

文章编号: 0253-2239(2006)06-0914-4

# 折射率连续周期分布一维光子晶体的带隙分析\*

马荷梅 许震宇 张若京

(同济大学航空航天与力学学院, 上海 200092)

**摘要:** 微分传输矩阵法(DTMM)可以解析求解一维非均匀介质中的波动方程。用该方法,对几种折射率连续且周期分布的一维光子晶体进行了带隙分析。结果表明,折射率连续变化的一维周期结构也具有明显的带隙特征,折射率变化越平缓,光带隙的宽度越小。对于折射率正弦变化的一维光子晶体,其折射率变化得越剧烈,光子晶体的中心频率越小,带隙越宽;同时,折射率的平均值越大,中心频率越小,带隙越窄。由于材料的物理特性都是连续变化的,同样可以把结构推广到一维周期性功能梯度材料。

**关键词:** 光电子学; 光子晶体; 光带隙; 微分传输矩阵法; 功能梯度材料

中图分类号: O436 文献标识码: A

## Band Structure Analysis of One-Dimensional Photonic Crystals with Continuous Index of Refraction

Ma Hemei Xu Zhenyu Zhang Ruoqing

(School of Aerospace Engineering and Applied Mechanics, Tongji University, Shanghai 200092)

**Abstract:** Differential transfer matrix method (DTMM) is an efficient tool to solve the wave propagation equation in inhomogeneous media analytically. Using it, the band structure of one-dimensional photonic crystals with continuous indexes of refraction is analyzed. The results show they also have clear band gaps. The more smoothly their refraction indexes change, the narrower their band gaps are. As to the photonic crystals with sine shape index of refraction, the more sharply their indexes of refraction change, the broader their band gaps and low their central frequencies are. The analysis method used is also applicable to one-dimensional periodical functional gradient materials.

**Key words:** optoelectronics; photonic crystal; optical band-gap; differential transfer matrix method (DTMM); functional gradient materials

### 1 引 言

光子晶体是折射率按一定周期发生变化的人工微结构材料,具有调制材料中光子传播状态模式的能力。光在这类材料中传播时具有类似于电子在半导体材料中运动的行为,频率在一定范围内的入射光被禁止在光子晶体中传播,即存在光带隙现象<sup>[1,2]</sup>。因此,光子晶体也常被称为光带隙材料。光子晶体独特的光带隙性能决定了它具有广阔的应用前景<sup>[3]</sup>。相对于二维和三维光子晶体,一维光子晶体的制备工艺较为简单,而且它具有与二维、三维结构相似的光带隙性能<sup>[4]</sup>。

目前,对折射率为周期阶跃形式的一维光子晶体的带隙特性,已经有了很多研究<sup>[5~7]</sup>,而对折射率一维连续周期分布的光子晶体,其带隙特性的研究还比较少。本文应用微分传输矩阵法(DTMM)<sup>[8,9]</sup>分析了该种光子晶体的带隙性能,并比较了三种不同折射率分布形式的光子晶体的带隙结构。另外,由于材料结构的相似性,也可以将折射率一维连续周期分布光子晶体看成是周期功能梯度材料<sup>[10]</sup>。

### 2 微分传输矩阵法

对于 TE 极化波,非均匀线性介质的一维波动

\* 国家自然科学基金(10272084)资助课题。

作者简介: 马荷梅(1980~),女,山东菏泽人,同济大学航空航天与力学学院硕士研究生,主要从事固体力的研究  
E-mail: 0320101006@smail.tongji.edu.cn

收稿日期: 2005-06-27; 收到修改稿日期: 2005-09-20

方程为<sup>[11]</sup>

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathbf{A}(x) + k^2(x) \mathbf{A}(x) = 0, \quad (1)$$

