

文章编号: 0253-2239(2006)09-1345-5

## 亚像素多重分形方法在图像处理中的应用\*

王 刚<sup>1,2</sup> 肖 亮<sup>3</sup> 姜志静<sup>4</sup> 宋一中<sup>5</sup> 贺安之<sup>1</sup>

1 南京理工大学信息物理与工程系, 南京 210094  
2 鲁东大学物理与电子工程学院, 烟台 264025  
3 南京理工大学计算机科学与技术学院, 南京 210094  
4 鲁东大学图书馆, 烟台 264025  
5 烟台大学光电信息科学技术学院, 烟台 264000

**摘要:** 提出了一种用亚像素多重分形原理求取图像奇异性的新型算法,降低了单纯依靠整数像素位置灰度级梯度信息计算边缘测度所产生的误差。该算法结合 CCD 成像机理给出在亚像素位置的灰度级梯度分布规律,利用多重分形理论将实际图像分割成一系列具有不同奇异性指数的分形集合,对应着从边缘到纹理各层面的图像内容。模拟计算了投影小波中心点改变单位距离对边缘测度的影响程度,得出亚像素分割梯度的方法可以增加计算结果鲁棒性的结论。此方法用于标准图像的分割中,选用  $5 \times 5$  亚像素数目提取的最奇异性集合与索贝尔(Sobel)算子(默认阈值为 36.7920)提取的边缘的峰值信噪比为 9.3981 dB。应用于复杂路面的裂纹提取中,其结果更符合人类的视觉观测。

**关键词:** 图像处理; 亚像素; 多重分形; 边缘测度; 最奇异流形

中图分类号: TP751 文献标识码: A

## Sub-Pixel Multifractal Method for Image Processing Application

Wang Gang<sup>1,2</sup> Xiao Liang<sup>3</sup> Jiang ZhiJing<sup>4</sup> Song Yizhong<sup>5</sup> He Anzhi<sup>1</sup>

1 Department of Information Physics and Engineering, Nanjing University of Science & Technology, Nanjing 210094  
2 School of Physics and Electronic Engineering, Ludong University, Yantai 264025  
3 School of Computer Science and Technology, Nanjing University of Science & Technology, Nanjing 210094  
4 Library of Ludong University, Yantai 264025  
5 School of Information Technology and Photo-Electronics, Yantai University, Yantai 264000

**Abstract:** A new implement algorithm is proposed to acquire the singularities of image based on sub-pixel multifractal method. The method reduces the errors of the edge measure simply generated by the gray level gradient value at the integer pixel position. The gray pixel level gradient distribution law at the position of sub-pixel is acquired by the algorithm combining CCD imaging mechanism. Utilizing the multifractal frame, the image is segmented into a series fractal sets of the different singularity exponents, corresponding to the image ranging from the edge to the texture. Moreover, the image edge information containing random details can be obtained through the method mentioned above. The influence degree of edge measure is simulated by varying unit distance of wavelet center projection. The results show that the method of sub-pixel dividing gradient can increase measurement robustness. Comparing most singular manifold extracted from  $5 \times 5$  sub-pixel method and edge from Sobel operator (default threshold: 36.7920), the peak signal-to-noise ratio is 9.3981 dB, when the algorithm is used in standard image segmentation. Applied on the surface cracks extraction of complex background, the results agree with the human visual reception better.

