

文章编号: 0253-2239(2006)08-1127-5

局域体全息光栅衍射的平面波与柱面波的波前转换研究

胡志娟 闫爱民 刘德安 王 欣 刘立人

(中国科学院上海光学精密机械研究所信息光学实验室, 上海 201800)

摘要: 利用一维耦合波理论研究了入射方向相互垂直的一束平面波与一束柱面波干涉形成光折变局域体全息光栅的波前转换情况。给出了透射波和衍射波振幅的解析表达式。讨论了该局域体全息光栅的几何尺寸以及全息透镜的焦距对光栅衍射效率的影响。结果表明,随着光栅横向尺寸的增加,光栅的衍射效率也逐渐增加。然而,光栅的衍射效率却随着光栅纵向尺寸的增加而减小。全息透镜的焦距越长,光栅的衍射效率也越大。此外,分析了光栅的布拉格选择特性,该光栅具有非常好的角度选择特性。在平面波与柱面波干涉形成全息透镜的设计中,为了获得最优的衍射效率,应当根据要求合理地选择记录所用柱面波和设计光栅的几何尺寸。

关键词: 衍射光学; 局域体全息光栅; 耦合波理论; 波前转换

中图分类号: O438 文献标识码: A

Study of Wave-Front Conversion by Local Volume Holographic Grating Diffraction between Cylindrical and Plane Waves

Hu Zhijuan Yan Aimin Liu Dean Wang Xin Liu Liren

(Laboratory of Optics Information, Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics,
the Chinese Academy of Sciences, Shanghai 201800)

Abstract: Based on the two-dimensional coupled-wave theory, the wave-front conversion by local volume holographic grating between cylindrical and plane waves in 90° recording geometry is investigated. The analytical integral solutions for the amplitude the transmissive and diffractive waves are presented. Furthermore, the dependences of grating diffraction efficiency on the geometric size of the grating and the focal length of the holographic lens are discussed. It is shown that, with the increase of the horizontal direction size of the grating, the diffraction efficiency of holographic grating increases. But with the increase of the size of the grating in the vertical direction, the diffraction efficiency of holographic grating decreases. The diffraction efficiency increases with the rise of the focal length of holographic lens. Furthermore the Bragg selectivity of the grating is studied, and excellent angle selectivity is proved. It is suggested that for the diffraction efficiency optimization of the holographic grating recorded by plane and cylindrical waves the recording cylindrical wave and the geometrical dimension of the grating should be carefully designed according to the request.

Key words: diffraction optics; local volume holographic grating; coupled-wave theory; wave-front conversion

1 引 言

近年来,利用体全息原理制成的具有波前转换作用的全息光学元件,如可实现平面波与球面波转换的全息透镜、平面波与柱面波转换的全息柱透镜等^[1~4]引起了人们的广泛关注。它们和普通透镜一样,能够成像,而且还可以和透镜或反射镜组合在一

起构成复合光学系统。这种光学元件基于体光栅的衍射原理具有灵敏的角度和波长选择性,易于复制和集成,能多重记录等优点,在研制和配备有全息光学元件的新型光学仪器、光通信器件和集成光学领域中的全息光学器件具有重大的意义。

垂直记录结构的体全息光栅具有很高的角度选

* 国家自然科学基金(60177106)和国家科学技术部(2002CCA03500)资助课题。

作者简介: 胡志娟(1978~),女,四川峨边山市人,中国科学院上海光学精密机械研究所博士研究生,主要从事光学通信器件及衍射光学方面的研究。E-mail: zhijuan-hu@mail.siom.ac.cn

收稿日期: 2005-08-25; 收到修改稿日期: 2005-11-01

择性,对光折变全息记录材料的光致散射和扇形效应不敏感^[5],具备了可以在三维空间任意改变光束传输方向的优点,非常有利于实现集成光学器件的小型化及高衍射效率透镜的设计。在全息柱透镜的设计应用中 Solymar 等^[6,7]首先提出用两维耦合波理论来分析全息柱透镜的衍射性质。随后,Cheben 等^[8,9]也用类似方法分析了在严格布拉格入射和偏离布拉格入射条件下高斯型光束的柱面波前与平面波前的波前转换。但他们所讨论的波前转换模型大多是由两记录光束沿着同轴方向干涉而形成,在其应用上不能实现光束传播方向的横向转换,不利于有效地减小光学系统的体积。

