

文章编号: 0253-2239(2006)08-1167-5

# 一种基于傅里叶变换的分析载波条纹的新方法

王雨雷 吕志伟 王 岩 何伟明

(哈尔滨工业大学光电子技术研究所, 哈尔滨 150001)

**摘要:** 针对传统傅里叶变换法处理光载波干涉条纹图时会有边缘效应产生的问题,提出了一种基于傅里叶变换法的外推延拓方法,并从理论上进行了数学推导。为了验证这种方法的正确性,分别对一维数字信号和二维空间载波条纹图进行了数值模拟,进一步分析了误差产生的原因,并与传统的傅里叶变换法对比。结果表明该法可以有效抑制传统傅里叶变换法处理光载波干涉条纹图时边缘效应所造成的较大误差,在基于空间域相位调制技术的波面干涉测量中,对空间载波条纹图进行处理,可以使相位的计算精度达到 3.3 mrad。

**关键词:** 光学测量; 外推延拓; 傅里叶变换; 载波干涉条纹

中图分类号: O436.1 文献标识码: A

## New Method for Interferogram Fringe Pattern Analysis Based on Fourier Transform Meethod

Wang Yulei Lü Zhiwei Wang Yan He Weiming

(Institute of Optoelectronics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001)

**Abstract:** There are noticeable errors at the border of the pattern when the traditional Fourier transform method (FTM) is used to evaluate the carrier interferogram fringe pattern. A new extrapolation of fringe prolongation method for interferogram fringe pattern analysis based on FTM is proposed to eliminate boundary effects. This extrapolation algorithm is derived mathematically. And numerical simulations are performed to evaluate the performance of the method for one-dimensional digital signal and two-dimensional spatial carrier fringe pattern. The source of error is analyzed, and a comprehensive comparison is made between results from traditional FTM and this new extrapolation. The results show, the rather large error caused by the boundary effect in the course of carrier interferogram fringe pattern treatment with traditional FTM, is reduced effectively. In the wave surface measurement based on spatial phase modulation, the calculating precision for phase reaches 3.3 mrad by treating the spatial carrier fringe pattern with the new method.

**Key words:** optical measurement; extrapolation of fringe prolongation; Fourier transform method (FTM); carrier fringe pattern

## 1 引 言

在高功率激光系统中,由于光学材料不均匀,激活介质中的应力和热效应作用,以及光学元件加工精度的限制等原因,会引起高功率激光器输出激光束的波前发生相位畸变,波前相位畸变将严重影响激光束的聚焦和远场传输性能<sup>[1]</sup>。因此,研究激光束波前相位畸变是分析激光装置中腔镜变形原因、提高光束波前性能,从而提高激光光束质量的一种重要手段<sup>[2]</sup>。中国科学院上海光机所徐德衍等<sup>[3]</sup>提出了集大错位与等光程于一体的四平板剪切干涉法。这种方法适用于大曲率半径短脉冲激光波面的

测量,测量范围在 3~1000 m 的范围内,误差小于 ±5%。中国科学院长春光机所王成等<sup>[4]</sup>采用子孔径波面的合成方法实现了大口径光学系统波面的检测。径向剪切干涉技术由于不需要参考波前而可以在大口径高功率激光装置中方便地使用<sup>[5,6]</sup>,并且能对波面自动检测<sup>[7]</sup>。Takeda 等<sup>[8]</sup>最早提出利用傅里叶变换法(FTM)对光载波条纹图进行处理,其主要优点是精确度高,且受伪条纹和噪声的影响较小。但在实际处理数据的过程中,离散傅里叶变换需要把有限视场内的条纹信息进行周期延拓,延拓时由于在边界处条纹的幅值突然降为零,导致边界

作者简介: 王雨雷(1978~),男,河南登封人,哈尔滨工业大学物理电子学专业博士研究生,主要从事高功率固体激光器件及非线性光学的研究。E-mail: hitwyl@163.com