式中  $\mathbf{A}(x)$  为波矢量;  $k(x)$  为局部波数,  $k(x) = \sqrt{k_0^2 n^2(x) - \beta^2} \equiv k_0 \sqrt{n^2(x) - n_{\text{eff}}^2}$ ,  $k_0 = \omega/c = 2\pi/\lambda_0$  为真空中波数,  $\omega, c, \lambda_0$  分别为真空中入射波的角度频率、速度和波长,  $n(x)$  为非均匀介质的折射率,  $\beta = k_0 n_{\text{eff}}$  为波的传播常量,  $n_{\text{eff}} = n_a \sin \theta$  称为有效折射率。该方程的解具有如下形式:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(x) = & \mathbf{A}^+(x) \exp[-ik(x)x] + \\ & \mathbf{A}^-(x) \exp[+ik(x)x], \end{aligned} \quad (2)$$

式中  $\mathbf{A}^+(x), \mathbf{A}^-(x)$  是待定函数, 可看成是沿正向和反向传播的波。

根据微分传输矩阵法<sup>[8]</sup>, 如果  $k(x)$  为  $x$  的解析函数, 则(1)式的解满足下面的关系:

$$d\mathbf{A}(x) = \mathbf{U}(x) \cdot \mathbf{A}(x) dx, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(x) = & \frac{1}{2k(x)} \cdot \frac{dk(x)}{dx} \times \\ & \begin{bmatrix} -1 + i2k(x)x & \exp[i2k(x)x] \\ \exp[-i2k(x)x] & -1 - i2k(x)x \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4)$$

式中  $\mathbf{A}(x) = [\mathbf{A}^+(x), \mathbf{A}^-(x)]^T$  为波矢量。

假设平面波射入某一维介质, 该波的入射和出射位置分别标记为  $x_1$  和  $x_2$ , 根据边界条件可确定入射波的形式  $\mathbf{A}(x_1)$ 。为了求解的方便, 在上面的理论基础之上我们做了简化, 以光学传输矩阵<sup>[11]</sup>的形式确立入射光场  $\mathbf{A}(x_1)$  和出射光场  $\mathbf{A}(x_2)$  的关系:

$$\mathbf{A}(x_2) = \mathbf{Q}_{x_1 \rightarrow x_2} \mathbf{A}(x_1), \quad (5)$$

$$\mathbf{Q}_{x_1 \rightarrow x_2} = \exp[\mathbf{M}_{x_1 \rightarrow x_2}] \equiv \exp\left[\int_{x_1}^{x_2} \mathbf{U}(x) dx\right], \quad (6)$$

$$\exp[\mathbf{M}] = \mathbf{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathbf{M}^n, \quad (7)$$

式中  $\mathbf{Q}_{x_1 \rightarrow x_2}$  为该介质的光学传输矩阵, (7) 式定义了求矩阵指数的方法。

这里特别指出, 根据(6)式、(7)式和传输矩阵的定义, 容易得到矩阵  $\mathbf{Q}_{a \rightarrow b}$  ( $a, b$  分别表示波的入射点和出射点的位置) 的性质如下:

$$\mathbf{Q}_{a \rightarrow a} = \mathbf{I}, \quad (8a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{a \rightarrow c} = & \exp[\mathbf{M}_{b \rightarrow c} + \mathbf{M}_{a \rightarrow b}] = \\ & \exp[\mathbf{M}_{b \rightarrow c}] \exp[\mathbf{M}_{a \rightarrow b}] = \\ & \mathbf{Q}_{b \rightarrow c} \mathbf{Q}_{a \rightarrow b}, \end{aligned} \quad (8b)$$

$$\mathbf{Q}_{a \rightarrow b} = \mathbf{Q}_{b \rightarrow a}^{-1}, \quad (8c)$$

$$|\mathbf{Q}_{a \rightarrow b}| = \exp(\text{tr}\{\mathbf{M}_{a \rightarrow b}\}) = k(a)/k(b), \quad (8d)$$

