

文章编号: 0253-2239(2007)10-1846-6

在轴高斯波束入射无限长多层圆柱散射的 德拜级数解*

李海英 吴振森

(西安电子科技大学理学院, 西安 710071)

摘要: 不均匀柱形粒子的光散射特性研究对复杂结构粒子参量的反演具有重要意义。基于德拜理论,对在轴高斯波束垂直入射无限长多层圆柱的散射特性进行了讨论。获得了散射系数的德拜级数展开式;并利用该公式分别计算了均匀和双层圆柱的总散射强度角分布,德拜级数单阶散射强度角分布;总散射强度结果与广义米氏理论(GLMT)进行了比较,两者吻合很好。分析表明圆柱散射强度不同散射角区间的值来自德拜级数不同阶的散射强度贡献;双层圆柱各层半径和折射率的值对德拜级数二阶散射强度角分布中峰值的出现起决定作用。当双层圆柱的外层较薄时,在 $120^\circ\sim 150^\circ$ 之间会出现两个明显峰值,即出现双重一阶彩虹峰值;反之,当外层厚度大于内层时,只有一个峰值存在。

关键词: 物理光学; 多层圆柱散射; 德拜级数解; 高斯波束

中图分类号: O436.2 文献标识码: A

Debye Series of Scattering by an Infinite Multi-Layered Cylinder in an on-Axis Gaussian Beam

Li Haiying Wu Zhensen

(Science School Xidian University, Xi'an 710071)

Abstract: Scattering characteristic of an inhomogeneous cylindrical particle plays an important role in the measurement of parameters of complicated particles. Based on Debye theory, scattering by an infinite multi-layered cylinder in an on-axis Gaussian beam is discussed in detail. Scattering coefficient formulas of Debye series are obtained. With the formulas, distributions of total scattering intensities, Debye component scattering intensities by a homogeneous and a two-layered cylinder are calculated. And the results of total scattering intensities are in line with those of generalized Lorentz Mie theory. It is indicated that the different scattering angle interval of total scattering intensities comes from the contribution of different-order scattering intensities. Presence of two maximums in two order scattering intensities of Debye series is determined by radius and refractive index of a two-layered cylinder. For a two layered cylinder with a thin shell, there are two maximums between 120° and 150° , which is called dual first-order rainbow. Otherwise, when the external layer is thicker than the inner one, there is only one maximum.

Key words: physical optics; scattering by an infinite multi-layered cylinder; Debye-series solution; Gaussian beam

1 引 言

高分子化合物和光纤等材料与社会生活生产的关系越来越密切,这使得对它们的研究越发重要。其中,在对这些物质的散射特性进行光散射分析时,

一般是将其视为折射率不均匀的圆柱形粒子。所以研究不均匀无限长圆柱的散射特性是必要的。

有关小粒子的光和电磁散射一直是众多学者和专家研究的兴趣^[1~6]之一,圆柱形粒子的研究便是

* 国家自然科学基金(60371020)资助课题。

作者简介: 李海英(1982-),女,山东泰安人,博士研究生,主要从事复杂粒子体系光电磁散射、等离子体中波特性等方面的研究。E-mail: lhy882819@sina.com

导师简介: 吴振森(1946-),男,湖北沙市人,教授,博士生导师,主要从事复杂目标与环境光电散射、随机介质中的波传播与散射、等离子体物理特性等方面的研究。E-mail: wuzhs@mail.xidian.edu.cn

收稿日期: 2006-06-26; 收到修改稿日期: 2006-11-27

其中重要的一部分。对平面波和高斯波束入射无限长均匀圆柱,已有很多结论。例如:最早的广义米氏理论精确解,以及 1997 年 Lock 分别用辐射势理论^[2]和德拜(Debye)级数展开^[3]计算的均匀圆柱散射特性等。而对无限长多层圆柱的散射也有较多的研究结果,例如:吴振森、郭立新和韩香娥等人分别计算了垂直入射时无限长圆柱的内外场和散射场分布^[4]、在轴与离轴高斯波束对多层圆柱粒子的电磁散射特性^[5],以及不均匀球的彩虹效应^[6]等。尽管有关圆柱粒子的散射已有许多结果,但对波束入射时利用德拜级数展开分析无限长多层圆柱的散射未有详细讨论。德拜级数展开是把米氏理论散射系数中的每一项用另一个无穷级数展开,这样可单独分析对散射场有贡献的因素,对于研究粒子的散射特性有重要意义。本文将就无限长多层圆柱对高斯波束散射的德拜级数解进行研究并以双层圆柱为例对德拜级数分量与彩虹现象之间的关系进行分析。

