger equation and its application to disentangling exponential operators and solving the problem of a mass-varying harmonic oscillator [J]. *J. Phys. A*, 1988, **21**(22): 4115～4131

9 J. G. Hartley, J. R. Ray. Coherent states for the time-dependent harmonic oscillator[J]. *Phys. Rev. D*, 1982, **25**(2): 382～386

10 L. F. Wei, S. J. Wang, Q. L. Jie. Gauge covariant construction of the coherent states for a time-dependent harmonic oscillator by algebraic dynamical method[J]. *Z. Phys. B*, 1997, **102**(4): 541～543

11 Dai Hongyi, Li Chengzu, Chen Pingxing *et al.*. Generation of four-photon coherent states through far-off non-resonant interaction of Λ-type atom with cavity field of single mode[J]. *Acta Optica Sinica*, 2003, **23**(9): 1045～1048 (in Chinese)
戴宏毅，李承祖，陈平形 等. Λ型原子与单模光场的非共振作用制备四光子相干态[J]. 光学学报，2003，**23**(9)：1045～1048

12 Zhou Ming, Fang Jiayuan, Kong Fanzhi *et al.*. Influence of entangled-atoms pair on squeezing of field entropy [J]. *Acta Optica Sinica*, 2007, **27**(2): 340～343 (in Chinese)
周　明，方家元，孔凡志 等. 纠缠双原子对场熵压缩特性的影响[J]. 光学学报，2007，**27**(2)：340～343

13 Song Tongqiang, Zhu Yuejin. Nonclassical effects of the nonlinear pair coherent states[J]. *Acta Optica Sinica*, 2003, **23**(8): 906～909 (in Chinese)
宋同强，诸跃进. 非线性李相干态的光子统计性质[J]. 光学学报，2003，**23**(8)：906～909

14 Zhou Lu, Li Gaoxiang. Preparation of two-mode photon-added SU(2) coherent field and its properties in interaction with a Λ-type three level atom[J]. *Acta Optica Sinica*, 2003, **23**(3): 261～267 (in Chinese)
周　鲁，李高翔. 加光子双模 SU(2)相干光场的制备及其与Λ型三能级原子相互作用的性质[J]. 光学学报，2003，**23**(3)：261～267

15 Li Qing, Luo Qi, Qiu Zhiren *et al.*. Time-resolved femtosecond free-induction-decay in semiconductor[J]. *Acta Optica Sinica*, 2000, **20**(1): 114～117 (in Chinese)
李　青，罗　琦，丘志仁 等. GaAs 中的飞秒自由感应衰减[J]. 光学学报，2000，**20**(1)：114～117

16 Song Kehui. Preparation of the atomic entangled states with controllable weighting factors[J]. *Acta Optica Sinica*, 2001, **21**(1): 4～7 (in Chinese)
宋克慧. 可控制权重因子的原子纠缠态的制备[J]. 光学学报，2001，**21**(1)：4～7

17 Xi Dinping, Wei Lianfu, Li Xiongjun. Quantum statistics properties of coherent states associated with the q-analogue Boson inverse operataors [J]. *Acta Optica Sinica*, 1998, **18**(12): 1606～1610 (in Chinese)
奚定平，韦联福，李雄军. 与 q 形变玻色算符逆算符相关的相干态及其量子统计性质[J]. 光学学报，1998，**18**(12)：1606～1610

18 Xia Yunjie, Kong Xianghe, Yan Kezhu *et al.*. Incomplete coherente states[J]. *Chin. J. Lasers*, 1996, **A23**(3): 249～254 (in Chinese)
夏云杰，孔祥和，闫珂柱 等. 残缺相干态[J]. 中国激光，1996，**A23**(3)：249～254

19 V. I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics* [M]. New York: Springer-Verlag 2000. 451～461

20 R. M. Kulsrud. Adiabatic invariant of the harmonic oscillator [J]. *Phys. Rev.*, 1957, **106**(2): 205～210

21 M. Robnik, V. G. Romanovski, H. J. Stockmann. Exact energy distribution function in a time-dependent harmonic oscillator[J]. *J. Phys. A*, 2006, **39**(35): L551～L554