**Key words:** image processing; sub-pixel; multifractal; edge measure; most singular manifold

\* 江苏省自然科学基金(BK2006569)、南京理工大学青年学者基金(200401)和中国博士后科学基金(2004036121)资助课题。

作者简介: 王 刚(1970~),男,山东潍坊人,博士,主要从事模式识别与图像处理的研究。E-mail: happy\_wg@163.com

导师简介: 贺安之(1938~),男,四川遂宁人,南京理工大学教授,博士生导师,主要从事激光与现代光学的教学与研究。

E-mail: haz@mail.njust.edu.cn

收稿日期: 2005-11-21; 收到修改稿日期: 2006-03-01

## 1 引 言

图像分割方法已有很多种<sup>[1]</sup>,多重分形分析能够从局部和全局两方面充分地描述图像的奇异性结构,其局部特性可以从奇异性指数获得,而全局特性可以从奇异性指数的几何特性和概率分布(即多重分形频谱)获得,它尤其适合于一些难以建模的不规则图像的处理和分析。由于多重分形分析具有良好的局部性和全局性,因此为图像边缘检测提供了一种新的途径。Vehel<sup>[2]</sup>系统总结了图像分析中的多重分形方法并提出了基于多重分形的图像分割和增强方法,2000年,Decoster等<sup>[3]</sup>提出基于小波模极大值算法的多重分形图像分析方法,国内吴更石等<sup>[4]</sup>提出了基于分形维数的纹理图像分割,但是他们都没有提出从最锐利边缘到纹理各层面奇异性集合重构相应图像的方法,因此无法分析各层面奇异性的视觉重要性和相关性。1998~2002年,A. Turiel等<sup>[5~7]</sup>通过定义图像中像素局部范围内衬比度的梯度积分作为测度 $\mu$ ,提出基于速降函数投影的图像多重分形分解方法,并提出由最奇异流形(MSM)(图像边缘及其边缘上的梯度信息)重建整幅图像的算法;本文在A. Turiel等工作成果的基础上,给出了基于数字图像亚像素位置梯度分布参量的估计方法,并且提出了一种亚像素多重分形频谱分析的图像边缘检测方法,以及该方法的实验结果。

## 2 多重分形理论分析

设灰度图像记为 $I(\mathbf{x}) : \Theta \rightarrow R^1$ , $\mathbf{x}$ 表示图像的坐标向量, $\Theta$ 为图像的定义域。定义测度 $\mu$ 的密度为 $d\mu(\mathbf{x}) = |\nabla I|(\mathbf{x})d(\mathbf{x})$ 。 $|\nabla I|(\mathbf{x})$ 表示给定图像的空域梯度的模,令 $A$ 为图像 $I(\mathbf{x})$ 像素域的任意子集,赋予子集 $A$ 的正测度 $\mu(A) = \int_A d\mathbf{x} |\nabla I|(\mathbf{x})$ ,称

$\mu(A)$ 为子集 $A$ 的边缘测度, $\mu(A)$ 表征了子集 $A$ 内图像相当不规则的行为。则对于距离原点为 $\mathbf{x}$ 的像素为中心,半径为 $r$ 的局部邻域球的边缘测度可以写为

$$\mu[B_r(\mathbf{x})] = \int_{B_r(\mathbf{x})} d\mathbf{y} |\nabla I|(\mathbf{y}), \quad (1)$$

(1)式给出了对于某个像素局部邻域灰度值的变化强弱。对于大量的不同纹理特性的自然图像作统计实验分析<sup>[6]</sup>,边缘测度与尺度 $r$ 服从如下幂指数关系:

$$\mu[B_r(\mathbf{x})] = \alpha(\mathbf{x})r^{d+h(\mathbf{x})} + o[r^{d+h(\mathbf{x})}], \quad (2)$$

这里 $\alpha(\mathbf{x})$ 为与尺度 $r$ 无关的量, $d$ 为空间维数,对二维的自然图像而言取值为2, $o(\cdot)$ 表示高阶无穷小量。为了理论推导需要,严格的幂指数方程被松弛为两边夹形式

$$m(\mathbf{x})r^{d+h(\mathbf{x})} \leq \mu[B_r(\mathbf{x})] \leq M(\mathbf{x})r^{d+h(\mathbf{x})}, \quad (3)$$

其中 $m(\mathbf{x}), M(\mathbf{x})$ 为两个常数, $h(\mathbf{x})$ 称为 $|\nabla I|(\mathbf{x})$ 的奇异性标度指数,它具有明显的物理意义:由于尺度 $r$ 很小,一般只有几个像素的大小,所以从(2)式可知, $h(\mathbf{x})$ 越小,则对应边缘测度 $\mu[B_r(\mathbf{x})]$ 越大。即 $h < 0$ ,说明在图像 $\mathbf{x}$ 处有较大的奇异性指数; $h > 0$ ,说明图像 $\mathbf{x}$ 处的像素值较连续,没有大的跃变。由于所处理的图像均是离散的数字形式,直接运用(2)式求解会得到比较粗糙的结果。为保留近距相关效应,消除远距相关性,由小波性质<sup>[8]</sup>可知,利用小波函数投影方法求取奇异性指数是简单易行的方法。将边缘测度与小波函数 $\psi(\mathbf{x}_1/r)$ 作卷积:

$$T_{\psi\mu}(\mathbf{x}_1, r) = \int_{B_r(\mathbf{x}_1)} d\mu(\mathbf{y}) \frac{1}{r^d} \psi\left(\frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}}{r}\right), \quad (4)$$