2 柱坐标下离轴高斯波束的形状因子

设入射波束沿 x 轴的正方向传播,电场极化方向沿圆柱轴线方向(z 轴),磁场则沿垂直于圆柱轴的方向(TM 模式)。时间变量因子 $\exp(-i\omega t)$ 被省略。假设柱面高斯波束的焦点在 $(-x_0, y_0)$ 。入射波束与多层圆柱粒子的相对位置如图 1 所示。

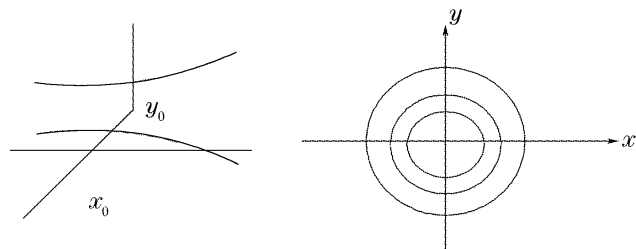


图 1 离轴高斯波束入射多层圆柱光散射几何图

Fig. 1 Geometry for light scattering by multilayered cylinder in off-axis incident Gaussian beam

对 TM 模式而言,电场只有一个 z 轴分量。则在 $x = x_0$ 平面上振幅 E_z 的空间分布为

$$E_z(-x_0, y, z) = E_0 \exp\left[-\frac{(y-y_0)^2}{W_0^2}\right], \quad E_y(-x_0, y, z) = 0, \quad (1)$$

其中 W_0 是波束半径。在直角坐标系下的场分量用平面波的角谱展开^[4]得

$$E_x(x, y, z) = 0, \quad E_y(x, y, z) = 0, \\ E_z(x, y, z) = \frac{E_0 \sqrt{\pi} W_0}{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{4} k^2 W_0^2 q^2\right) \exp[ik p(x+x_0) + ikq(y-y_0)] dq, \quad (2)$$

其中 $p^2 + q^2 = 1$ 。将(2)式在柱坐标系下展开为

$$E_z(\rho, \varphi, z) = \frac{E_0 \sqrt{\pi} W_0}{\lambda} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(k\rho) \exp(in\varphi) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{4} k^2 W_0^2 q^2 + ik p x_0 - ikq y_0 - in\gamma\right) dq, \quad (3)$$

且 E_z 也可以用柱谱函数展开如下:

$$E_z(\rho, \varphi, z) = E_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n i^n J_n(k\rho) \exp(in\varphi), \quad (4)$$

其中 $C_n (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 是波束形状因子。通过比较(3)式和(4)式可得

$$C_n = \frac{\sqrt{\pi} W_0}{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{4} k^2 W_0^2 q^2 + ik \sqrt{1-q^2} x_0 - ikq y_0 - in \arcsin q\right) dq, \quad (5)$$

式中 $p = \sqrt{1-q^2}$, $\gamma = \arcsin q$ 。通过引入 $l = kW_0^2$, $Q_0 = (i - 2x/l)^{-1}$, $s = 1/(kW_0)$, 波束形状因子^[5]可近似为

$$C_{n1} = \left[1 + \left(\frac{n}{6}\right) (s \sqrt{2iQ_0})^3 (z^3 - 3z)\right] C_{n0}, \quad (6)$$

其中 $z = s \sqrt{2iQ_0} (n + ky_0)$, $C_{n0} = \exp(ikx_0) \sqrt{iQ_0} \exp\left[-iQ_0 \frac{(ky_0 + n)^2}{W_0^2}\right]$, 将 C_{n0} 中 y_0 取为零, 则得到在轴高斯波束的形状因子。

