

文章编号: 0253-2239(2006)04-0522-5

# 应用分割矩阵全局优化算法设计 用于编码孔径成像的二维阵列

郎海涛 刘立人 阳庆国 邓绍更 刘锡民 潘卫清 王吉明 赵 栋

(中国科学院上海光学精密机械研究所, 上海 201800)

**摘要:** 二维编码阵列是编码孔径成像的关键部件,它决定着再现的层析图像的质量。目前仍没有一种理想的二维阵列既具有较高的量子收集率,又具有良好的层析成像特性。采用一种新的方法——分割矩阵(DIRECT)全局优化算法,设计二维阵列,该算法适用于多变量“黑盒”问题的求解,并且具有比其他优化算法更快的收敛速度。其目的是设计一类自相关函数旁瓣最大值为 1,同时具有最大填充率的二维编码阵列。理论分析及实验结果表明:用该算法搜索得到的二维阵列既具有较高的量子收集率,又具有良好的层析成像特性。

**关键词:** 成像系统; 三维成像; 编码孔径成像; 全局优化; 分割矩阵算法; 二维阵列

中图分类号: TB863 文献标识码: A

## Design of Two-Dimensional Arrays Used in Coded Aperture Imaging by Means of DIRECT Global Optimization Algorithm

Lang Haitao Liu Liren Yang Qingguo Deng Shaogeng Liu Ximin

Pan Weiqing Wang Jiming Zhao Dong

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, The Chinese Academy of Sciences, Shanghai 201800)

**Abstract:** Two-dimensional arrays are the key components used in the coded aperture imaging, and directly influence the quality of reconstructed images. Unfortunately, up to now, there is not a sort of two-dimensional arrays with fine property of tomographic imaging and high photon collection rate. The authors use a new global optimization method, DIRECT algorithm, to design two-dimensional arrays, which is very useful when the object function is a “black box” and has a faster convergence rate than others. The goal is designing a sort of arrays with max sidelobe of their autocorrelation function no more than 1 and the filling rate as high as possible. Theoretical analysis and experimental results prove that the arrays possess better property of tomographic imaging and higher photon collection rate than the existing arrays.

**Key words:** imaging system; three-dimensional imaging; coded aperture imaging; global optimization; DIRECT algorithm; two-dimensional array

## 1 引 言

1895 年,伦琴发现 X 射线能穿透物体并使底片感光,随后 X 射线被广泛应用于医学等领域。和人们熟知的可见光相比,X 射线、 $\gamma$  射线等粒子具有更高的能量(通常为  $10^2 \sim 10^6$  eV,可见光为  $1 \sim 10$  eV),没有可用的技术和材料能使这些射线聚焦,普通的折射成像方法对于它们已不再适用。对于这些射线的成像方法都是基于光线的直线传播原理,最早被采用的

方法是单针孔成像,后来 Mertz 和 Young<sup>[1]</sup> 以及 Dicke<sup>[2]</sup> 提出了编码孔径成像的概念。相对于单针孔成像,编码孔径成像具有两个显著的优点:1)在具有和单针孔成像相同的分辨力的前提下,编码孔径具有比单针孔更高的量子收集率,因此大大提高了图像信噪比;2)编码孔径成像具有层析的能力。它所具有的这些优点使编码孔径成像方法在天文学、核医学、惯性约束聚变等领域得到了广泛的应用。

作者简介:郎海涛(1978~),男,中国科学院上海光学精密机械研究所博士研究生,主要从事三维成像技术、激光通信等方面的研究。E-mail: langhaitao@mail.siom.ac.cn

收稿日期:2005-06-06;收到修改稿日期:2005-08-15

编码孔径成像是一种两步成像方法<sup>[3,4]</sup>。在记录过程中,物体通过编码孔径投影,投影图像叠加在记录平面上,形成编码图像。被记录的编码图像经过解码得到物体的再现图像。