本文利用两维耦合波理论^[10~12]研究了入射方向相互垂直的一束平面波与一束柱面波干涉形成光折变局域体全息透镜的波前转换情况,给出了透射波和衍射波振幅的解析表达式,讨论了该局域体全息光栅的横向和纵向尺寸以及记录所用柱面波对光栅衍射效率的影响,进一步分析了该光栅的布拉格选择特性。

2 理论分析

2.1 全息光栅的记录结构

如图 1 所示,一束宽度为 T 的平行记录光束沿着 y 轴负方向与一束会聚柱面波(会聚于坐标原点 O)以相互垂直的入射方向投射到光折变晶体中,相互干涉形成形状为一梯形 $ABCD$ 的光栅区域。图 1 中光栅横向厚度为 T ,光栅的纵向衍射出射口径 CD 的尺寸大小为 d 。当全息透镜形成后,可以利用此透镜形成光束的横向传播和波面转换。当平行读出光束入射到此全息光栅上时,会产生衍射会聚柱面波传播并聚焦到 O 点。

设两束记录光的电场振动方向垂直于入射面,其电场强度写为

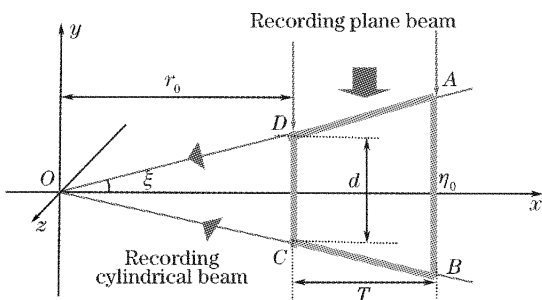


图 1 平面波与柱面波干涉形成局域体光栅的记录结构
Fig.1 Recording geometry of volume holographic grating by a cylindrical and a plane beam

$$E_{10} = R_{10} a(x, y) \exp(-j\beta_0 p_{10}), \quad (1)$$

$$E_{20} = S_{20} g(x, y) \left(\frac{r_0}{r}\right)^{1/2} \exp(-j\beta_0 p_{20}), \quad (2)$$

式中 R_{10}, S_{20} 为常量,分别代表记录平面光波和会聚柱面光波的光强; $a(x, y), g(x, y)$ 分别代表它们的归一化振幅分布函数,这里选取 $a(x, y) = 1, g(x, y) = 1; r_0$ 为归一化参量,其大小为从坐标原点 O 到光栅衍射口径 CD 的距离;并定义 r_0 的长度为此全息透镜的焦距 $f; \beta_0 = 2\pi n/\lambda$ 为光波在介质中的传播常量; p_{10} 和 p_{20} 分别为平行记录光束和柱面会聚记录光束的相位函数,本文取 $p_{10} = -y, p_{20} = r$,其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 。在线性记录条件下,记录介质介电常量调制正比于光栅内部总电场的平方,介质的相对介电常量可以写为

$$\epsilon_r = \epsilon_{r0} + \epsilon_{r1} \cos[\beta_0(r - y)], \quad (3)$$

ϵ_{r0} 为平均介电常量, $\epsilon_{r1} = 2kR_{10}S_{20}, k$ 为比例常量。

2.2 耦合波理论分析

全息光栅的读出过程如图 2 所示,当一束平面波以接近记录时参考波的方向入射到介质中,由于体全息的布拉格衍射特性,只考虑介质中存在再现光和衍射光,则光栅读出过程中的总电场强度可以表示为

$$E = R(x, y) \exp(-j\beta_0 p_1) + S(x, y) \left(\frac{r_0}{r}\right)^{1/2} \exp(-j\beta_0 p_2), \quad (4)$$

$R(x, y), S(x, y)$ 分别代表读出平面光波和会聚光波的光强; p_1, p_2 分别为平行记录光束和柱面会聚记录光束的相位函数。将(4)式代入标量波动方程 $\nabla^2 E + \omega^2 \mu \epsilon_0 \epsilon_r E = 0$ 中,并且假设再现光和衍射光的振幅是缓慢变化的,忽略它们的二阶偏导数,只保留零级和一级布拉格衍射,且不考虑光折变介质的吸收影响,可以得到以下耦合波方程:

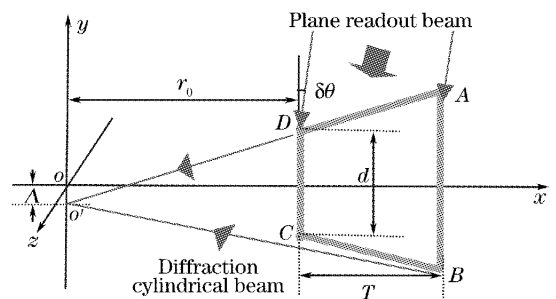


图 2 平面波与柱面波干涉形成局域体光栅的读出结构
Fig.2 Reconstruction geometry of volume holographic grating by interference of a plane beam and a cylindrical beam

$$\nabla p_1 \cdot \nabla R + i\kappa \frac{r_0}{r} \exp(-iM)S = 0, \quad (5)$$

$$\nabla p_2 \cdot \nabla S + i\kappa \exp(iM)R = 0, \quad (6)$$

其中

$$\begin{cases} \kappa = \frac{\epsilon_{r1}\beta_0}{4\epsilon_r} = \frac{\pi n_1}{\lambda}, \\ M = \beta_0(p_{10} - p_{20}) - \beta_0(p_1 - p_2), \end{cases} \quad (7)$$

(7) 式中 M 为读出光束布拉格偏移因子。为了进一步求解耦合波方程, 引入新坐标 $\xi = \arctan(y/x)$, $\eta = x$ 使其满足条件 $\nabla p_2 \cdot \nabla \xi = 0$, $\nabla p_1 \cdot \nabla \eta = 0$, 那么(5)式、(6)式在新坐标系下可以进一步写为

$$\begin{cases} \frac{\partial R}{\partial \xi} - j\kappa \frac{r_0}{\cos \xi} \exp(-jM)S = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial \eta} - j\kappa \frac{r_0}{\cos \xi} \exp(-jM)R = 0. \end{cases} \quad (8)$$

考虑到布拉格失配因子 M 的影响, 设平行光束读出全息时的读出角与布拉格角发生 $\delta\theta$ 的微小偏移(如图 2 所示), 相应的衍射柱面光束的会聚点会在纵向位置上发生 $\Delta = r_0 \tan \delta\theta$ 的位置移动, 而会聚至 O' 点。此时平行读出光束和会聚衍射光束的相位函数可以分别表示为

$$\begin{aligned} p_1 &= -y \cos \delta\theta - x \sin \delta\theta, \\ p_2 &= \sqrt{x^2 + (y + \Delta)^2}. \end{aligned}$$

将 p_1, p_2, p_{10} 和 p_{20} 代入(7)式中的布拉格偏移量 M 中, 并假设 $\delta\theta$ 非常微小, 那么利用泰勒展开式可以

得到:

$$M \approx \beta_0 \eta \delta\theta + \beta_0 r_0 \tan \delta\theta \tan \xi, \quad (9)$$

为进一步求解耦合波方程组(8)式, 进行以下方程变形:

$$\begin{cases} R(\eta, \xi) = A_1(\eta, \xi) \exp(-j\beta_0 \eta \delta\theta), \\ S(\eta, \xi) = \frac{A_2(\eta, \xi) \exp(j\beta_0 r_0 \tan \delta\theta \tan \xi)}{\cos \xi}, \end{cases} \quad (10)$$

$A_1(\eta, \xi), A_2(\eta, \xi)$ 分别为 η, ξ 的函数, 将(9)式、(10)式代入(8)式, 可以进一步得到以下方程组:

$$\begin{cases} \frac{\partial A_1}{\partial \xi} - j\kappa \frac{r_0}{\cos^2 \xi} A_2 = 0, \\ \frac{\partial A_2}{\partial \eta} - j\kappa A_1 = 0, \end{cases} \quad (11)$$

其相应的边界条件为

$$\begin{cases} A_1(\eta, \xi_0) = \exp(j\beta_0 \eta \delta\theta), \\ \frac{\partial A_2(\eta, \xi_0)}{\partial \eta} = j\kappa \exp(j\beta_0 \eta \delta\theta), \\ \text{当 } \xi = \xi_0 = \arctan(d/2r_0) \\ \begin{cases} A_2(\eta_0, \xi) = 0, & \frac{\partial A_1(\eta_0, \xi)}{\partial \xi} = 0, \\ \text{当 } \eta = \eta_0 \end{cases} \end{cases} \quad (12)$$

(11)式~(13)式分别是关于变量 ξ 和 η 的拉普拉斯双曲线方程组及其边界条件, 利用黎曼方法^[13] 进行求解, 可以得到(11)式的解:

$$A_2(\eta, \xi) = j\kappa \int_{\eta_0}^{\eta} \exp(j\beta_0 \eta' \delta\theta) J_0[2\kappa \sqrt{r_0} \sqrt{(\tan \xi - \tan \xi_0)(\eta - \eta')}] d\eta', \quad (14)$$

