

文章编号: 0253-2239(2006)03-0367-6

一种新的叠栅层析迭代算法

宋 旻 张 斌 贺安之

(南京理工大学信息物理与工程系, 南京 210094)

摘要: 利用叠栅层析具有的测量动态范围大,对震动环境不敏感的特点,从其偏折原理的本质出发,提出一种利用代数迭代法来重建三维流场的叠栅层析重建算法。在此基础上进行了双峰函数的模拟实验,分别进行了 6 方向,12 方向以及叠加高斯噪声的 12 方向的数值重建,并在相同条件下与滤波反投影方法和对偏折投影数据积分的代数迭代算法这两种已有的叠栅层析重建算法进行了比较,同时用该新算法结合属性矩阵对包含遮挡物的模拟场进行重建。对比重建结果,本算法具有较强的抗噪声能力,并且对非完全数据下的层析重建也有较好的处理效果。

关键词: 信息光学; 光学计算层析; 叠栅层析; 重建算法

中图分类号: O438 文献标识码: A

A Novel Iterative Algorithm for Moiré Tomography

Song Yang Zhang Bin He Anzhi

(Department of Information Physics & Engineering, Nanjing University of Science & Technology, Nanjing, 210094)

Abstract: It is known that moiré tomography is applicable in widely changed flow fields and not sensitive to heavy vibrative conditions. So a new algebraic iterative algorithm developed from the essence of moiré deflectometry is presented to reconstruct three-dimensional flow fields. The algorithm is demonstrated by mapping a double-hump simulated temperature field by projections with 6 directions, 12 directions and 12 directions with Gaussian error added separately. Under same conditions, two other available tomography reconstruction algorithms, the filter back-projection algorithm and the algebraic reconstruction algorithm with integral operation along the deflectometry-projection data, are used to reconstruct the field. A simulation with an opaque is also made with the new algorithm. The reconstruction results show the new algorithm not only has strong ability of noise immunity, but also can handle reconstructions with incomplete data quite well.

Key words: information optics; optical computerized tomography; moiré tomography; reconstruction algorithm

1 引 言

光学计算层析(OCT)是由计算层析技术发展而来的用光学方法来测量流场中各种物理参量的技术,是气动力学,热工学等三维流场参量测试的重要手段。基于干涉方法^[1]和基于叠栅偏折方法^[2]的层析则是光学计算层析的两个主要方面。在实际的光学计算层析问题中往往伴随着强震动环境以及出现大动态范围流场,而叠栅层析的光路简单,要求机械稳定度低于干涉层析^[2],对流场的变化也远不如干涉层析那样敏感,因而更适用于实际的光学计算层析问题。

叠栅层析重建算法主要分为变换类算法和级数

展开类算法两种。变换类算法主要有:1)如果被测场具有轴对称分布,则拉东(Radon)逆变换与阿贝尔(Abel)逆变换具有等价性^[3],因而可以用阿贝尔逆变换来重建轴对称分布的流场^[2,4];2)直接利用拉东逆变换中的偏微分项与叠栅条纹偏移等价的性质进行重建^[5];3)基于叠栅层析的滤波反投影算法,Faris等^[6,7]提出了解决偏折层析重建的滤波反投影算法,并被应用到对温度场和密度场的重建。与级数展开类算法相比,在满足足够的采样条件的情况下,变换类算法具有重建精度高,运算量小的优点,但在投影数据缺失的非完全数据重建中,与级数展开类算法相比不利于结合先验知识进行重建。Vest曾提出迭代的滤波反投影方法应用于非完全投影数据的光学

作者简介: 宋 旻(1980~),男,江苏南京人,博士研究生,主要从事光学计算层析的研究。E-mail: sy0204@vip.sina.com

收稿日期: 2005-04-06; 收到修改稿日期: 2005-08-09

层析重建^[8,9],该方法需要假设一个原场来弥补缺失的投影数据,再由假设弥补的投影数据与实验数据联合根据滤波反投影获取重建场,再根据已知先验数据修正重建场,重复这个过程通过不断的迭代来重建被测场,但这种重建算法被证明其收敛过程并不稳定^[8]。级数展开类算法主要有:1)参照干涉层析中的级数展开法^[1]而以 sinc 函数为底将场函数展开的方法^[10];2)将叠栅层析的偏折投影数据沿垂直于投影方向积分得到在数学意义上与干涉层析等价的相位投影数据,从而可以利用干涉层析的方法进行重建^[11](关于此方法的严格数学推导本课题组将另有文章详细描述)。但在实际应用中,由于系统误差的作用,如叠栅条纹并不完全平直,对条纹积分会造成误差放大,因而限制了其应用于实际的层析重建。