3 在轴高斯波束垂直入射无限长均匀圆柱散射场的德拜级数解

为方便分析多层圆柱的散射,首先将无限长均匀圆柱的德拜展开进行简单叙述。如图 2 所示半径为 r ,

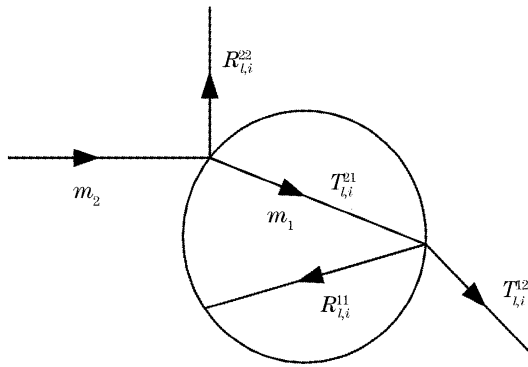


图 2 菲涅耳系数描述

Fig. 2 Profile of Fresnel coefficients

折射率为 m_1 的均匀介质圆柱置于折射率为 m_2 的均匀媒质中。当波长为 λ , 束腰宽度为 W_0 的高斯波束[时谐因子为 $\exp(-i\omega t)$]垂直照射时, 水平和垂直极化散射强度^[7]分别为

$$I_1(\theta) = |T_{l1}(\theta)|^2, \quad I_2(\theta) = |T_{l2}(\theta)|^2, \quad (7)$$

其中振幅散射矩阵分量:

$$\begin{cases} T_{l1} = b_0 + 2 \sum_{l=1}^{\infty} b_l \cos(l\theta), \\ T_{l2} = a_0 + 2 \sum_{l=1}^{\infty} a_l \cos(l\theta), \end{cases} \quad (8)$$

(8)式中散射系数公式^[2]为

$$a_l^1 = \frac{1}{2} C_l \left(1 - R_{l,\epsilon}^{22} - T_{l,\epsilon}^{21} T_{l,\epsilon}^{12} - T_{l,\epsilon}^{21} \frac{R_{l,\mu}^{11}}{1 - R_{l,\mu}^{11}} T_{l,\epsilon}^{12} \right) = \frac{1}{2} C_l \left[1 - R_{l,\epsilon}^{22} - \sum_{p=1}^{\infty} T_{l,\epsilon}^{21} (R_{l,\epsilon}^{11})^{p-1} T_{l,\mu}^{12} \right], \quad (9)$$

$$b_l^1 = \frac{1}{2} C_l \left(1 - R_{l,\mu}^{22} - T_{l,\mu}^{21} T_{l,\mu}^{12} - T_{l,\mu}^{21} \frac{R_{l,\mu}^{11}}{1 - R_{l,\mu}^{11}} T_{l,\mu}^{12} \right) = \frac{1}{2} C_l \left[1 - R_{l,\mu}^{22} - \sum_{p=1}^{\infty} T_{l,\mu}^{21} (R_{l,\mu}^{11})^{p-1} T_{l,\mu}^{12} \right], \quad (10)$$

其中 C_l 是由第二部分中 C_n 退化得到柱坐标下在轴高斯波束的波束形状因子 C_{n1} 。角标 ϵ 表示 TE 波, μ 表示 TM 波。菲涅耳系数 $R_{l,i}^{22}, R_{l,i}^{11}, T_{l,i}^{12}, T_{l,i}^{21}$ 的物理解释如图 2 所示。利用 Bromwich 公式解得其具体表达式^[2]如下:

$$R_{l,i}^{22} = -\frac{\alpha H_l^{(2)}(m_2 kr) H_l^{(2)'}(m_1 kr) - \beta H_l^{(2)'}(m_2 kr) H_l^{(2)}(m_1 kr)}{\alpha H_l^{(1)}(m_2 kr) H_l^{(2)'}(m_1 kr) - \beta H_l^{(1)'}(m_2 kr) H_l^{(2)}(m_1 kr)}, \quad (11)$$

$$R_{l,i}^{11} = -\frac{\alpha H_l^{(1)}(m_2 kr) H_l^{(1)'}(m_1 kr) - \beta H_l^{(1)'}(m_2 kr) H_l^{(1)}(m_1 kr)}{\alpha H_l^{(1)}(m_2 kr) H_l^{(2)'}(m_1 kr) - \beta H_l^{(1)'}(m_2 kr) H_l^{(2)}(m_1 kr)}, \quad (12)$$

$$T_{l,i}^{21} = \frac{-4im_2}{\pi} \frac{1}{D_i}, \quad T_{l,i}^{12} = \frac{-4i}{\pi m_2 kr} \frac{1}{D_i}, \quad (13)$$

$$D_i = \begin{cases} m_2 H_l^{(1)}(m_2 kr) H_l^{(2)'}(m_1 kr) - m_1 H_l^{(1)'}(m_2 kr) H_l^{(2)}(m_1 kr), & i = \epsilon \\ m_1 m_2 H_l^{(1)}(m_2 kr) H_l^{(2)'}(m_1 kr) - m_2^2 H_l^{(1)'}(m_2 kr) H_l^{(2)}(m_1 kr). & i = \mu \end{cases} \quad (14)$$