进一步将(14)式代入(10)式中, 可以得到:

$$S(\eta, \xi) = \frac{j\kappa \exp(j\beta_0 r_0 \tan \xi \tan \delta\theta)}{\cos \xi} \int_{\eta_0}^{\eta} \exp(j\beta_0 \eta' \delta\theta) J_0[2\kappa \sqrt{r_0} \sqrt{(\tan \xi - \tan \xi_0)(\eta - \eta')}] d\eta', \quad (15)$$

将(15)式代入(8)式中, 可以得到:

$$R(\eta, \xi) = 1 - \exp[-jM(\eta, \xi)] \times \int_{\eta_0}^{\eta} \left\{ k r_0^{1/2} \sqrt{\frac{\tan \xi - \tan \xi_0}{\eta - \eta'}} \exp[jM(\xi, \eta')] J_1[2\kappa \sqrt{r_0} \sqrt{(\tan \xi - \tan \xi_0)(\eta - \eta')}] \right\} d\eta'. \quad (16)$$

定义体光栅的衍射效率为衍射光波能量与入射光能量之比, 求得透射振幅(16)式和衍射振幅(15)式后, 可以根据下面公式计算整个全息光栅的衍射效率:

$$\eta_{DE} = \int_{\xi_0}^{\xi} |S[\xi, (\eta_0 - T)]|^2 d\xi / \int_{\eta_0}^{\eta} |R(\xi_0, \eta)|^2 d\eta. \quad (17)$$

3 数值结果与讨论

本文选择 LiNbO_3 双掺杂晶体材料作为全息记录材料。首先讨论正布拉格角条件下全息再现时的衍射性质。当平面读出光束以布拉格角入射时, 即 $\delta\theta=0$ 时, 可以到光栅的衍射振幅和透射振幅表达式:

$$\left\{ \begin{aligned} S(\eta, \xi) &= \frac{j\kappa}{\cos \xi} \int_{\eta_0}^{\eta} J_0 [2\kappa \sqrt{r_0} \sqrt{(\tan \xi - \tan \xi_0)(\eta - \eta')}] d\eta', & (18) \\ R(\eta, \xi) &= 1 + \int_{\eta_0}^{\eta} \left\{ \kappa r_0^{1/2} \sqrt{\frac{\tan \xi - \tan \xi_0}{\eta - \eta'}} J_1 [2\kappa \sqrt{r_0} \sqrt{(\tan \xi - \tan \xi_0)(\eta - \eta')}] \right\} d\eta', & (19) \end{aligned} \right.$$

将(18)式、(19)式代入(17)式中可以求得正布拉格入射时光栅的衍射效率。

图 3 描述了以正布拉格条件入射读出全息时的衍射效率随光栅厚度的分布图,图中不同的曲线代表具有不同衍射口径 d 的光栅。其中 $r_0 = 30.00 \text{ cm}$, $\eta_1 = 5 \times 10^{-5}$ 。从图中可以看出光栅的衍射效率随着光栅厚度 T 的增加而增大,并逐步趋于平缓,而不会出现一维理论^[13] 预期的透射型光栅衍射效率随光栅厚度变化而周期震荡的情况,由此可见增大记录平面光束的宽度以扩大光栅区域的横向尺寸 T 有利于提高其衍射效率。然而,对比图中的曲线可以看出光栅衍射出射口径 d 越大,光栅的衍射效率反而降低,这与光栅的横向厚度 T 的变化对光栅衍射效率的影响正好相反。

图 4 描述了记录所用柱面波的 r_0 取值对光栅衍射效率的影响。从图中可以看出对于相同厚度 T 和相同衍射口径 d 的光栅而言,光栅的衍射效率随记录柱面波的 r_0 值(即形成的全息透镜的焦距 f) 的增加而迅速增,当 r_0 达到一定大小时,衍射效率的增加趋于平缓并逐步达到最大衍射效率 1。因此,在平面波与柱面波以垂直正交方向记录形成全息光栅的设计中,必须考虑光栅的纵向尺寸和横向尺寸对其衍射效率的影响,并根据需要选择记录所用柱面波来得到最佳的衍射效率。