得到在向量坐标 $\mathbf{x}_1$ 位置的多尺度投影序列 $\{T_{\psi\mu}(\mathbf{x}_1, r_i)\}_{i=1,2,\dots,n}$ ,当 $\psi(\mathbf{x})$ 为集合的特征函数、紧支撑函数或者速降函数时<sup>[8~12]</sup>,且边缘测度 $\mu[B_r(\mathbf{x})]$ 与尺度 $r$ 满足(3)式时<sup>[7]</sup>,测度 $\mu$ 的投影与尺度 $r$ 的幂指数关系依然成立:

$$T_{\psi\mu}(\mathbf{x}_1, r) = \beta(\mathbf{x}_1)r^{h(\mathbf{x}_1)} + o[r^{h(\mathbf{x}_1)}], \quad (5)$$

$\beta(\mathbf{x}_1)$ 为与尺度 $r$ 无关的量,对方程(4)两边取对数,运用线性回归方程,求得直线的斜率 $[h(\mathbf{x}_1)]$ 。然后将给定图像的所有像素按照奇异性指数进行分类,例如,奇异性指数在区间 $[h_1 - \Delta h, h_1 + \Delta h]$ 内( $\Delta h$ 为较小的正数)的像素子集定义为 $F_{h_1}$ 类,此类中的像素数目构成一个分数维为 $D(h_1)$ 的分形集合,由全体分数维所构成的 $D(h)$ 函数成为该图像的多重分形谱。

## 3 图像的亚像素多重分形分解

由上述分析可知,能否精确求取 $T_{\psi\mu}(\mathbf{x}_1, r)$ 将关系到数字图像的分割结果,因此本文提出一种基于亚像素方法的求取图像奇异性的新型算法,步骤如下:

1) 求取数字图像的衬比度图像, $I(\mathbf{x}) = I_{\text{origin}}(\mathbf{x}) - \langle I_{\text{origin}}(\mathbf{x}) \rangle$ , $I_{\text{origin}}(\mathbf{x})$ 表示原图像, $\langle I_{\text{origin}}(\mathbf{x}) \rangle$ 表示原图像的像素平均值。

2) 对原图像的每一个像素求取所在邻域的边缘测度,首先利用梯度算子 $\nabla \bar{I} = [G_x \ G_y]^T = \left[ \frac{\partial I}{\partial x} \ \frac{\partial I}{\partial y} \right]^T$ 求取每个像素的梯度值,如图1中阴影部

分所示为一个像素的梯度,半径为  $r$  的圆形区域表示包含此像素的邻域范围,一般情况下,圆形区域并不是完整包含此像素所覆盖的范围,同时还引入了其他像素位置的梯度,如果粗略计算,势必对边缘测度及奇异性指数的结果产生误差.在此提出基于亚像素位置的梯度值计算方法,即用  $3 \times 3$  或者  $5 \times 5$  的网格分割像素,如图 1 中的虚线所示,由于光学 CCD 元器件的卷积作用和光学衍射作用,在物空间剧变的灰度值经成像系统成为渐变的形式,即

$$I(i, j) = \int_{j-0.5}^{j+0.5} \int_{i-0.5}^{i+0.5} g(x, y) dx dy, \quad (6)$$

式中  $I(i, j)$  表示  $1 \times 1$  大小的单位像素,  $g(x, y)$  表示像平面的光强分布,根据中心极限定理,得到在实际的像平面的灰度分布应是高斯分布.则(4)式应改写为

$$T_{\psi\mu}(\mathbf{x}_1, r) = \int_{B_r(\mathbf{x})} [g'(\mathbf{y})\delta\mu(\mathbf{y})] \frac{1}{r^d} \psi\left(\frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}}{r}\right), \quad (7)$$

式中  $g'(\mathbf{y})$  表示距离像素中心为  $r$  处的梯度分布系数,且  $\int_0^1 g'(r) dr = 1$ . 这样就把原来单位像素的大小分割成  $(1/n \times 1/n)$  大小的亚像素,然后将各个网格内的亚像素梯度值与覆盖在其上的小波函数作卷积运算,其小波函数模板的大小随亚像素数的多少而增减,而  $g'(\mathbf{y})$  的分布函数可以通过已知整数点的梯度值拟合求出.