4 在轴高斯波束垂直入射无限长多层圆柱散射场的德拜级数展开

下面采用与多层球的德拜级数解^[8]类似的思路对无限长多层圆柱的散射系数进行分析。首先考虑双层圆柱的情况。由(9)式和(10)式, 设

$$Q_{l,i}^2 = R_{l,i}^{22} + T_{l,i}^{21} T_{l,i}^{12} + T_{l,i}^{21} \frac{R_{l,i}^{11}}{1 - R_{l,i}^{11}} T_{l,i}^{12} = R_{l,i}^{22} + \frac{T_{l,i}^{21} T_{l,i}^{12}}{1 - R_{l,i}^{11}}, \quad (15)$$

第一项表示均匀圆柱外表面反射波, 第二项是透射波经过无数次圆柱内表面反射又透射出去的波的总和。因此考虑双层圆柱时, 可将最内层对入射波的作用表示为 $Q_{l,i}^2$, 则可得到两层对入射波的总作用为

$$Q_{l,i}^3 = R_{l,i}^{323} + (T_{l,i}^{32} Q_{l,i}^2 T_{l,i}^{23}) / (1 - R_{l,i}^{232} Q_{l,i}^2), \quad (16)$$

则散射系数表示为

$$a_l^2 = \frac{1}{2} C_l \left(1 - R_{l,\epsilon}^{323} - \frac{T_{l,\epsilon}^{32} Q_{l,\epsilon}^2 T_{l,\epsilon}^{23}}{1 - R_{l,\epsilon}^{232} Q_{l,\epsilon}^2} \right) = \frac{1}{2} C_l (1 - Q_{l,\epsilon}^3),$$

$$b_l^2 = \frac{1}{2} C_l \left(1 - R_{l,\mu}^{323} - \frac{T_{l,\mu}^{32} Q_{l,\mu}^2 T_{l,\mu}^{23}}{1 - R_{l,\mu}^{232} Q_{l,\mu}^2} \right) = \frac{1}{2} C_l (1 - Q_{l,\mu}^3),$$

同理可得当多层圆柱具有 n 层时, 迭代(15)式可改为

$$Q_{l,i}^n = R_{l,i}^{n,n-1,n} + \frac{T_{l,i}^{n,n-1} Q_{l,i}^{n-1} T_{l,i}^{n-1,n}}{1 - R_{l,i}^{n-1,n,n-1} Q_{l,i}^{n-1}}, \quad (i = \epsilon, \mu)$$

初始值为(15)式。则, 散射系数和各层的反射系数和透射系数分别由(17)式, (18)式和(19)式, (20)式, (21)式给出:

$$a_l = \frac{1}{2}C_l(1 - Q_{l,\epsilon}^{n+1}) = \frac{1}{2}C_l \left(1 - R_{l,\epsilon}^{n+1,n,n+1} - \frac{T_{l,\epsilon}^{n+1,n} Q_{l,\epsilon}^n T_{l,\epsilon}^{n,n+1}}{1 - R_{l,\epsilon}^{n,n} Q_{l,\epsilon}^n} \right) = \frac{1}{2}C_l \left[1 - R_{l,\epsilon}^{n+1,n,n+1} - \sum_{p=1}^{\infty} T_{l,\epsilon}^{n+1,n} Q_{l,\epsilon}^n (Q_{l,\epsilon}^n R_{l,\epsilon}^{n,n+1,n})^{p-1} T_{l,\epsilon}^{n,n+1} \right], \tag{17}$$