由(8d)式可知, 介质传输矩阵行列式的值可以直接由波在该介质入射和出射面上的波数  $k$  得到。这一点, 微分传输矩阵法与传输矩阵法是一致的。

## 2 无限周期结构

对于一个周期长度为  $L$  的无限周期结构, 其局部波数可表示为:  $k(x) = k(x+L)$ 。根据布洛赫波理论<sup>[11]</sup>, (1)式的解具有如下形式:

$$\mathbf{A}(x) = \Phi_{\kappa}(x) \exp(-i\kappa x), \quad (9)$$

式中  $\Phi_{\kappa}(x) = \Phi_{\kappa}(x+L)$  也是周期函数。根据(2)式和  $k(x), \Phi_{\kappa}$  的周期性, 可得到

$$\mathbf{A}(x+L) = \begin{bmatrix} \exp\{-i[\kappa - k(x)]L\} & 0 \\ 0 & \exp\{-i[\kappa + k(x)]L\} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{A}(x) \equiv \mathbf{P} \cdot \mathbf{A}(x), \quad (10)$$

又根据(4)式,  $\mathbf{A}(x+L) = \mathbf{Q}_{x \rightarrow x+L} \cdot \mathbf{A}(x)$ , 所以我们得到  $|\mathbf{I} - \mathbf{Q}_{x \rightarrow x+L} \mathbf{P}^{-1}| = 0$ , 该方程可以简化为

$$\exp(-i2\kappa L) - \exp(-i\kappa L) \{q_{11} \exp[-ik(x)L] + q_{22} \exp[+ik(x)L]\} + 1 = 0, \quad (11)$$

式中  $q_{ij}$  为传输矩阵  $\mathbf{Q}$  的元素。上式的推导利用了(8d)式,  $|\mathbf{Q}_{x \rightarrow x+L}| = k(x+L)/k(x) = 1$ , 把(11)式当成关于  $\exp(-i\kappa L)$  的二次方程, 求解并进一步化简, 得到

$$\cos(\kappa L) = \frac{q_{11}}{2} \exp[-ik(x)L] + \frac{q_{22}}{2} \exp[+ik(x)L], \quad (12)$$

(12)式左边项与  $x$  无关而右边与  $x$  有关, 为了使两边一致, 两边同时对  $x$  积分得到

$$\cos(\kappa L) = \int_0^L \frac{q_{11} + q_{22}}{2L} \cos[k(x)L] dx - i \int_0^L \frac{q_{11} - q_{22}}{2L} \sin[k(x)L] dx, \quad (13)$$

容易证明, 在  $k(0 < x < a) = k_1, k(a < x < L) = k_2$  的情况下, (13)式可以化简为著名的克勒尼希-彭尼色散方程<sup>[12]</sup>。

## 4 算 例

### 4.1 折射率分布形式对带隙的影响

本节给出了根据微分传输矩阵法,计算正对称无限周期结构的几个实例。分别讨论了三种形式的折射率分布:三角形分布、正弦分布和阶跃分布(如图 1 所示)。假设波从空气( $n_0=1$ )中垂直射入周期介质。(12)式中的右边项整理后得到的结果与  $x$  无关<sup>[8]</sup>,因此  $x$  可任意取值,我们取  $x=-0.5L$ 。此时满足等式右边项的实部小于 1 的区域对应实数  $\lambda$ ,即布洛赫波的传播解,大于 1 的区域对应虚数,即布洛赫波的衰减解,也就是周期结构的禁带,禁带的边缘对应右边项的实部等于 1。图 2 给出了他们的第一带隙。在图中布洛赫波矢量  $\kappa$  用  $L/\pi$  进行归一化,频率用  $L/c$  进行归一化。 $L$  为一维光子晶体的周期, $c$  为真空中的光速。