收稿日期: 2005-08-08; 收到修改稿日期: 2005-12-06

信息的不连续,使得结果在边界附近产生较大误差,形成所谓的边缘效应<sup>[9]</sup>。如果对预处理的条纹数据信息两边进行人为的数据延拓,外推产生新的数据处理信息,然后对其进行傅里叶变换,则只会在外推后的数据信息边界处产生边缘效应,而在原来的有用信息处则抑制了边缘效应造成的较大误差,这就是外推延拓法的主要思想。问题的难点是如何能够保证数据信息延拓的连续性,有人提出过采用迭代的方法填充延拓数据<sup>[10]</sup>,但是由于填充的数据与预处理的有用数据信息之间基本上没有什么关系,很

难做到延拓处的数据是连续的,虽然也可以在一定程度上使边缘效应有所减弱,但效果并不理想。本文提出了一种新的外推延拓方法,它以傅里叶位移定理为依据,充分利用预处理的有用数据信息得到填充数据,使得延拓处附近的数据有着较为理想的连续性,可以很好的抑制边缘效应。

## 2 数学原理

经过线性载波调制的干涉场分布可以表示为

$$g(x, y) = a(x, y) + b(x, y)\cos[2\pi f_0 x + \phi(x, y)], \quad (1)$$

假定条纹沿  $y$  方向,其中  $a(x, y), b(x, y)$  分别表示背景光强和条纹调制强度函数,  $\phi(x, y)$  为所要提取的相位信息,与引入的空间载频  $f_0$  相比,可以认为它们是缓变的。将干涉强度分布改写为

$$g(x, y) = a(x, y) + c(x, y)\exp(2\pi i f_0 x) + c^*(x, y)\exp(-2\pi i f_0 x), \quad (2)$$

$$c(x, y) = \frac{1}{2}b(x, y)\exp[i\phi(x, y)], \quad (3)$$

其中角标  $*$  代表复共轭。对  $g(x, y)$  的变量进行傅里叶变换,得

$$G(f, y) = A(f, y) + C(f - f_0, y) + C^*(f + f_0, y), \quad (4)$$

对(4)式进行移频操作得到下式:

$$G'(f, y) = A(f, y) + C(f + f_0, y) + C^*(f - f_0, y), \quad (5)$$

即(5)式是将(4)式中的两个旁瓣谱项  $C(f - f_0, y)$  和  $C^*(f + f_0, y)$  的位置进行了互换,对(5)式进行逆傅里叶变换,由傅里叶位移定理可知

$$g'(x, y) = a(x, y) + c(x, y)\exp(-2\pi i f_0 x) + c^*(x, y)\exp(2\pi i f_0 x), \quad (6)$$

将(3)式代入(6)式得

$$g'(x, y) = a(x, y) + b(x, y)\cos[2\pi f_0 x - \phi(x, y)]. \quad (7)$$

假设预处理条纹信息的数据的函数表达式即为(1)式,实际处理的数据是有限的,这里设  $0 \leq x, y \leq l$ 。

将(1)式沿  $x$  方向右移  $l$ ,并且逆序排列,得

$$g_c(x', y) = a(2l - x', y) + b(2l - x', y)\cos[2\pi f_0(2l - x') + \phi(2l - x', y)], \quad l \leq x' \leq 2l \quad (8)$$

选取合适的  $l$ ,使得  $f_0 \cdot l$  为整数,事实上在截取干涉条纹图时,只要所选的区域周期干涉条纹的个数为整数即可。则(8)式可以变为

$$g_c(x', y) = a(2l - x', y) + b(2l - x', y)\cos[2\pi f_0 x' - \phi(2l - x', y)], \quad l \leq x' \leq 2l \quad (9)$$

对(9)的频谱进行移频操作,可得

$$g'_c(x', y) = a(2l - x', y) + b(2l - x', y)\cos[2\pi f_0 x' + \phi(2l - x', y)], \quad l \leq x' \leq 2l \quad (10)$$