22 M. Robnik, V. G. Romanovski. Exact analysis of adiabatic invariants in the time-dependent harmonic oscillator [J]. *J. Phys. A*, 2006, **39**(1): L35～L41

23 S. J. Wang, F. L. Li, A. Weiguny. Algebraic dynamics and time-dependent symmetry of nonautonomous systems[J]. *Phys. Lett. A*, 1993, **180**(3): 189～196

24 A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev. *Handbook of Exact Solutions for ODEs* [M]. New York: CRC, 1995. 2～28

25 J. Janszky, P. Adam. Strong squeezing by repeated frequency jumps[J]. *Phys. Rev. A*, 1992, **46**(9): 6091～6092

26 C. F. Lo. Squeezing by tuning the oscillator frequency[J]. *J. Phys. A*, 1990, **23**(7): 1155～1165

27 M. F. Guasti. Analytic approximation to the harmonic oscillator equation with a sub-period time dependent parameter[J]. *Physica D*, 2004, **189**(3～4): 188～198

28 E. E. Fichard, V. Franco. Differential properties of Meijer's G-function[J]. *J. Phys. A*, 1980, **13**(7): 2331～2340

29 A. Verma. A note on expansions involving Meijer's G-functions [J]. *Mathematics of Computation*, 1967, **21**(97): 107～112

30 J. Boersma. On a function which is a special case of Meijer's-G-functions[J]. *Compositio Mathematica*, 1962, **15**(1): 34～63

附录　方程(2)的求解过程

经过正文中的规范变换(7)后，方程(3)变为

$$\dot{\bar{\varphi}} = \boldsymbol{L}\bar{\varphi}\,, \tag{A-1}$$

其中，规范变换后的刘维算子 $\boldsymbol{L}$ 为

$$\boldsymbol{L} = U^{-1}\boldsymbol{L}U - U^{-1}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} v_- + v_-^2 v_+ + [\omega^2(t) + \dot{v}_-]v_+ & 1 + 2v_+ v_- + \omega^2(t)v_+^2 + v_+^2 v_-^2 + v_+^2 \dot{v}_- - \dot{v}_+ \\ -\omega^2(t) - v_-^2 - \dot{v}_- & -v_- - v_-^2 v_+ - [\omega^2(t) + \dot{v}_-]v_+ \end{bmatrix}, \tag{A-2}$$

一种最佳的规范选择就是通过选取规范变换参量 $v_+(t)$ 和 $v_-(t)$ 使之满足方程(9),在这种特殊的规范变换下,规范刘维算子 $\boldsymbol{L}$ 变为

$$\boldsymbol{L} = 2v_-(t)\begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix} = 2v_-(t)\boldsymbol{k}_0 = f(t)\boldsymbol{I}, \tag{A-3}$$

基于以上的这些结果,很容易得到规范正则变量 $\bar{x}$ 和 $\bar{p}$ 分别为

$$\bar{x}(t) = \bar{x}(0)\exp\left[\frac{1}{2}\int_0^t f(t')\mathrm{d}t'\right], \tag{A-4a}$$

$$\bar{p}(t) = \bar{p}(0)\exp\left[-\frac{1}{2}\int_0^t f(t')\mathrm{d}t'\right], \tag{A-4b}$$

其中 $\bar{x}(0)$ 和 $\bar{p}(0)$ 是 $\bar{x}$ 和 $\bar{p}$ 的初值。

方程(8) 实际是用 $\bar{x}$ 和 $\bar{p}$ 表示 x 和 p。对方程(8) 稍作变换,就可以得到如下关系

$$\begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x} + v_+ \bar{p} \\ v_- \bar{x} + (1 + v_+ v_-)\bar{p} \end{bmatrix}, \tag{A-5}$$

综合方程(A-4)和(A-5),很容易就得到原方程(2)的通解,即正文中的式(11a)和(11b)。