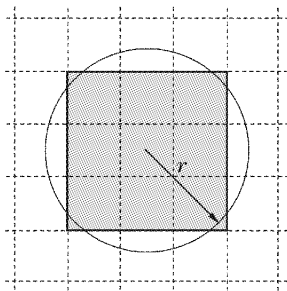


图 1 计算亚像素位置灰度级梯度示意图

Fig. 1 Diagram of calculating gray gradient on the position of sub-pixel

3) 奇异性指数的计算. 对(5)式两边分别取对数,通过线性回归的方法  $\mathbf{x}_1$  位置的奇异性指数  $h(\mathbf{x}_1)$ , 选取不同的圆形邻域半径为

$$\{B_{r_i}(\mathbf{x}_1) | r_i = r_1, \dots, r_5\},$$

邻域大小的选择与所考察的局部奇异的范围有关.

4) 根据上一步骤所计算的奇异性指数,对原图像进行不同层面的分解. 以  $\Delta h$  为间隔,将得到的

所有奇异性指数进行排序,计算相应的概率和分布函数. 把分布函数在 99% 和 95% 所对应的奇异性指数的平均值定义为  $h_\infty$ , 则把下式所对应的点的集合  $F_{h_\infty} = F_{\text{MSM}} = \{\mathbf{x} | h_\infty - \Delta h \leq h(\mathbf{x}_1) \leq h_\infty + \Delta h\}$  定义为最奇异流形 (Most singular manifold, MSM), 对应于图像的边缘轮廓. 同时按照所生成的流形所含的信息量的大小又可以定义  $n$  阶最奇异流形集合:

$$F_{n-\text{MSM}} = \{\mathbf{x} | h_\infty + (2n - 3)\Delta h \leq h(\mathbf{x}_1) \leq h_\infty + (2n - 1)\Delta h\}, \quad n = 1, 2, 3$$

### 4 图像分割结果

利用上文中阐述的理论对 Cameraman 标准图像 (图 2,  $256 \text{ pixel} \times 256 \text{ pixel}$ ) 进行多重分形分析,这里选取的小波函数  $\psi(r) = 1/(1+r^2)$ ,  $\Delta h = 0.2$ , 选取的邻域半径为  $\{r_i = \sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 3, 3\sqrt{2}\}$  分别用  $1 \times 1, 3 \times 3, 5 \times 5$  的网格分割原像素,利用最小二乘和多项式拟合的方法求服从高斯分布的单位像素范围内的梯度分布参量,最终利用下式求得在不同位置上的均值均方差:

$$\begin{cases} \ln \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} = a, \\ -\frac{1}{2\sigma^2} = b, \end{cases} \quad (8)$$

式中  $a, b$  表示二项式拟合后的系数,  $\mu, \sigma^2$  表示梯度分布的均值及均方差. 在求出  $\sigma^2$  之后,便可将原像素中的梯度值按照  $g'(r)$  确定的权重分配给各个亚像素,代入(6)式、(4)式中求出各像素位置的奇异性指数. 计算得到  $h_{\text{MSM}(1 \times 1)} = -0.7809; h_{\text{MSM}(3 \times 3)} = -0.3017; h_{\text{MSM}(5 \times 5)} = -0.5958$ . 最奇异流形集合如图 3 所示. 而 A. Turiel 从大量的不同纹理特性的自然图像的统计分析中得出,利用洛伦兹 (Lorentzian) 小波作投影函数,其  $h_{\text{MSM}} \in (-0.47 \pm 0.2)$  范围之内,故应用亚像素的方法可以得到较精确的奇异性指数.