$g'_c(x', y)$  即可作为外推延拓所需的填充数据。延拓后的数据长度为  $2l$ 。其函数表达式可以综合为(11)式,方便起见,仍用  $x$  表示:

$$g_w(x, y) = a_w(x, y) + b_w(x, y)\cos[2\pi f_0 x + \phi_w(x, y)], \quad 0 \leq x \leq 2l \quad (11)$$

其中

$$\begin{cases} a_w(x, y) = \begin{cases} a(x, y) & 0 \leq x \leq l \\ a(2l - x, y) & l < x \leq 2l \end{cases} \\ b_w(x, y) = \begin{cases} b(x, y) & 0 \leq x \leq l \\ b(2l - x, y) & l < x \leq 2l \end{cases} \\ \phi_w(x, y) = \begin{cases} \phi(x, y) & 0 \leq x \leq l \\ \phi(2l - x, y) & l < x \leq 2l \end{cases} \end{cases} \quad (12)$$

它们在延拓起始位置  $l$  处是连续的,所以  $g_w(x,y)$  在整个区间  $0 \leq x \leq 2l$  是连续的,且用离散傅里叶变换处理时,对  $g_w(x,y)$  进行周期延拓,由函数的表达式可知其在边界处也是连续的,因此不会产生边缘效应。

需要说明的是用离散傅里叶变换及逆变换对数据进行处理的过程中隐含了频域和空间域的两个周期延拓,由于信号步宽和带宽的制约关系,所得的频域信号和空间域信号都是真实数据信息一定程度上的近似,和连续函数的傅里叶变换相比是有所差别的<sup>[11]</sup>。为了将上述误差减小到可以接受的程度,需要有足够大的采样频率和足够长的信息数据。在条件满足的情况下,采用频域移频实现外推延拓的方法,其结果较为理想。

### 3 载波条纹图相位提取的数值模拟

#### 3.1 一维数字信号的数值仿真

为了验证该方法的优越性,首先对一维数字信号进行了数值仿真,并与传统的傅里叶变换法作比较,得到了较为理想的结果。预提取的相位信息的函数曲线如图 1 所示。采用传统的傅里叶变换法对相位信息进行了提取,结果如图 2(a)所示,在图 2(b)中给

出了误差图像。图 3(a)和图 3(b)分别为采用频域移频外推延拓法得到的仿真结果和相应的误差图像。

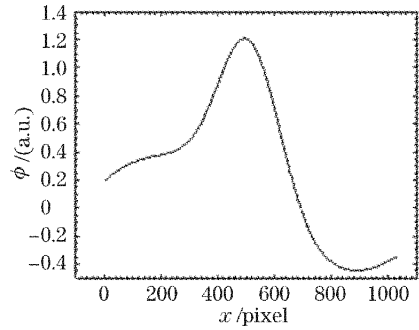


图 1 预提取的相位信息

Fig. 1 Assumed phase information

比较图 2(a)和图 3(a)可以看出,传统傅里叶变换法的边缘效应非常明显,而外推延拓法的结果较为理想。从图 3(b)的误差图中,可以发现外推延拓法在边界处的误差相对内部而言也较大,但这并非边缘效应造成的。事实上,在做外推延拓时,虽然可以保证在延拓位置处数据是连续的,但是不能保证该处的函数曲线是平滑的,恰恰是延拓处的不平滑性,导致了该处的误差相对较大,这与边缘效应造成的大误差有本质区别。