本文则从叠栅层析的基本原理出发,利用叠栅偏折角是由沿射线路径上的微小偏折角的累加形成这一基本性质,对叠栅层析原理公式中的偏微分项数值化,然后用经典的代数重建(Algebraic reconstruction technique, ART)方法进行代数迭代重建。相比于前述的叠栅层析算法,本算法对于复杂流场如含激波或者含遮挡物的流场重建问题具有更大的灵活性。

2 算法描述

2.1 叠栅偏折的代数重建公式

如图 1 所示,在叠栅层析中,准直光经过待测场投射到相互有微小夹角的两个光栅上,由于待测相位场的作用使光束的传播方向发生变化,造成原本平直的叠栅条纹弯曲。截取平面 $x=x_0$, $\varphi(x_0, y', \theta)$ 则为该平面的 θ 角方向上的偏折角分布,在折射率场无突变的情况下,沿射线的微小步长 $ds \approx dz'$, 则

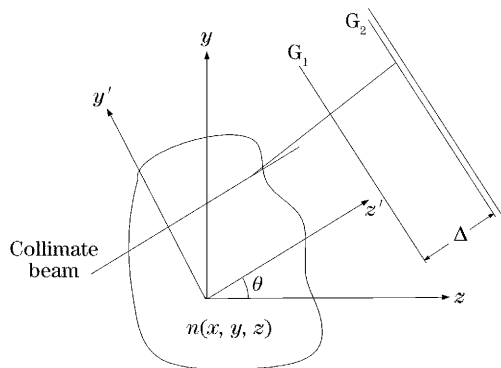


图 1 叠栅层析原理

Fig. 1 Moiré deflectometry principle

$$\varphi(x_0, y', \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial y'} \right) dz', \quad (1)$$

这就是叠栅层析重建的基础,表明叠栅偏折角是由沿射线路径上微小偏折角的累加形成的。

从(1)式可以看出 $\frac{1}{n} \left(\frac{\partial n}{\partial y'} \right) dz'$ 实际是某一射线在 dz' 长度上的微小偏折角累加^[12],将待建场按图 2 划分为 $N = W \times H$ 个足够小的相等网格,从而对于某一射线 j , (1) 式可改写为

$$\sum_{i=0}^{N-1} A_{ij} \frac{1}{n_i} \left(\frac{\partial n}{\partial y'} \right) \Big|_i = \varphi_j,$$

其中 A_{ij} 为第 j 条射线在第 i 个网格内的长度。如果有 l 个投影方向,每个方向上采样 k 条射线,则有 $M = l \times k$,从而得到叠栅层析重建的代数迭代公式:

$$\sum_{i=0}^{N-1} A_{ij} \frac{1}{n_i} \left(\frac{\partial n}{\partial y'} \right) \Big|_i = \varphi_j, \quad j = 0, \dots, M-1 \quad (2)$$

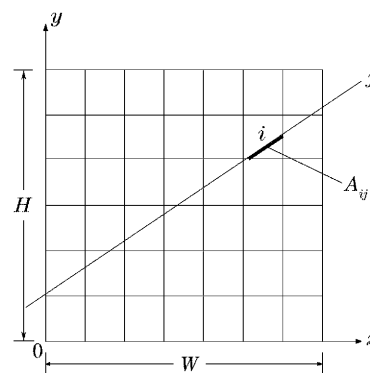


图 2 代数重建原理

Fig. 2 Algebra reconstruction principle

要进行代数迭代,则需要将(2)式中的偏微分项 $(\partial n / \partial y') \Big|_i$ 化为数值形式。将网格 i 想象为一个底面半径为 r ,可以倾斜的圆锥体,圆锥的顶点在网格的中心值为 n_i (见图 3),此时经过中心点 C 点对经过该网格的射线做垂线交底面圆于 A, B 两点,则