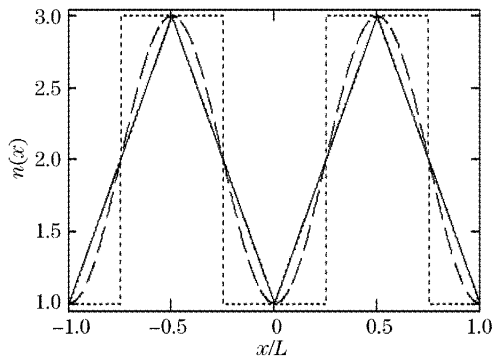


图 1 周期结构折射率分布图

Fig. 1 Three basic symmetric periodic refractive index profiles

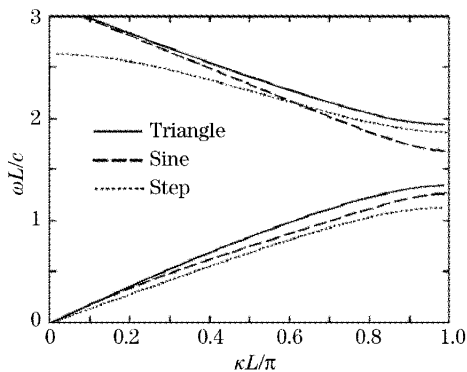


图 2 三种周期结构的能带图

Fig. 2 Band structures around the first band gap for three kinds of periodic media

由图 2 可以看出,不管折射率成何种空间分布形式,一维光子晶体的能带在低频区成线性分布,因此,当入射波的波长足够长的时候,周期性介质的传播特性可以由频率与波数的比值来给出。在  $\kappa L = \pi$

处,继续增大频率使得波数出现复数值,即波在介质中的传播呈衰减模式。此时,我们可以得到第一个带隙。该带隙的大小和中心波长与  $n(x)$  的空间分布有关。由图 2 还可以看出折射率呈阶跃形式分布的光子晶体所对应的带隙宽度最大,而正弦分布对应的带隙宽度最小。

### 4.2 折射率正弦分布的光子晶体带隙特点

进一步,取折射率呈正弦分布的光子晶体进行分析。图 3 中最下边的禁带,对应的光子晶体折射率的范围是  $0.5 \sim 3.5$ ;最上边的禁带,对应折射率的范围是  $1.5 \sim 2.5$ 。可见,在折射率的平均值不变的情况下,折射率变化越剧烈,光子晶体的中心频率越小,带隙越宽。图 4 中,三种光子晶体折射率的变化剧烈程度相同,最下边的禁带,对应折射率的平均值为 4;最上边的禁带对应折射率的平均为 2。可见,折射率的平均值越大,中心频率越小,带隙越窄。

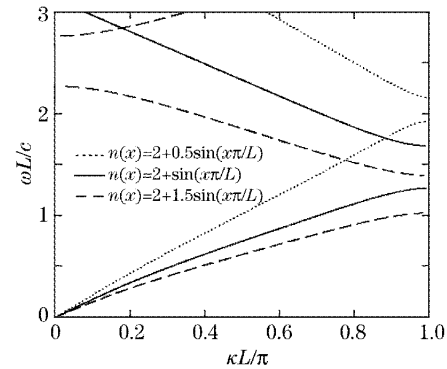


图 3 三种折射率正弦分布光子晶体能带图

Fig. 3 Band structures around the first band gap for three photonic crystals with sine index profile

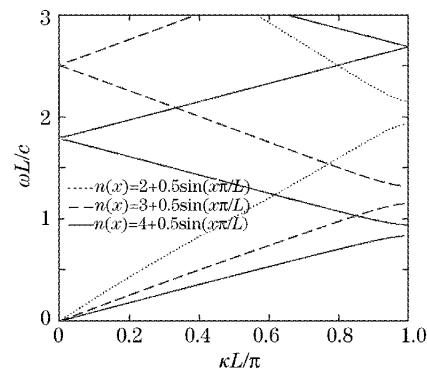


图 4 三种折射率正弦分布光子晶体能带图

Fig. 4 Band structures around the first band gap for three photonic crystals with sine index profile