图 2 Cameraman 标准图像

Fig. 2 Standard picture of Cameraman

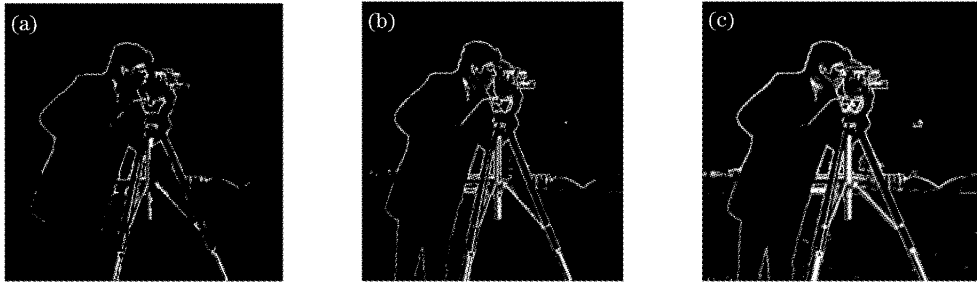


图 3 分别用网格分割单位像素得到的最奇异流形集合。(a) 1/(1×1), (b) 1/(3×3), (c) 1/(5×5)

Fig. 3 Most singular manifold set obtained by unit pixel segmentation using (a) 1/(1×1), (b) 1/(3×3), (c) 1/(5×5) lattice

另外从图 3 可看出,随着网格密度的增大,选用面积较小的亚像素得到的原图像边缘部分将更加细致,利用经典的索贝尔算子(默认阈值为 36.7920)对图 2 进行边缘提取,结果如图 4,由于索贝尔(Sobel)算子提取边缘的重点放在接近于模板中心的像素点,故将结果与多重分形处理的方法作比较,选用图 3 中各个结果与图 4 检测结果的峰值信噪比  $R_{PSN}$  作为客观评价标准,经计算,  $R_{PSN_{1 \times 1}} = 3.4330$  dB;  $R_{PSN_{3 \times 3}} = 7.5768$  dB;  $R_{PSN_{5 \times 5}} = 9.3981$  dB。因此,选用亚像素的方法提取的边缘效果更符合人眼视觉系统的观测效果。然后,对亚像素分割图像的方法进行测量不确定度分析,即投影小波中心点改变单位距离对边缘测量的影响程度。由(7)式可得

$$y(\mathbf{x}_1, r) = \frac{\partial T_{\psi\mu}(\mathbf{x}_1, r)}{\partial \mathbf{x}_1} \Big/ [T_{\psi\mu}(\mathbf{x}_1, r)] = \frac{[rV(\mathbf{x}_1)' + V(\mathbf{x}_1)] \otimes \psi(\mathbf{x}_1/r)}{rV(\mathbf{x}_1) \otimes \psi(\mathbf{x}_1/r)}, \quad (9)$$

式中  $V(\mathbf{x}_1) = g'(\mathbf{x}_1)\mu(\mathbf{x}_1)$  由上式可知,测量不确定度的大小与邻域半径及亚像素数目的选择有关。计算模拟如图 5 所示,这里假定每个单位像素内的梯度分布为:  $V(\mathbf{x}_1) \sim N(0, 1)$ ; 从上至下三个层面分别表示选用  $51 \times 51, 61 \times 61, 71 \times 71$  三种不同的亚像素数目分割原单位像素面积得到的测量不确定度,可以看出,随着亚像素数目的增多,测量不确定度有整体下降的趋势,表明采用亚像素的方法增加