对编码图像解码可以采用逆滤波法、解卷积法、匹配滤波法、反投影法等方法,实现这些解码方法时可以直接的光学方法<sup>[5~7]</sup>也可以采用计算机解码的方法<sup>[8]</sup>。如果采用与编码孔径形式完全相同的函数作为解码函数,可以看出,如果孔径的自相关函数是理想的 $\delta$ 函数,那么再现图像就会与物体完全一致;如果孔径的自相关函数与理想 $\delta$ 函数相差较大,那么再现图像就会与物体相差较大。可见孔径编码形式直接影响着再现图像的质量。因此寻找自相关函数接近 $\delta$ 函数的孔径编码形式是编码孔径成像最重要的研究问题。在近年来的研究中,针对编码孔径的设计以及编码记录和解码再现又提出了一些新的方法<sup>[9]</sup>。

本文提出了一种应用分割矩阵(DIRECT)全局优化算法设计用于编码孔径成像的二维阵列的方法,编程搜索得到了一类自相关函数接近理想 $\delta$ 函数并且具有较高的量子收集率和良好的成像特性的二维编码阵列。

## 2 二维编码阵列设计方法

### 2.1 常用编码阵列

目前在天文学、核医学等编码孔径成像的主要应用领域所采用的基本上都是编码阵列,在编码孔径成像领域,几十年来先后得到广泛应用的二维阵列主要包括随机阵列、无冗余阵列和均匀冗余阵列及其改进型等几类。

由于编码阵列的自相关函数直接决定着再现图像的质量,因此我们从各种编码形式的自相关函数入手分析它们的成像性能。

物理上的二维阵列可以用数学上的二值矩阵(只包含0和1的矩阵)来表示,物理阵列上的开孔部分与矩阵中的1对应,不透明部分与0对应。下文中述及二维阵列的一些特征量时,比如填充率、自相关函数旁瓣值等,都是用相应的数学矩阵计算得到的,各图表也都是据此绘制的,某些地方不加指明的采用矩阵的术语指代物理阵列。对于这些情况,在此做出说明,以免引起不必要的误解。

三种类型的编码阵列的自相关函数如图1所示,图中横坐标为相关位移量,纵坐标归一化相关强

度。从中可以看出三种编码阵列在成像特性上的优缺点。图1(a)是一个典型的随机阵列的自相关函数,它虽然有比较尖锐的自相关峰,但却有一个三角形的背景,并且在背景上还有无规则的起伏。这个较强的背景的存在导致了解码图像信噪比的降低,而且由它引入的噪声很难通过滤波的方法过滤掉,这是随机阵列的一个显著缺点。

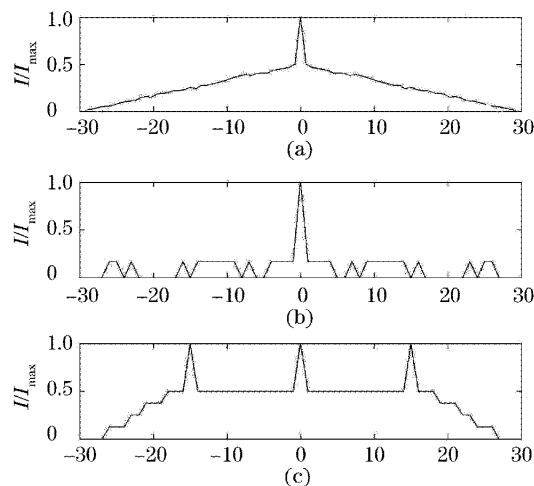


图1 三种编码阵列的自相关函数(二维视图)。(a)随机阵列,(b)无冗余阵列,(c)均匀冗余阵列

Fig. 1 Autocorrelation function of three coded arrays (planar view). (a) Random array, (b) nonredundant array, (c) uniformly redundant array

图1(b)是无冗余阵列的自相关函数。无冗余阵列的自相关函数的旁瓣最大值不超过1,中心峰值等于矩阵开孔数目 $n$ ,信噪比为 $n:1$ 。随着阵列中开孔的数量的增加,解码图像的信噪比也随之提高,这是无冗余阵列一个显著的优点。无冗余阵列在实际应用中受到限制的主要原因是其稀疏分布的特点致使其填充率过低,因此无冗余阵列不能够提供足够的量子收集率。如图1(c)所示,均匀冗余阵列的特点是周期性的相关峰分布在均匀的背景之上。背景均匀性使得对于解码图像的滤波变得相对简单,但是由于这个背景强度过高(接近于相关峰强度的 $1/2$ ),使得均匀冗余阵列在医学层析成像应用中并没有获得预想的成功。