## 5 结 论

应用微分传输矩阵法,对两种折射率连续变化

和一种阶跃变化的一维光子晶体进行了带隙分析。由结果可知折射率连续变化的一维周期结构也具有明显的带隙特征,而折射率的分布形式对带隙的宽度和中心波长有一定影响。由于材料的物理特性都是连续变化的,同样可以把微分传输矩阵法应用到一维周期性功能梯度材料的带隙研究。

### 参 考 文 献

- 1 V. Mizeikis, S. Juodkazis, A. Marcinkevicius. Tailoring and characterization of photonic crystals[J]. *J. Photochemistry and Photobiology C: Photochemistry Reviews*, 2001, **2**: 35~69
- 2 Thomas F. Krauss, Richard M., De La Rue. Photonic crystals in the optical regime—past, present and future[J]. *Progress in Quantum Electronics*, 1999, **23**: 51~96
- 3 Kuai Sulan, Zhang Yuzhi, Hu Xingfang. Band structures, applications and preparations of photonic crystals [J]. *J. Inorganic Materials*, 2001, **16**(2): 193~199 (in Chinese)  
快素兰,章俞之,胡行方. 光子晶体的能带结构、潜在应用和制备方法[J]. *无机材料学报*, 2001, **16**(2): 193~199
- 4 Zhu Zhihong, Ye Weimin, Yuan Xiaodong. Study of transmission characteristics of 2-D photonic crystals by the finite-difference time-domain method[J]. *Acta Optica Sinica*, 2003, **23**(5): 522~525 (in Chinese)  
朱志宏,叶卫民,袁晓东等. 用时域有限差分法研究二维光子晶体传输特性[J]. *光学学报*, 2003, **23**(5): 522~525
- 5 Gu Guochang, Li Hongqiang, Chen Hongtao. Properties of light propagation in 1-D periodic dielectric structure[J]. *Acta Optica Sinica*, 2000, **20**(6): 728~734 (in Chinese)  
顾国昌,李宏强,陈洪涛等. 一维光子晶体材料中的光学传播特性[J]. *光学学报*, 2000, **20**(6): 728~734
- 6 Huang Biqin, Gu Peifu. Expansion of band-gap of 1-D photonic crystals[J]. *Acta Optica Sinica*, 2003, **23**(12): 1497~1501 (in Chinese)  
黄弼勤,顾培夫. 一维光子晶体禁带的展宽[J]. *光学学报*, 2003, **23**(12): 1497~1501
- 7 Gong Yiling, Xu Zhenyu, Zhang Ruoqing. Analysis for the photonic band gap property of 1-D photonic crystal [J]. *J. Tongji University (Natural Science)*, 2004, **32**(7): 920~923 (in Chinese)  
龚益玲,许震宇,张若京. 一维光子晶体的带隙分析[J]. *同济大学学报(自然科学版)*, 2004, **32**(7): 920~923
- 8 S. Khorasani. Differential transfer-matrix method for solution of one-dimensional linear nonhomogeneous optical structures[J]. *J. Opt. Soc. Am. B*, 2003, **20**(1): 91~96
- 9 Sina Khorasani, Ali Adibi. Analytical solution of linear ordinary differential equations by differential transfer matrix method[J]. *Electron. J. Differential Equations*, 2003, **79**: 1~18
- 10 Lin Wensong. Development of preparation technology of functional gradient materials[J]. *Surface Technology*, 2004, **33**(4): 7~9 (in Chinese)  
林文松. 功能梯度材料涂层制备技术的进展[J]. *表面技术*, 2004, **33**(4): 7~9
- 11 Mu Guoguang, Zhan Yuanling. *Optics* [M]. Beijing: People Educational Publication Office, 1978 (in Chinese)  
母国光,战元令. *光学*[M]. 北京:人民教育出版社,1978
- 12 P. Yeh. *Optical Waves in Layered Media* [M]. New York: Wiley, 1988