$$b_l = \frac{1}{2}C_l(1 - Q_{l,\mu}^{n+1}) = \frac{1}{2}C_l \left(1 - R_{l,\mu}^{n+1,n,n+1} - \frac{T_{l,\mu}^{n+1,n} Q_{l,\mu}^n T_{l,\mu}^{n,n+1}}{1 - R_{l,\mu}^{n,n} Q_{l,\mu}^n} \right) = \frac{1}{2}C_l \left[1 - R_{l,\mu}^{n+1,n,n+1} - \sum_{p=1}^{\infty} T_{l,\mu}^{n+1,n} Q_{l,\mu}^n (Q_{l,\mu}^n R_{l,\mu}^{n,n+1,n})^{p-1} T_{l,\mu}^{n,n+1} \right], \tag{18}$$

$$R_i^{j+1,j,j+1} = -\frac{\beta D^{(4)}(m_j k r_j) - \alpha D^{(4)}(m_{j+1} k r_j)}{\beta D^{(4)}(m_j k r_j) - \alpha D^{(3)}(m_{j+1} k r_j)} \cdot \frac{H_l^{(2)}(m_{j+1} k r_j)}{H_l^{(1)}(m_{j+1} k r_j)}, \tag{19}$$

$$R_i^{j,j+1,j} = -\frac{\beta D^{(3)}(m_j k r_j) - \alpha D^{(3)}(m_{j+1} k r_j)}{\beta D^{(4)}(m_j k r_j) - \alpha D^{(3)}(m_{j+1} k r_j)} \cdot \frac{H_l^{(1)}(m_{j+1} k r_j)}{H_l^{(2)}(m_{j+1} k r_j)}, \tag{20}$$

$$T_i^j = T_i^{j+1,j} \cdot T_i^{j,j+1} = \frac{m_j}{m_{j+1}} \frac{D^{(4)}(m_j k r_j) - D^{(3)}(m_j k r_j)}{\beta D^{(4)}(m_j k r_j) - \alpha D^{(3)}(m_{j+1} k r_j)} \cdot \frac{H_l^{(1)}(m_j k r_j)}{H_l^{(2)}(m_j k r_j)} \cdot \frac{D^{(4)}(m_{j+1} k r_j) - D^{(3)}(m_{j+1} k r_j)}{\beta D^{(4)}(m_j k r_j) - \alpha D^{(3)}(m_{j+1} k r_j)} \cdot \frac{H_l^{(2)}(m_{j+1} k r_j)}{H_l^{(1)}(m_{j+1} k r_j)}, \tag{21}$$

当 $i = \epsilon$ 时, $\alpha = m_j/m_{n+1}, \beta = 1$; 当 $i = \mu$ 时, $\alpha = 1, \beta = m_j/m_{n+1}$ 。其中 $H_l^{(i)}(\rho) (i = 1, 2)$ 是汉开尔函数, $D^{(i)}(\rho) = H_l^{(i)'}(\rho)/H_l^{(i)}(\rho)$ 是汉开尔函数的对数导数。

5 数值计算

由于德拜级数理论在彩虹现象的分析中有很大的优点,且在圆柱的彩虹强度中 TM 波占主要部分;因此,本文重点讨论 TM 波的散射。文中所有图的纵坐标均为 TM 波的散射强度的对数导数值。入射波长均为 $0.6328 \mu\text{m}$,圆柱轴心与波束中心的距离 x_0 均为 $0 \mu\text{m}$ 。

5.1 算法检验

为检验所得公式的正确性,本节将多层不均匀无限长圆柱的计算程序退化数值模拟了均匀圆柱的散射强度分布,结果与广义米氏理论的解进行了比较。并利用德拜级数展开计算了单阶散射强度分布,分析了单阶散射强度分布对总散射强度的影响。

图 3,图 4 所采用的计算参量:圆柱半径为 $r = 300 \mu\text{m}$,相对折射率为 $m = 1.330$ 。图 3 是波束腰宽 $W_0 = 100 \mu\text{m}$ 时本文算法和广义米氏理论比较,由图知两者吻合较好。图 4 是不同束腰宽的高斯波束和平面波入射时散射强度比较,很明显随着束腰半径逐渐增大散射强度分布逐渐趋近于平面波结果。因此,当束腰半径增加到一定值时,波束的散射问题可用平面波近似代替来求解。

图 5 给出了不同束腰半径,不同 x_0 时,均匀圆柱的散射强度分布。由图知:束腰半径对散射强度分布的影响较大;当对同一束腰半径情况,改变 x_0 的大小对散射强度值影响并不大。