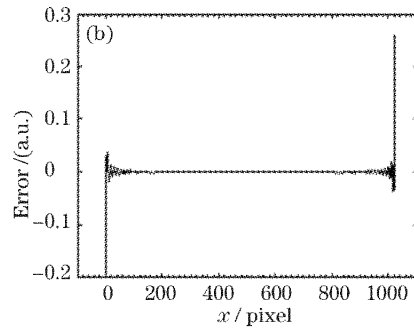
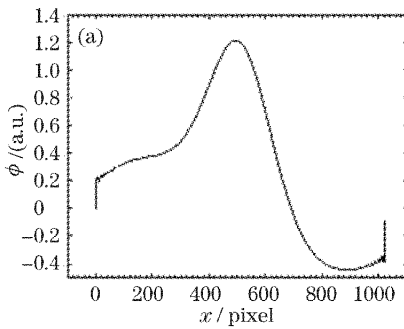


图 2 采用传统傅里叶变换法的结果(a)及误差(b)

Fig. 2 Retrieved phase (a) and error (b) of Fourier transform method

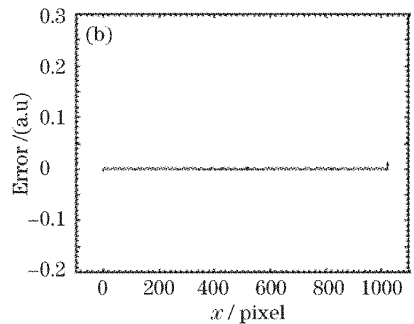
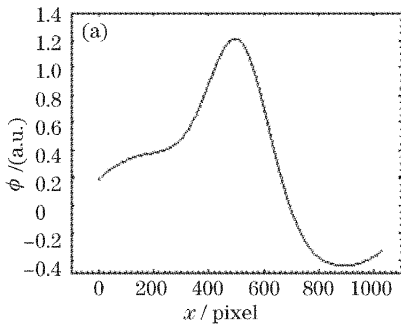


图 3 利用外推延拓法的结果(a)及误差(b)

Fig. 3 Retrieved phase (a) and error (b) by extrapolation of fringe-prolongation method

### 3.2 二维空间载波条纹图的数值仿真

在激光波前检测中,需要对二维空间载波干涉

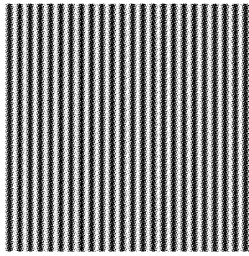


图 4 模拟的含相位信息的载波干涉条纹

Fig. 4 Simulated carrier interferogram fringe pattern with phase information

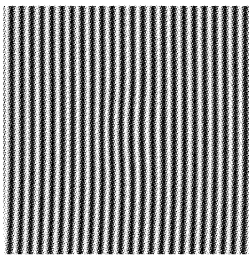


图 5 纯载波干涉条纹

Fig. 5 Fringe pattern of pure carrier interferogram

条纹图进行相位分析,所以对该方法进行二维数值模拟,并验证其适用性。图 4 模拟的是含有相位信息的载波条纹干涉图;图 5 是纯载波条纹图,图的大小为  $128 \times 128$  像素,预提取的相位信息  $\phi$  的函数曲面如图 6 所示。

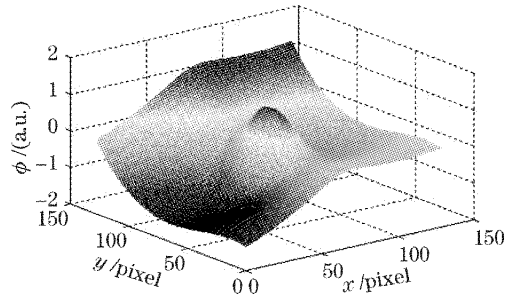


图 6 预提取的相位信息

Fig. 6 Assumed phase information

采用传统的傅里叶变换法对相位信息进行了提取,结果如图 7(a)所示,在图 7(b)中给出了误差图像。图 8(a)和图 8(b)分别为采用频域移频外推延拓法得到的仿真结果和相应的误差图像。与一维模拟的结果类似,传统傅里叶变换法的边缘效应非常显著,而外推延拓法的边缘误差明显减小。