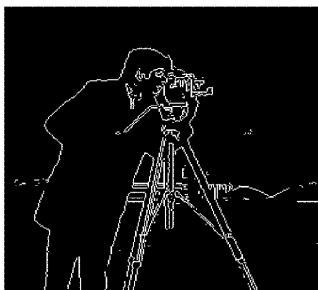


图 4 利用索贝尔算子提取边缘

Fig. 4 Extraction edge using Sobel operator

了测量的鲁棒性,即测量结果更加准确、可靠。

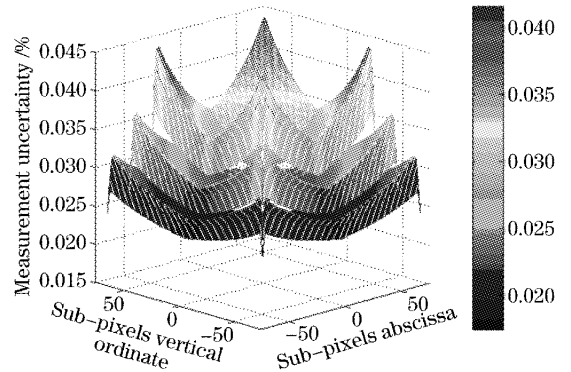


图 5 选用  $51 \times 51, 61 \times 61, 71 \times 71$  三种不同的亚像素数目分割原单位像素得到的测量不确定度

Fig. 5 Measurement uncertainty by unit pixel segmentation using different sub-pixels of  $51 \times 51, 61 \times 61, 71 \times 71$

## 5 路面裂纹检测结果

将上述方法应用于路面裂纹的检测,取得了较好的效果。由于路面裂纹是一种难以建模的不规则几何结构,用经典的图像分割方法从复杂背景中将裂纹提取出来效果不佳。采用多重分形方法不仅可以通过多重分形谱提取出清晰的裂纹结构,而且可以通过最奇异流形所对应的奇异性指数来确定路面的损害程度,以达到计算机自动处理的目的。我们从沪宁高速公路马群段提取了 100 幅路面照片,每张照片(256 pixel×256 pixel)上 16 个像素表示真实路面  $1 \text{ mm}^2$  的面积。下面各图分别是用索贝尔算子、拉普拉斯-高斯算子、 $1/(1 \times 1)$  大小的亚像素多重分形方法、 $1/(3 \times 3)$  大小的亚像素多重分形方法处理路面裂纹照片所得到的结果。为清楚显示结果,均采用二值化形式。如图 6 所示,图 6(a)为含有裂纹的路面采样图像,图 6(b)为采用索贝尔算子处理后结果,其默认阈值为 6.8799。(c)为采用拉普拉斯-高斯算子,  $\sigma = 2$ , 默认阈值为 0.2764。(d)为采用  $1/(1 \times 1)$  大小的亚像素多重分形方法提取

的最奇异流形,计算得到的奇异性指数为 0.0832。(e)为采用  $1/(3 \times 3)$  大小的亚像素多重分形方法提取的最奇异流形,奇异性指数为 0.0421。由于多重分形从图像的局部奇异性 and 全局特征进行图像分解,最奇异流形集合蕴含了图像中视觉最重要的部

分,故可有效提取裂纹结构。从图 6 中直观地看出,(d)、(e)两图较(b)、(c)提取效果较好,而由于采用了亚像素处理方法,(e)保留了一部分裂纹的细节特征,更符合人类的视觉观测。

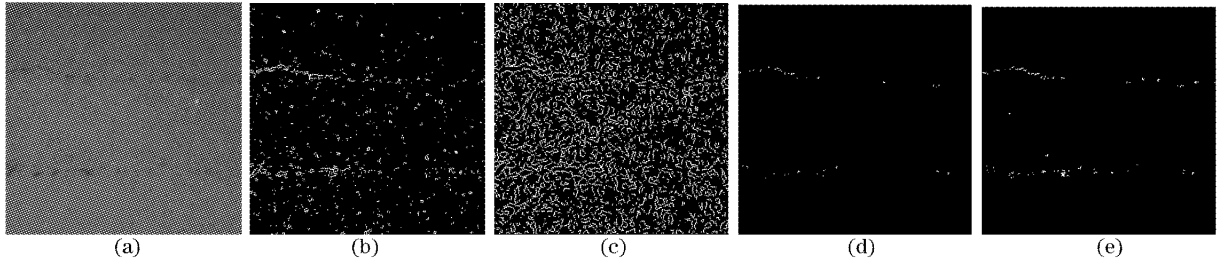


图 6 路面采样图像(a)和分别采用(b)索贝尔算子,(c)拉普拉斯-高斯算子,(d) $1/(1 \times 1)$ ,(e) $1/(3 \times 3)$ 大小的亚像素多重分形方法处理路面裂纹照片的结果

Fig. 6 Original image (a) and processed result of surface crack image using (b) Sobel operator, (c) L-G operator, (d) sub-pixel [size of  $1/(1 \times 1)$  and (e) size of  $1/(3 \times 3)$ ] multifractal method