### 2.2 二维编码阵列设计

综合以上的讨论,在三种编码阵列中,无冗余阵列<sup>[10]</sup>因其可以达到较高的信噪比在层析成像方面更具有优势,但是由于其非冗余的特性导致其填充率过低,我们试图设计这样一类二维编码阵列:这类阵列具有和无冗余阵列相似的成像特性,也就是说它的自相关函数除中心峰外旁瓣的最大值不超过

1,同时要求这种阵列的填充率高于无冗余阵列并且达到最高的填充率。本文采用分割矩阵全局优化算法生成满足以上两个条件的二维阵列,分割矩阵算法适用于多变量“黑盒”问题的求解,所谓“黑盒”问题,简单的说就是已知预期的输出结果,及输入变量的取值范围,而不清楚怎样的输入变量能够得到希望的输出结果。对于我们的编码设计问题,预期的结果就是满足上述条件的二维阵列,输入变量就是二维阵列中每个元素的取值:0 或 1,要决定怎样分布的二维阵列能够满足设定的条件。

### 3 分割矩阵全局优化算法

分割矩阵算法是 Jones<sup>[11]</sup>发明的,用以搜索简单约束条件下多变量函数的全局最小值,非常适合于“黑盒”问题的求解。分割矩阵算法是一种采样算法,通过分析已有采样点的函数值的特征决定下一步采样的方向,从而逐步逼近目标函数的全局最小值。和其它全局优化算法相比,分割矩阵算法具有更快的收敛速度,而且这种优势随着目标函数变量数目的增加体现得更为明显<sup>[12]</sup>。分割矩阵算法所具有的上述优点是选择它搜索满足设定条件的二维矩阵的主要原因。

分割矩阵算法的名字来自于“Dividing Rectangles”,也即分割矩形,这个名字形象地描述了算法趋近于全局最小值的方法。搜索算法开始时首先将目标函数的定义域做归一化坐标变换。对于一维情况(单变量)搜索域就变成了 $[0,1]$ 区间,对于二维情况(两个变量)搜索域就变成了边长为 1 的正方形,对于三维情况(三个变量)搜索域是单位立方体,对于多维情况搜索域就是一个超立方体(hypercube)。变换完成后对超立方体的中心采样,记录函数值。然后将超立方体沿着每一维的方向分割成三部分,形成许多超矩形体(hyper-rectangles),对所有超矩形体的中心采样同时记录函数值。根据超矩形体的中心函数值确定出一系列所谓“潜在最优化矩形体”(potentially optimal rectangles),也就是说在这些“潜在最优化矩形体”所包含的区间内可能存在函数的全局最小值。这些“潜在最优化矩形体”被进一步分割成更小的超矩形体,同样对它们的中心采样,重新评估所有函数值得到新的“潜在最优化矩形体”,依此类推,随着搜索域的缩小,函数逐渐趋近于全局最小值。

在本文二维阵列设计问题中,变量的变化域不

是连续的区间,而是离散的整数,每一个变量的取值是 0 或者 1,因此不能采用标准分割矩阵算法的分割策略,对于整数变量域的处理参考了文献[13]的方法,设计了实现分割矩阵算法的 Matlab 程序用以搜索满足条件的编码阵列。标准的分割矩阵算法以函数采样次数作为搜索的终止条件,我们的程序对此加以修改,采用迭代次数作为搜索的终止条件。其算法流程如下:

- 1) 归一化搜索区间为单位超立方体,计算超立方体中心点函数值  $f(c_1)$ ,设  $f_{\min} = f(c_1)$ ,设置迭代次数  $t=0$ ,设置最大迭代次数  $T$ ;
- 2) 确定潜在最优化矩形体集合  $S$ ;
- 3) 选择一个矩形体  $j \in S$ ;
- 4) 将矩形体  $j$  的任意一维分割成三部分,将分割成许多更小的超矩形体,采样各小矩形体中心点函数值,更新  $f_{\min}$ ;
- 5)  $S = S - j$ ,如果  $S \neq \emptyset$  到第 3 步;
- 6)  $t = t + 1$ ,如果  $t \neq T$  到第 2 步;
- 7) 搜索结束。

在本文的设计中,采用矩阵的自相关函数的第二极大值作为目标函数  $f(c)$ ,其中  $[0,0,\dots,0] \leq c \leq [1,1,\dots,1]$ ,程序通过约束目标函数值对自相关函数旁瓣进行控制,通过约束向量  $c$  中 1 的数量对矩阵的填充率进行控制。

### 4 搜索结果及分析

实验对大小为  $4 \times 4$  到  $12 \times 12$  的方阵进行了搜索,当然对于其他规模的矩阵该算法程序同样适用,只是随着矩阵规模的不断增大,搜索耗时将会大幅度增加。根据简单的测试结果,将迭代次数设为 30 次,尽管搜索本身不是穷尽的,对于要搜索的这些规模大小的矩阵,30 次迭代搜索的结果基本上包括了大部分甚至全部满足条件的矩阵,搜索结果如表 1 所示。

表 1 搜索结果

Table 1 Searching results

Square arrays	Number of "1"	Open fraction	Number of found arrays
$4 \times 4$	6	0.375	36
$5 \times 5$	8	0.320	4
$6 \times 6$	9	0.250	72
$7 \times 7$	10	0.204	220
$8 \times 8$	11	0.172	813
$9 \times 9$	12	0.148	246
$10 \times 10$	13	0.130	342
$11 \times 11$	15	0.124	1
$12 \times 12$	15	0.104	12

表 1 第二列表示满足旁瓣最大值为 1 条件时所能容纳的最大的开孔的数目,也就是说此时的填充率是相应大小的矩阵所能达到的最大填充率,最后一列是满足条件的矩阵的数目。

下面以搜索得到的规模为  $6 \times 6$  的阵列为例来分析这些阵列的成像特性。满足搜索条件的大小为的阵列共有 72 个。如果阵列 A 可以通过旋转(顺时针、逆时针)、翻转(沿中心线翻转、沿对角线反转)等手段由阵列 B 得到,则认为阵列 A 和阵列 B 在物理上是相同的,在搜索过程中已经剔出了物理上相同的阵列,这 72 个阵列当中不包含物理上相同的矩阵。图 2 绘出了这些阵列,其中白色代表开孔。开孔在阵列中的位置不同,其自相关函数旁瓣的分布就不同,借用惯性矩这个概念来表征自相关函数旁瓣的分布特性。一个阵列的自相关函数的惯性矩定义为:自相关函数主峰到每个值为 1 的旁瓣的距离的平方和。从成像的角度考虑显然自相关函数惯性矩越小的矩阵其成像性能越好,这是因为,惯性矩小说明背景噪声均匀的分布在自相关峰周围,而外围的值为 0,具有这种自相关特性的阵列不仅同时具有了无冗余阵列高信噪比的优点,还兼具了均匀冗余阵列可消除均匀背景的优点,因此是一种近似理想的编码阵列。虽然这不是一个充分条件,但还是可以采用它来评估我们所得到的矩阵。这些阵列的自相关函数惯性矩的列值于表 2,其中惯性矩最小的 6 个用黑体标出,它们的自相关函数如图 3 所示。从图 3 中可以看出,在每个自相关主峰周围都有一个近乎平坦的背景分布,近似理想的  $\delta$  函数,这是在成像方面的一个优点。我们得到的阵列和无冗余阵列具有相似的成像特性,且比无冗余阵列具有更高的填充率,也就是说在同等大小的情况下具有更高的量子收集率和信噪比。基于这两个优点,可以认为我们搜索得到的矩阵具有比均匀冗余阵列和