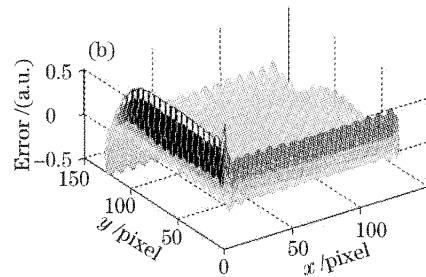
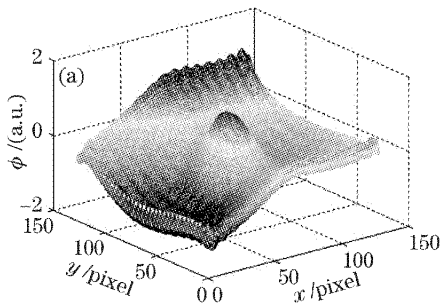


图 7 采用传统傅里叶变换法的结果(a)及误差(b)

Fig. 7 Retrieved phase (a) and error (b) of Fourier transform method

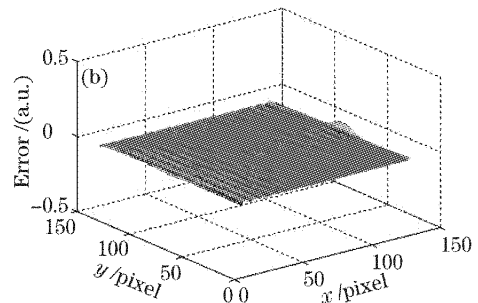
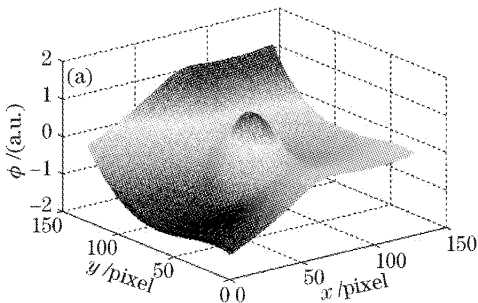


图 8 采用外推延拓法的结果(a), 误差 (b)

Fig. 8 Retrieved phase (a), error (b) of modified method

在实际使用 CCD 采集干涉图像时,CCD 会引入噪声,为考察噪声对结果的影响,在干涉条纹图中引入随机噪声,强度约为灰度等级最大值的  $1/200$ 。

图 9(a)和图 9(b)分别为采用频域移频外推延拓法提取的相位信息和相应的误差图像。从图 9(b)中可以看出,整体幅度与没有引入随机噪声的结果相

近,只是在局部区域可以明显看出噪声的影响,误差的最大值只出现在相位数据的边界处,且小于50 mrad,在相位数据边缘区域的内部误差小于5.5 mrad,整体相位数据的均方根误差为3.3 mrad,精度小于 $\lambda/1000$ 。而相应的采用传统傅里叶变换

法的均方根误差为40 mrad,两者相差一个数量级,上述结果和文献[10]结果相当,但该文献采用的方法需要使用特性滤波窗函数,而对于本文提出的方法,滤波窗函数不是必要的。

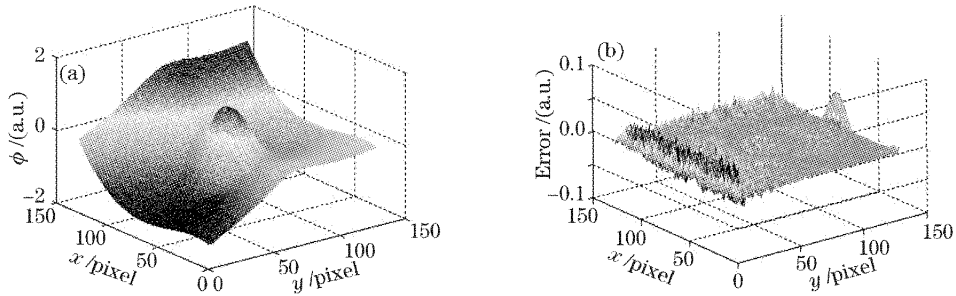


图9 引入随机噪声时采用外推延拓法的结果(a)及误差(b)