## 6 结 论

本文提出的亚像素多重分形理论分割图像的方法,为图像奇异性分析及边缘检测提供了一条行之有效的办法。利用此方法计算奇异性指数,结果准确、可靠,鲁棒性强,且检测的图像最奇异流形集合蕴含了图像中视觉最重要的部分。为后续的工作,例如由奇异性流形重构原图像以及基于轮廓的图像编码打下良好的基础。

## 参 考 文 献

- 1 Ma Zhaomian, Tao Chunkan. Artificial object detection in natural background[J]. *Chin. J. Lasers*, 2000, **A27**(3): 237~242 (in Chinese)  
马兆勉,陶纯堪. 自然背景下人工目标的检测与分割[J]. *中国激光*, 2000, **A27**(3): 237~242
- 2 P. Legrand, J. L. Veheil. Local regularity-based image denoising [J]. *IEEE International Conference on Image Processing*, 2003, **ICIP03**: 377~380
- 3 N. Decoster, S. G. Roux, A. Arneodo. A wavelet-based method for multifractal image analysis. II. Applications to synthetic multifractal rough surfaces[J]. *European Physical J. B* 2000, **3**(15): 739~764
- 4 Wu Gengshi, Liang Dequn, Tian Yuan. Texture image segmentation using fractal dimension[J]. *Chin. J. Computers*, 1999, **22**(10): 1109~1113 (in Chinese)  
吴更石,梁德群,田 原. 基于分形维数的纹理图像分割[J]. *计算机学报*, 1999, **22**(10): 1109~1113
- 5 A. Turiel, N. Parga. The multi-fractal structure of contrast changes in natural images: from sharp edges to texture [J].

*Neural Computation*, 2000, **12**(4): 763~793

- 6 A. Turiel, G. Mato, N. Parga. The self-similarity properties of natural images resemble those of turbulent flows[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1998, **80**(5): 1098~1101
- 7 A. Turiel, A. del Pozo. Reconstructing images from their most singular fractal manifold[J]. *IEEE Trans. on Image Processing*, 2002, **11**(4): 345~350
- 8 Jiang Lihui, Zhao Chunhui, Wang Qi. Algorithm about suppressing speckle noise in coherent laser radar imagery [J]. *Acta Optica Sinica*, 2003, **23**(5): 541~546 (in Chinese)  
蒋立辉,赵春晖,王 骐. 相干激光雷达图像散斑噪声抑制算法 [J]. *光学学报*, 2003, **23**(5): 541~546
- 9 Wang Ququan, Li Lin, Hou Yong *et al.*. Spectrum enlargement and wavelet transform on planar fractal by improved  $4f$  Fourier optical system[J]. *Acta Optica Sinica*, 2000, **20**(2): 219~223 (in Chinese)  
王取泉,李 琳,侯 勇等. 改进  $4f$  傅里叶光学系统实现平面分形的频谱放大和小波变换 [J]. *光学学报*, 2000, **20**(2): 219~223
- 10 Li Ming, Wu Yan, Wu Shunjun. Multiple feature data fusion method in color texture analysis[J]. *Acta Optica Sinica*, 2004, **24**(12): 1617~1622 (in Chinese)  
李 明,吴 艳,吴顺君. 彩色纹理分析中的多特征数据融合方法 [J]. *光学学报*, 2004, **24**(12): 1617~1622
- 11 Li Zhenhua, Jing Zhongliang, Sun Shaoyuan *et al.*. Remote sensing image fusion based on steerable pyramid frame transform [J]. *Acta Optica Sinica*, 2005, **25**(5): 598~602 (in Chinese)  
李振华,敬忠良,孙韶媛等. 基于方向金字塔框架变换的遥感图像融合算法 [J]. *光学学报*, 2005, **25**(5): 598~602
- 12 Weng Jiawen, Zhong Jingang. Application of wavelet transform profilometry in bi-frequency grating fringe [J]. *Acta Optica Sinica*, 2005, **25**(5): 603~608 (in Chinese)  
翁嘉文,钟金钢. 小波变换轮廓术在双频光栅条纹中的应用 [J]. *光学学报*, 2005, **25**(5): 603~608