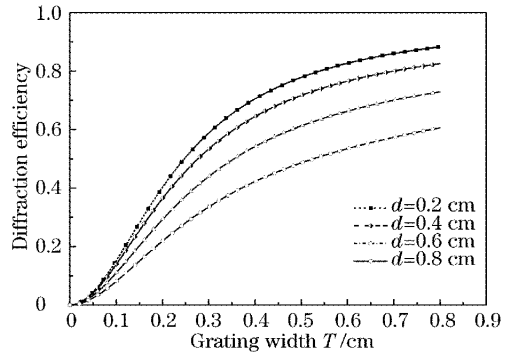


图 3 光栅的衍射效率随光栅厚度的分布图
Fig. 3 Diffraction efficiency of the grating as function of the width of the grating T

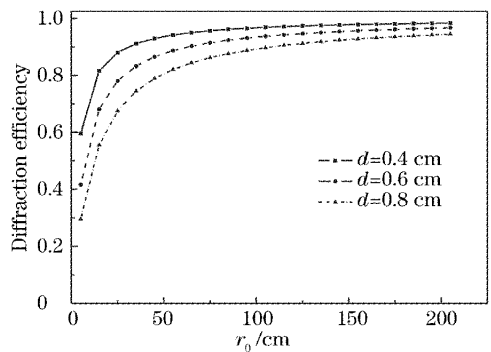


图 4 光栅的衍射效率与记录柱面波 r_0 值的关系图
Fig. 4 Diffraction efficiency of the grating as function of the r_0 of the recording cylindrical wave

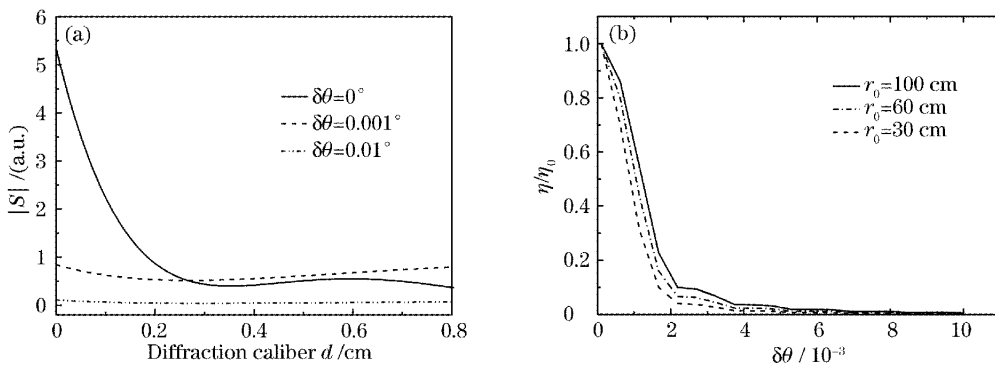


图 5 (a) 对应不同的 $\delta\theta$, 衍射光振幅在出射面上的分布情况($r_0 = 100.00 \text{ cm}$, $T = 1.00 \text{ cm}$, $d = 0.80 \text{ cm}$), (b) 不同 r_0 值柱面波形成的光栅的衍射效率随 $\delta\theta$ 的变化曲线($T = 1.00 \text{ cm}$, $d = 0.80 \text{ cm}$)

Fig. 5 (a) Amplitude of the diffraction cylindrical wave at the output boundary for different $\delta\theta$ ($r_0 = 100.00 \text{ cm}$, $T = 1.00 \text{ cm}$, $d = 0.80 \text{ cm}$), (b) diffraction efficiency versus $\delta\theta$ for different r_0 of recording cylindrical wave ($T = 1.00 \text{ cm}$, $d = 0.80 \text{ cm}$)

当读出平面光束相对于布拉格角发生 $\delta\theta$ 的偏移时,图 5(a) 给出了对于不同的布拉格角偏移 $\delta\theta$, 衍射光振幅在光栅的出射边界上的分布情况。从图中可以看出衍射光的振幅出现了很大程度的失真,不再是理想的平面波振幅。当读出光偏离布拉格角时,衍射光的强度也迅速下降。图 5(b)描述了不同 r_0 值的记录柱面波与平面波形成的全息光栅的衍射效率随 $\delta\theta$ 的变化关系图。从图中可以看出,随着偏移量 $\delta\theta$ 的增加,全息光栅的衍射效率急剧下降。当偏离的程度继续增大达到 0.01° 时,衍射效率几乎为零,在文献[14]中两平面光波干涉形成透射型光栅的布拉格选择角度的理论值达到 0.04° ,与此相对比可以看出由柱面波与平面波以 90° 垂直方向干涉形成的光折变局域全息光栅具有更好的角度选择性。同时比较图 5(b) 中的不同曲线,可以看到,记录所用的柱面波的 r_0 值对光栅的布拉格选择性也有影响,当记录柱面波 r_0 的值较小时,光栅的布拉格选择性会有所提高。