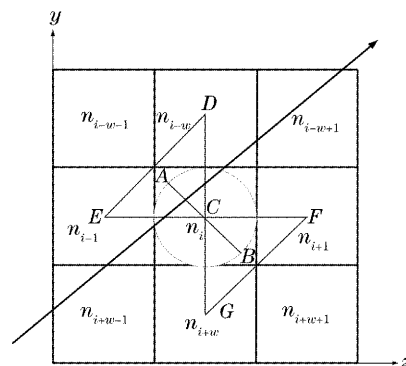


图 3 微分数值化方法

Fig. 3 Method of numerical differential

$(\partial n/\partial y')$ 可以表示为

$$\left(\frac{\partial n}{\partial y'}\right)\Big|_i = \frac{n_A - n_B}{2},$$

考虑网格 i 周围的 8 个相邻网格, 在投影方向大于 0 小于 90° 的情况下, 用 C, D, E 三点组成的平面计算 A 在该平面上的值, 用 C, F, G 组成的平面计算 B 点的值; 另外再用与网格 i 斜交叉的四个网格计算 A, B 两点的值, 综合这两种方法分别对 A, B 两点值取平均, 可以得到 $(\partial n/\partial y')\Big|_i$ 的数值形式。

如果待测场的折射率变化较小, 则 $1/n \approx 1/n_0$, n_0 为网格区域外的参考折射率, 则

$$\sum_{i=0}^{N-1} A_{ij} \left(\frac{\partial n}{\partial y'}\right)\Big|_i = n_0 \varphi_j, \quad j = 0, \dots, M-1 \quad (3)$$

重新组合(3)式, 改对 A_{ij} 累加为对 n_i 的累加, 则(3)式可写为矩阵形式

$$\mathbf{Bn} + \mathbf{q} = \mathbf{h}, \quad (4)$$

其中 \mathbf{B} 为一个 $M \times N$ 维矩阵, \mathbf{n} 为一 N 维向量, 表示网格区域内的折射率, \mathbf{q} 为一 M 维向量, 称为边缘修正向量, 主要用于(3)式中的累加由对 A_{ij} 累加为对 n_i 的累加后平衡方程, \mathbf{h} 也为一 M 维向量, 对应于各采样射线的偏折角。这样叠栅层析重建问题已经由(4)式转为求解一个线性方程组的问题。

2.2 代数重建算法

对于(4)式这样的线性方程组参照干涉层析重建, 采用经典的代数重建方法进行重建, 基本迭代步骤如下:

- 1) 计算矩阵 \mathbf{B} , 向量 \mathbf{h} 以及边缘修正向量 \mathbf{q} ;
- 2) 对向量 \mathbf{n} 给以合适的初始值 $\mathbf{n}^{(0)}$, 一般等于环境折射率 n_0 ;

3a) $\mathbf{n}^{(0,0)} = \mathbf{n}^{(0)}$;

$$3b) n_i^{(k,j+1)} = n_i^{(k,j)} + \omega \frac{h_j - q_i - \sum_{i=0}^{N-1} B_{ij} n_i^{(k,j)}}{\sum_{i=0}^{N-1} (B_{ij})^2} B_{ij}, \quad 0$$

$$\leq i \leq N-1, 0 \leq j \leq M-1;$$

3c) $\mathbf{n}^{(k+1,0)} = \mathbf{n}^{(k,M-1)}$ 。

其中 ω 为松弛因子, $\omega \in (0, 2)$;

4) 重复进行 3b) 与 3c) 直到满足预设的迭代次数或者两次迭代的差的二范数小于预设值。

3 模拟实验

3.1 实验装置

模拟实验装置如图 4, 其中光栅(G_1, G_2)常数 a 为 0.005 cm, 两光栅间距 Δ 为 3.22 cm, 两光栅间夹角为 0.329° , 叠栅条纹宽度 $D_m = a/[2(\sin(\theta/2))]$, 为

0.87 cm, 则叠栅条纹的偏折角表示为 $\varphi = (M_d a)/(D_m \Delta)$ 。在该模拟实验中使用两个由高斯函数组成的双峰函数

$$f(z, y) = \begin{cases} 300 \exp\left[-\frac{(z-20)^2 + (y-20)^2}{40}\right] + \\ 200 \exp\left[-\frac{(z-30)^2 + (y-30)^2}{30}\right], & 0 < z < 49, 0 < y < 49 \\ 0, & \text{outside the region} \end{cases}$$

设定的网格数为 50×50 , 区域实际长度为 6.5 cm \times 6.5 cm。环境温度为 0°C , 而温度 t 与折射率 n 间的关系可由 G-D(Gladstone-Dale)^[12]公式确定:

$$n - 1 = \frac{0.292015 \times 10^{-3}}{1 + 0.0368184 \times 10^{-2} t} \quad (5)$$