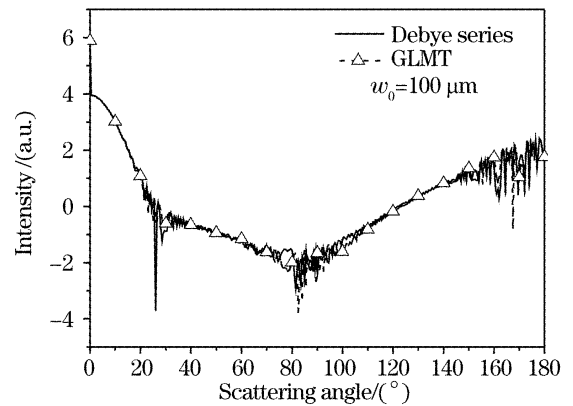


图 3 德拜级数和广义洛仑兹米氏理论方法散射强度比较
Fig. 3 Comparison of scattering intensities between Debye series and GLMT

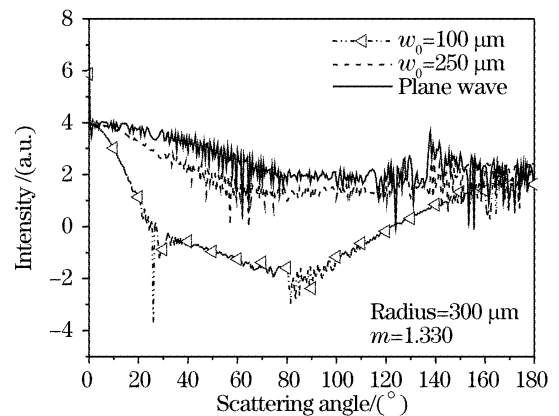


图 4 高斯波束和平面波入射均匀圆柱的散射强度比较
Fig. 4 Comparison of scattering intensities between Gaussian beam and plane wave

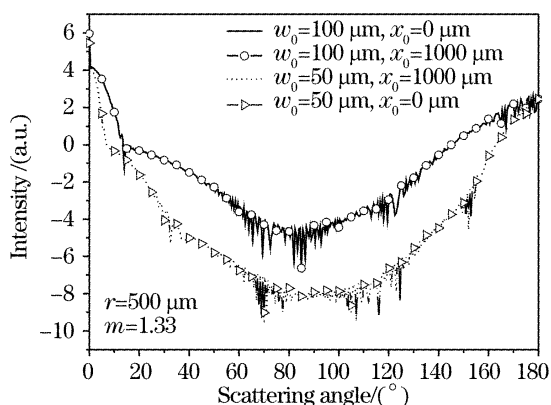


图 5 不同尺寸参量的均匀柱散射强度比较

Fig. 5 Comparison of scattering intensities homogeneous cylinder with different x_0

图 6 是利用德拜级数展开计算的单阶散射强度分布,参量与图 3 相同。阶数 p 指由空间透射入圆柱粒子的光线在透射出圆柱之前在其内表面发生反射的次数, $p-1$ 对应彩虹理论中的彩虹的阶数。由图知各阶分量对总散射场的影响与光线在圆柱内发生反射的次数有关,在散射角某些区域,经历一定次数内反射的单阶散射强度表现得强,而另外的则较弱;二阶和五阶彩虹^[9]以及三阶和四阶彩虹都有重叠部分,因此彩虹技术中利用高阶彩虹来进行粒度分析时,不能简单的考虑某阶彩虹的作用。

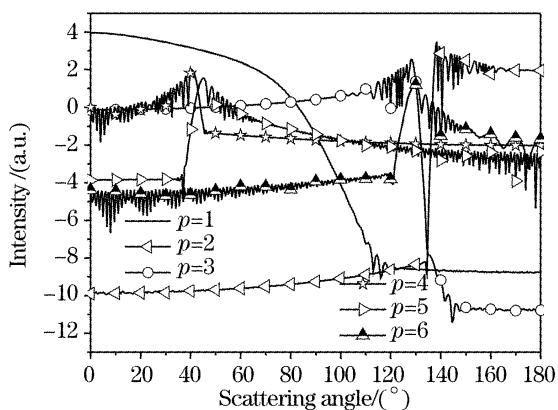


图 6 德拜级数解的单阶散射强度分布

Fig. 6 Distribution of single-order scattering intensities of Debye-series solution