无冗余阵列更好的层析成像特性。

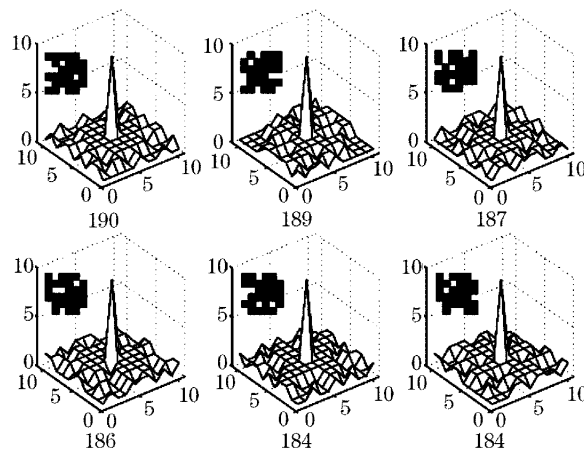


图 3 具有最小的惯性矩的几个阵列的自相关函数  
Fig. 3 Autocorrelation functions with minimal inertial moments

表 2 矩阵的惯性矩

Table 2 Inertial moments of the matrix

230	232	225	230	210	205	226	222	<b>190</b>
196	205	211	238	221	227	211	225	198
225	206	208	215	225	206	211	230	195
206	221	210	214	204	192	224	215	202
199	219	200	207	218	196	220	216	229
<b>189</b>	210	<b>184</b>	207	218	208	213	198	188
224	221	214	230	196	216	213	206	196
206	<b>184</b>	190	210	208	<b>187</b>	204	<b>186</b>	211

将搜索得到的矩阵用于实际的成像实验以检验其层析成像特性。采用文献[8]提出的成像方法,用如表 2 所示的惯性矩为 190 的编码矩阵(也即图 2 中第一行第九列的编码阵列)构成照相机阵列,对如图 4 所示的物体模型拍照。物体模型中的飞机和警车在垂直高度上相距 25 cm,水平方向上相距 10 cm。照相机阵列布置在物体模型上方,正对模型,距离飞机 125 cm,距离警车 150 cm。经过拍照记录,解码再现等过程解码得到的飞机所在高度层面的图像如

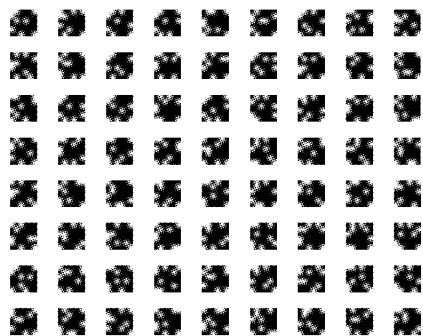


图 2 包含 9 个开孔的  $6 \times 6$  的方阵  
Fig. 2  $6 \times 6$  coded arrays with 9 holes