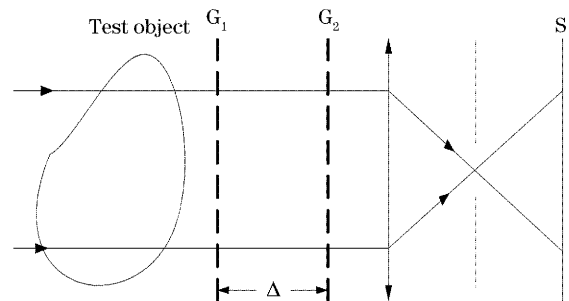


图 4 实验装置

Fig. 4 Experimental setup

3.2 实验重建

以下为基于上节参量所做的重建场。图 5 为原场分布。图 6、图 7、图 8 分别为 12 方向(从 0 至 180° 每隔 15° 进行一次采样)的 i) 滤波反投影(Filtered back-projection, FBF); ii) 本文提出的新的叠栅代数迭代模型结合代数重建算法(Moiré-ART); iii) 将叠栅投影数据沿垂直于投影方向积分得到在数学意义上与干涉层析等价的条纹偏移量后结合代数重建算法(Integral-ART)。

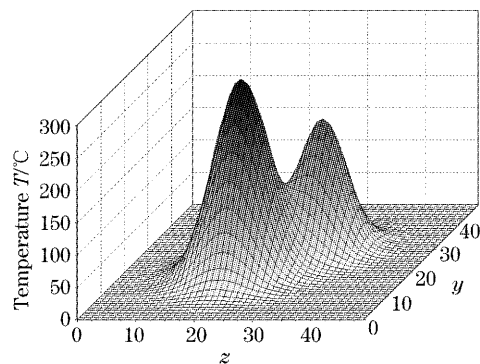


图 5 模拟原场

Fig. 5 Simulated field

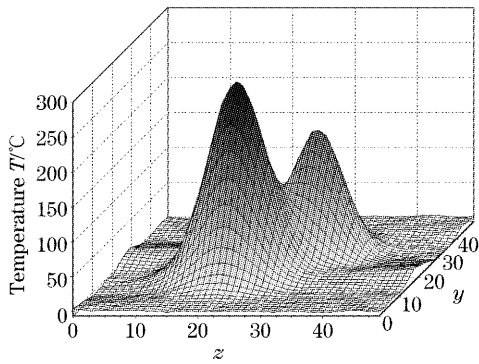


图 6 12 方向 FBP 方法重建结果

Fig. 6 Constructed field by FBP with 12 directions

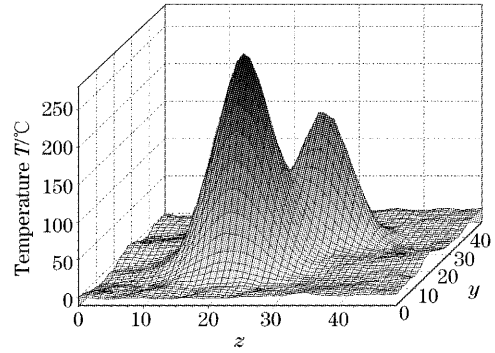


图 9 叠加高斯噪声的 12 方向 FBP 方法重建结果

Fig. 9 Constructed field by FBP with 12 directions with Gaussian noise added

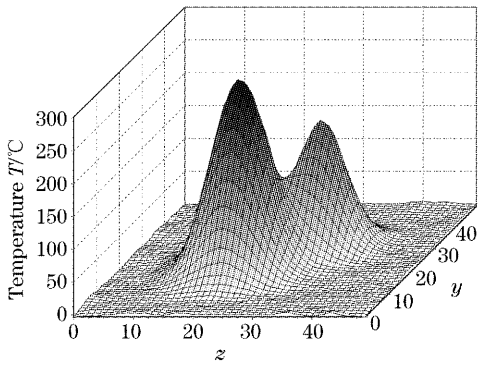


图 7 12 方向 Moiré-ART 方法重建结果

Fig. 7 Constructed field by Moiré-ART with 12 directions

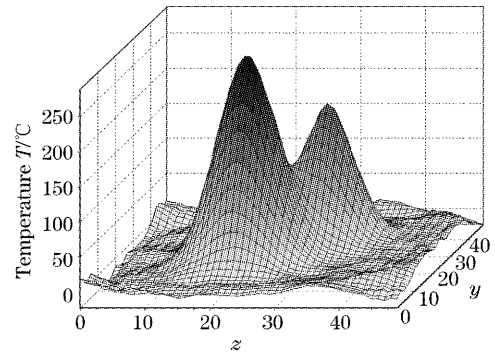


图 10 叠加高斯噪声的 12 方向 Moiré-ART 方法重建结果

Fig. 10 Constructed field by Moiré-ART with 12 directions with Gaussian noise added