5.2 双层圆柱单阶散射强度分布

下面以双层圆柱为例,利用德拜级数展开计算了单阶散射强度分布。图 7、图 8、图 9 是 $p=2$ 阶的散射强度随散射角的变化。

图 7 中给出了双层柱和均匀柱的单阶强度比较。其中,均匀柱的参量与图 3 一致,双层柱的内外半径和折射率与图 8 中的值一致。由图 7 可知两者均在 139° 左右有一个峰值,区别是对双层圆柱在 130° 左右还有一个峰值。由于第一级彩虹效应主要

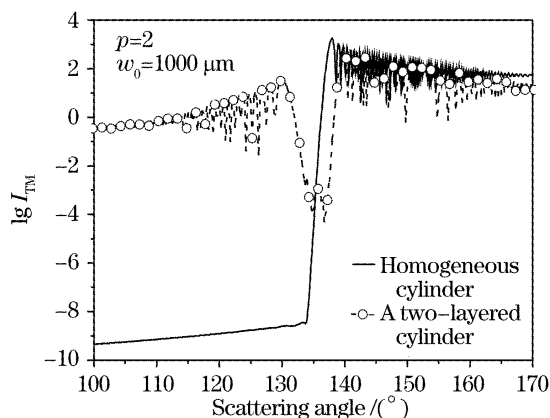


图 7 均匀圆柱和双层圆柱的二阶散射强度比较

Fig. 7 Comparison of the second-order scattering intensities between homogeneous cylinder and two-layered cylinder

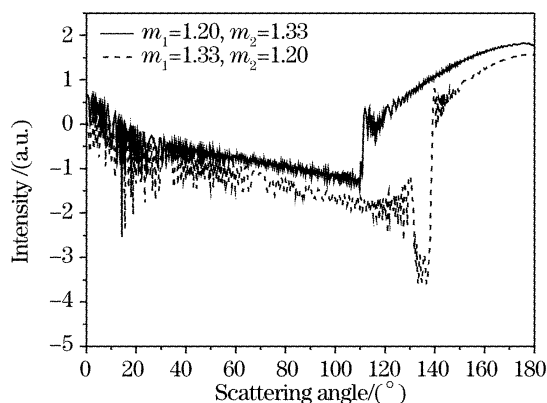


图 8 不同折射率分布的双层圆柱的单阶散射强度比较

Fig. 8 Comparison of single order scattering intensities by two-layered cylinder with different refractive indexes

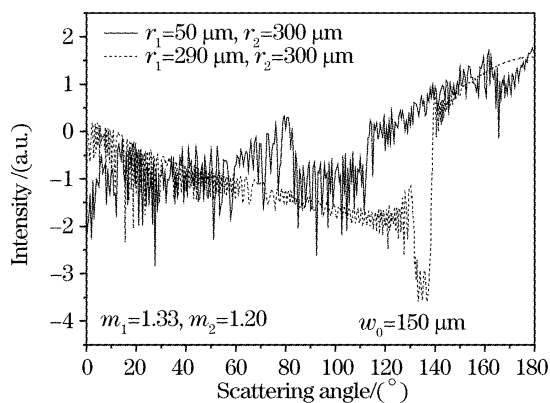


图 9 不同内外半径的双层圆柱的单阶散射强度比较

Fig. 9 Comparison of single-order scattering intensities by two-layered cylinder with different internal and external radius

对应于德拜级数二阶散射强度分布,这两个峰值实际对应的是双重一级彩虹现象^[10]。产生这种情况的原因如图 10 所示。图 8 和图 9 是分别改变双层圆柱不同层的折射率与半径时单阶散射强度的分布,由两图知 $p=2$ 阶散射强度出现的双峰值与双层圆柱各层的折射率和各层的半径有直接的关系,

也就是指双重一阶彩虹现象的产生与粒子的折射率分布,粒径分布有关。且由图 10 知当圆柱粒子具有 n 层,且相邻层的半径比例不太大时,理论上应该会出现 n 峰值点;但若出现两者比例很大,峰值可能会消失。例如对双层圆柱,当内层半径非常小时,其中一个峰值消失。