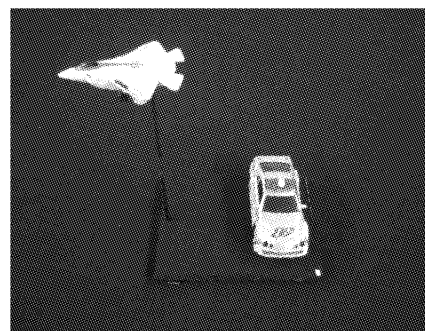


图 4 物体模型  
Fig. 4 The object model

图 5(a)所示,解码得到的警车所在高度层面的图像如图 5(b)所示。由解码图像可以看出,对于准连续分

布的扩展物体采用本文搜索得到的编码阵列可以得到信噪比较高,图像质量较好的解码图像。

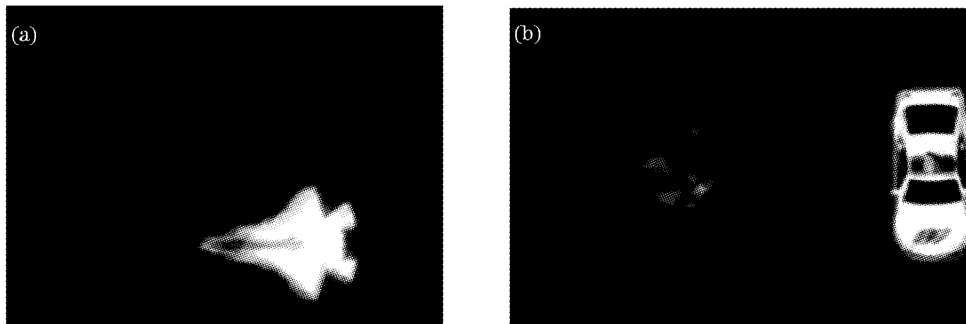


图 5 解码再现得到的物体模型的层析图像

Fig. 5 The decoded and reconstructed layered images of the object model

## 5 结 论

相对于现有的二维阵列生成方法,本文提出的基于全局优化的方法更规范、更易于实施,只需设定必要的条件,搜索满足条件的阵列的工作由程序完成。

初步的实验完成了对大小为  $4 \times 4$  至  $12 \times 12$  的方阵的搜索,得到了满足自相关函数旁瓣最大值不超过 1,同时具有最高填充率的矩阵。本文还以规模为  $6 \times 6$  的矩阵为例,对其成像特性进行了理论分析和实验验证,结果表明本文搜索得到的这种类型的矩阵应用于层析成像领域能够获得信噪比较高、图像质量较好的层析图像。

## 参 考 文 献

- 1 L. Mertz, N. O. Young. Fresnel transformations of images[C]. in *International Conference on Optical Instruments and Techniques*, London, 1961. 305~310
- 2 R. H. Dicke. Scatter-hole cameras for X-rays and gamma rays [J]. *Astrophysical J.*, 1968, **153**(1): 101~106
- 3 Chris Brown. Multiplex imaging with multiple-pinhole cameras [J]. *J. Appl. Phys.*, 1974, **45**(4): 1806~1811
- 4 G. Groh, G. S. Hayat, G. W. Stroke. X-ray and  $\gamma$ -ray imaging with multiple-pinhole cameras using a posteriori image synthesis [J]. *Appl. Opt.*, 1972, **11**(4): 931~933
- 5 Liu Liren, Yin Yaozu, Zhao Liying *et al.*. Coded aperture three-dimensional tomographic imaging [J]. *Physics*, 1981, **10**(3): 134~140 (in Chinese)  
刘立人,殷耀祖,赵丽英 等. 编码孔三维分层成像[J]. *物理*, 1981, **10**(3): 134~140
- 6 E. Klotz, R. Linde, H. Weiss. A new method for deconvoluting coded aperture images of three dimensional X-ray objects [J]. *Opt. Commun.*, 1974, **12**(2): 183~187
- 7 H. Weiss, E. Klotz, R. Linde *et al.*. Coded aperture imaging with X-rays (flashing tomosynthesis) [J]. *Optica Acta*, 1977, **24**(4): 305~325
- 8 Lang Haitao, Liu Liren, Yang Qingguo. A three-dimensional imaging method based on the principle of coded aperture imaging [J]. *Acta Optica Sinica*, 2006, **26**(1): 34~38 (in Chinese)  
郎海涛,刘立人,阳庆国. 一种基于编码孔径成像原理的三维成像方法[J]. *光学学报*, 2006, **26**(1): 34~38
- 9 Axel Busboom, Hans Dieter Schotten, Harald Elders-Boll. Coded aperture imaging with multiple measurements [J]. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1997, **14**(5): 1058~1065
- 10 Marcel J. E. Golay. Point arrays having compact, nonredundant autocorrelations [J]. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1971, **61**(2): 272~273
- 11 D. R. Jones, C. D. Perttunen, B. E. Stuckman. Lipschitzian optimization without Lipschitzian constant [J]. *J. Optimization Theory and Application*, 1993, **79**(1): 157~181
- 12 Gablonsky J M. An implementation of DIRECT algorithm [R]. CRSC-TR98-29. 1998. Center for research scientific computation, North Carolina State University
- 13 D. R. Jones. DIRECT global optimization algorithm [C]. *Encyclopedia of Optimization*, 2001, **2**: 431~440