Fig. 9 Retrieved phase (a) and error (b) of extrapolation fringe-prolongation method with random noise

## 4 结 论

针对传统傅里叶变换法处理光载波干涉条纹图时会有较强边缘效应产生的问题,本文提出了一种基于傅里叶变换法的外推延拓方法,并从理论上进行了推导。分别对一维数字信号和二维空间载波条纹图进行了数值模拟,模拟时,把含有畸变信息的干涉图样与纯载波干涉图样分别重建再相减,移除了载频。使用该方法,避免了使用特性滤波窗函数,简化了运算,提高了运算速度,适用于瞬态干涉条纹图的处理。仿真的结果表明,外推延拓法可以在一定程度上抑制边缘效应造成的较大误差,具有较高的计算精度。

## 参 考 文 献

- 1 W. W. Simmons. Aberrations and focusability in large solid-state laser systems[C]. *Proc. SPIE*, 1981, **293**: 27~35
- 2 Xian Hao, Jiang Wenhan. The relation between wavefront aberration and beam quality factor[J]. *Chin. J. Lasers*, 1999, **A26**(5): 415~419 (in Chinese)  
鲜浩,姜文汉. 波相差与光束质量指标的关系[J]. *中国激光*, **A26**(5): 415~419
- 3 Xu Deyan, Dai Mingkui, Shen weixing *et al.*. Large shearing interference in equal optical path measurement of the laser-wavefront radius of curvature [J]. *Chin. J. Lasers*, 1997, **24**(4): 311~314 (in Chinese)

- 徐德衍,戴名奎,沈卫星等. 超半口径补偿剪切干涉法测量脉冲激光波面半径[J]. *中国激光*, 1997, **24**(4): 311~314
- 4 Wang Cheng, Han Changyuan. Wavefront measurement with synthesizing method [J]. *Acta Optica Sinica*, 2002, **22**(6): 723~725 (in Chinese)  
王成,韩昌元. 利用合成方法检测波面[J]. *光学学报*, 2002, **22**(6): 723~725
- 5 P. J. Wegner, M. A. Hennesian, J. T. Salmon *et al.*. Wavefront and divergence of the beamlet prototype laser[C]. *Proc SPIE*, 1999, **3492**: 1019~1030
- 6 A. R. Barnes, I. C. Smith. A combined phase, near field and far field diagnostic for large aperture laser systems[C]. *Proc SPIE*, 1999, **3492**: 564~572
- 7 Xu Xiaojun, Lu Qisheng, Jiang Zongfu *et al.*. Mathematics and numerical simulation of shear interference with prolongation of wavefront[J]. *Acta Optica Sinica*, 2000, **20**(2): 214~218 (in Chinese)  
许晓军,陆启生,姜宗福等. 波前延拓剪切干涉的数学原理与数值模拟[J]. *光学学报*, 2000, **20**(2): 214~218
- 8 M. Takeda, H. Ina, S. Kobayashi. Fourier-transform method of fringe-pattern analysis for computer-based topography and interferometry[J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1982, **72**(1): 156~160
- 9 J. B. Liu, P. D. Ronney. Modified Fourier transform method for interferogram fringe pattern analysis[J]. *Appl. Opt.*, 1997, **36**(25): 6231~6241
- 10 J. H. Massig, J. Heppner. Fringe-pattern analysis with high accuracy by use of the Fourier-transform method; theory and experimental tests[J]. *Appl. Opt.*, 2001, **40**(13): 2081~2088
- 11 Hu Guangshu. *Digital Signal Processing* [M]. 2nd ed.. Beijing: Tsinghua University Press, 2003 (in Chinese)  
胡广书. 数字信号处理(理论、算法与实现)[M]. 第2版. 北京:清华大学出版社. 2003