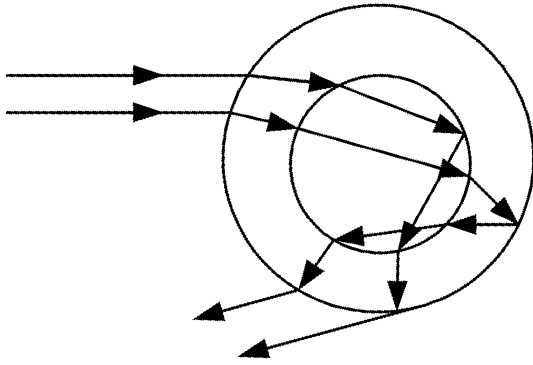


图 10 双重一阶彩虹的形成原理

Fig. 10 Formation of dual first-order rainbow

6 结 论

基于德拜理论计算了多层圆柱对垂直入射高斯波束的光散射特性,获得了德拜级数展开的多层圆柱递推公式。利用得到的公式数值计算了均匀圆柱散射强度随散射角的变化,并与广义米氏理论解进行了比较证明所得公式的正确性。作为应用,计算了单阶散射强度随双层圆柱的折射率分布和内外半径的变化。分析表明圆柱散射强度角分布的不同区域来自德拜级数不同阶的散射强度的贡献。由于第一级彩虹效应主要对应于德拜级数二阶散射强度分布,当双层圆柱的外层较薄时,在 $120^\circ \sim 150^\circ$ 之间会出现两个明显峰值。即出现双重一级彩虹峰值。因此可以利用德拜级数展开分析不均匀圆柱中的彩虹

现象,进而可以研究不均匀圆柱粒子折射率和尺寸分布问题。

参 考 文 献

- 1 Han Yiping, Du Yungang. Electromagnetic scattering for a non-spherical aerosols with arbitrary shaped beam[J]. *Acta Optica Sinica*, 2006, **26**(4): 630~633 (in Chinese)
韩一平,杜云刚. 非球形大气粒子对任意波束的电磁散射特性[J]. *光学学报*, 2006, **26**(4): 630~633
- 2 J. A. Lock. Scattering of a diagonally incident focused Gaussian beam by an infinitely long homogeneous circular cylinder[J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1997, **14**(3): 640~652
- 3 J. A. Lock, C. L. Adler. Debye-series analysis of the first-order rainbow produced in scattering of a diagonally incident plane wave by a circular cylinder[J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1997, **14**(6): 1316~1328
- 4 Z. Wu, L. Guo, S. Cui. Internal and external electromagnetic fields for multilayered cylinder at normal incidence [J]. *Acta Electronica Sinica*, 1995, **63**(6): 114~116 (in Chinese)
吴振森,郭立新,崔索民. 垂直入射无限长多层介质圆柱的内、外场计算[J]. *电子学报*, 1995, **63**(6): 114~116
- 5 Z. Wu, L. Guo. Electromagnetic scattering from a multilayered cylinder arbitrarily located in a Gaussian beam, a new recursive algorithms [M]. *Progress in Electromagnetic Research*, EMW Publishing, Cambridge, Massachusetts, USA, 1998, 18. 317~333
- 6 Han Xiang'e, Ren Kuanfang, Grehan G *et al.*. Rainbow and its applications to nonhomogenous sphere[J]. *Acta Optica Sinica*, 2003, **23**(6): 712~716 (in Chinese)
韩香娥,任宽芳, Grehan G 等. 彩虹及其在非均匀球中的应用[J]. *光学学报*, 2003, **23**(6): 712~716
- 7 C. F. Bohren, D. R. Huffman. *Absorption and Scattering of Light by Small Particles* [M]. Wiley, New York, 1983. 201~206
- 8 R. Li, X. 'e Han, H. Jiang *et al.*. Debye series for light scattering by a multilayered sphere[J]. *Appl. Opt.*, 2006, **45**(6): 1260~1270
- 9 Jiang Huifen, Han Xiang'e, Ren Kuanfang *et al.*. Reconstruction of intensity of the second and fifth rainbows and its applications to homogeneous droplet[J]. *Acta Optica Sinica*, 2004, **24**(11): 1561~1565 (in Chinese)
姜慧芬,韩香娥,任宽芳 等. 均匀球形液滴二阶和五阶彩虹的重建和应用[J]. *光学学报*, 2004, **24**(11): 1561~1565
- 10 James A. Lock, J. Michael Jamison, Chih-Yang Lin. Rainbow scattering by a coated sphere[J]. *Appl. Opt.*, 1994, **33**(21): 4677~4690