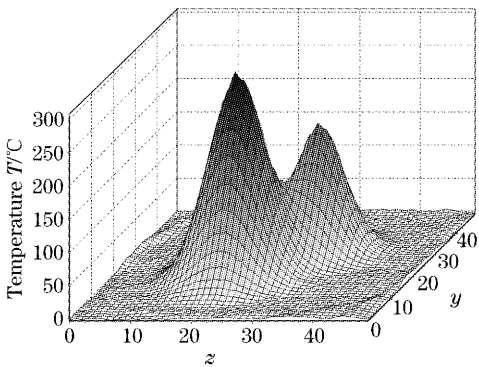


图 8 12 方向 Integral-ART 方法重建结果

Fig. 8 Constructed field by Integral-ART with 12 directions

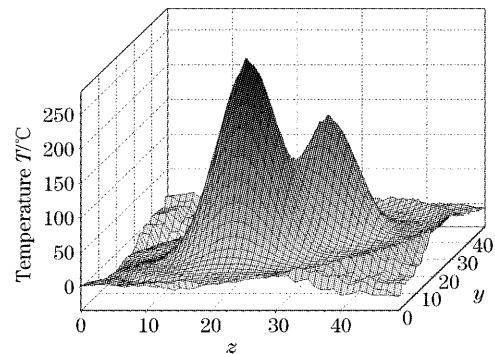


图 11 叠加高斯噪声的 12 方向 Integral-ART 方法重建结果

Fig. 11 Constructed field by Integral-ART with 12 directions with Gaussian error added

图 9、图 10、图 11 分别是三种方法在 12 方向投影数据含有高斯分布的噪声时的重建结果,在此处对叠栅条纹的偏移数据(单位为像素)叠加了高斯噪声,其均值为 0.5,方差为 0.1。均值不为零表示在测量以及条纹提取过程中条纹与基准的水平面存在微小交角,在实际测量中,这是经常遇到的情况。

采用均方根误差(Root mean-square error, RMSE)、平均绝对误差(Mean absolute error, MAE)和峰值误差(Peak value error, PVE)来评价重建效果,重建误差如表 1 所示。

表 1 重建误差
Table 1 Reconstruction errors

		RMSE	MAE	PVE
6 Directions	FBP	0.000561	0.0204	0.0779
	Moiré-ART	0.000652	0.0195	0.168
	Integral-ART	0.000631	0.0185	0.153
12 Directions	FBP	0.000399	0.0116	0.0878
	Moiré-ART	0.000226	0.00824	0.0364
	Integral-ART	0.000238	0.00701	0.0172
Directions added Gauss errors	FBP	0.000447	0.0156	0.0695
	Moiré-ART	0.000464	0.0180	0.0406
	Integral-ART	0.000806	0.0321	0.0633

由重建结果可见,在无噪声情况下的 6 方向和 12 方向的 Moiré-ART 和 Integral-ART 方法重建精度相差不多,而在投影数据叠加噪声后,由于 Integral-ART 对偏折投影数据的累积作用,使得噪声被放大,进而迭代发散,而对应的 Moiré-ART 和 FBP 方法在一定程度上抑制了噪声的影响。理论上如果给定采样定理所需的投影数据,则由 FBP 方法可以精确重建原场,在模拟实验的三种情况下,FBP 算法的重建效果也好于其他两种重建算法,但代数迭代算法较 FBP 算法的优越性在于能够更方便处理非完全数据投影的重建和结合先验知识进行重建。

3.3 包含遮挡物的重建模拟

图 12、图 13 分别给出了包含遮挡物的模拟场和使用本文的迭代算法的重建结果。其中遮挡物面积为 $10 \times 8 = 80$ 占总面积 $50 \times 50 = 2500$ 的 3.2%。重建误差如表 2 所示。