4 结 论

利用二维耦合波理论研究了入射方向相互垂直的一束平面波与一束柱面波干涉形成光折变局域体全息光栅的波前转换情况。进一步讨论了此局域体全息光栅的横向尺寸和纵向尺寸以及记录所用柱面波焦距对光栅衍射效率的影响。结果表明,随着光栅横向尺寸的增加,光栅的衍射效率也逐渐增加。然而,光栅的衍射效率却随着光栅纵向尺寸的增加而减小。当记录柱面波 r_0 的越大,即形成的全息透镜的焦距 f 越长,光栅的衍射效率也越大。此外,讨论了光栅的布拉格选择特性,该光栅具有非常好的角度选择特性。文中对柱面波和平面波以 90° 垂直方向记录和读出下衍射性质的分析,可以为在实验室设计和制作这种全息光栅及其相关器件提供很好的理论参考依据。

参 考 文 献

- 1 E. Guibelalde, M. L. Calvo. A coupled wave analysis for on-axis holographic lenses in generalized coordinates[J]. *Opt. Commun.*, 1986, **59**(5,6): 331~334
- 2 Yan Aimin, Liu Liren, Liu De'an *et al.*. Design of a new type later-spread photorefractive volume holographic lens and its diffraction properties[J]. *Acta Optica Sinica*, 2004, **24**(12): 1629~1632 (in Chinese)
闫爱民,刘立人,刘德安等. 光横向传播的光折变体全息透镜设计及其衍射性质[J]. *光学学报*, 2004, **24**(12): 1629~1632
- 3 Chen Zheng, Yi Qingsheng. Study of photorefractive functional waveguide grating[J]. *Acta. Optica Sinica*, 1999, **19**(7): 909~914 (in Chinese)
陈 铮,易庆胜. 波导光折变功能光栅的研究[J]. *光学学报*, 1999, **19**(7): 909~914
- 4 R. R. A. Syms, L. Solymar. Analysis of volume holographic cylindrical lenses[J]. *J. Opt. Soc. Am. A.*, 1982, **72**(2): 179~186
- 5 Yunping Yang, Ali Adibi, Demetri Psaltis. Comparison of transmission and the 90-degree holographic recording geometry[J]. *Appl. Opt.*, 2003, **42**(17): 3418~3427
- 6 L. Solymar, M. P. Jordan. Analysis of cylindrical-to-plane wave conversion by volume holograms[J]. *Electron. Lett.*, 1976, **12**: 143~144
- 7 M. P. Jordan, Li Solymar, P. St. J. Russell. Wavefront conversion by volume holograms between cylindrical and plane waves[J]. *Microwaves Opt. Acoust.*, 1978, **2**(5): 156~162
- 8 Pavel Cheben, Maria L. Calvo. Wave-front conversion between a Gaussian beam with a cylindrical phase function and a plane wave in a monomode on-axis transmission holographic coupler[J]. *J. Opt. Soc. Am. A.*, 1993, **10**(12): 2573~2580
- 9 Pavel Cheben, Maria L. Calvo. Wave-front conversion between a Gaussian beam with a cylindrical phase and a plane wave for on-axis off-Bragg incidence[J]. *J. Opt. Soc. Am. A.*, 1996, **13**(7): 131~138
- 10 P. St. J. Russell, L. Solymar. The properties of holographic overlap gratings[J]. *Opt. Acta*, 1979, **26**(3): 329~347
- 11 L. Solymar, D. J. Cooke. *Volume Holography and Volume Gratings* [M]. Oxford: Academic Press, 1981
- 12 R. Courant, D. Hilbert. *Methods of Mathematical Physics* [M]. New York: Interscience Publishers, 1962
- 13 Herwig Kogelnik. Coupled wave theory for thick hologram gratings[J]. *Bell Syst. Tech. J.*, 1969, **48**(9): 2909~2947
- 14 Tao Shiquan, Wan Dayong, Jiang Zhuqing *et al.*. *Optical Holographic Storage* [M]. Beijing: Beijing University of Technology Publishers, 1998. 66~71 (in Chinese)
陶世荃,王大勇,江竹青等. 光全息存储[M]. 北京: 北京工业大学出版社, 1998. 66~71