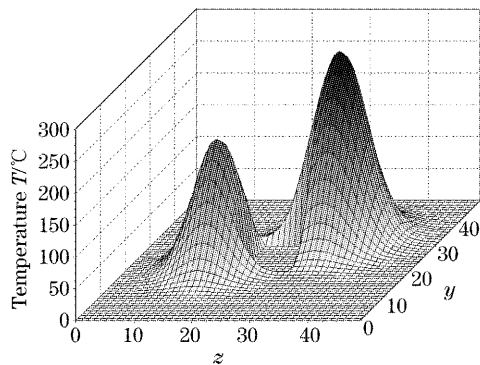


图 12 包含遮挡物的模拟场

Fig. 12 Simulated field with an opaque

表 2 重建误差

Table 2 Reconstruction errors

	RMSE	MAE	PVE
Moiré-ART	0.000783	0.0168	0.0674

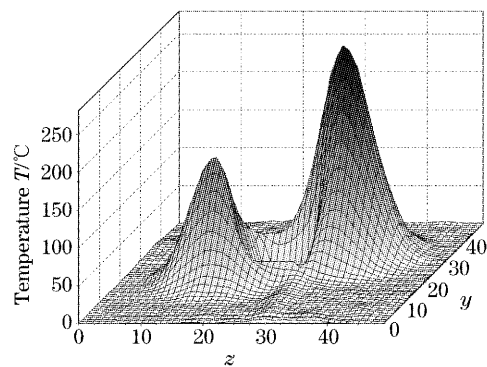


图 13 12 方向 Moiré-ART 方法重建结果

Fig. 13 Constructed field by Moiré-ART with 12 directions

此处,在迭代过程 3b) 中增加属性矩阵^[13,14],在每个方程迭代之后,由属性矩阵来约束迭代结果,属性矩阵如下式所示:

$$n_i = \begin{cases} R_i, & i \in S \\ n_i, & i \notin S \end{cases}$$

其中表示需要由先验知识约束的网格区域。非完全数据投影下的层析重建一直是层析重建中的重点,文献[15]中就这一问题归纳了 258 篇相关文献,作者认为,这个问题的核心是如何合理地结合先验知识。本文在新的迭代算法的基础上将先验知识以属性矩阵的形式融入代数迭代中进行重建,而其他的还有诸如最大熵方法^[16]、基于贝叶斯最大后验估计理论的优化方法^[17,18]、迭代的滤波反投影的迭代方法^[8]等等,并不存在一个通用的重建算法,关键还是根据实际情况将先验知识合理地融入重建过程。

参 考 文 献

1 D. W. Sweeny, C. M. Vest. Reconstruction of three-dimensional refractive index fields from multidirection interferometric data[J]. *Appl. Opt.*, 1973, 12(11): 2649~2664
 2 O. Kafri, I. Glatt. Moiré deflectometry: a ray deflection approach to optical testing[J]. *Opt. Engng.*, 1985, 24(6): 944~960

- 3 C. M. Vest. Formation of images from projections: Radon and Abel transforms[J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1974, **64**(9): 1215~1218
- 4 J. Stricker. Axisymmetric density field measurements by Moiré deflectometry[J]. *Appl. Opt.*, 1983, **21**(12): 1767~1769
- 5 Josef Stricker. Analysis of 3-D phase objects by moiré deflectometry[J]. *Appl. Opt.*, 1984, **23**(20): 3657~3659
- 6 Gregory W. Faris, Robert L. Byer. Three-dimensional beam-deflection optical tomography of a supersonic jet [J]. *Appl. Opt.*, 1988, **27**(24): 5202~5212
- 7 Aiay K. Agrawal, Nelson K. Butuk, Subramanyam R. Gollahalli *et al.*. Three-dimensional rainbow schlieren tomography of a temperature field in gas flows[J]. *Appl. Opt.*, 1998, **37**(3): 479~485
- 8 Charles M. Vest, Ivan Prikryl. Tomography by iterative convolution: empirical study and application to interferometry[J]. *Appl. Opt.*, 1984, **23**(14): 2433~2440
- 9 Gao Yiqing, He Xingdao, Gong Yongqing. Reconstruction of arc temperature fields by projection space iteration reconstruction-reprojection[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2001, **30**(2): 196~200 (in Chinese)
高益庆, 何兴道, 龚勇清. 用投影空间重投影重建迭代法重建电弧温度场[J]. *光子学报*, 2001, **30**(2): 196~200
- 10 Gao Yiqing, Gong Yongqing. Diagnostics of 3-D arc temperature fields by Moiré CT technique[J]. *Acta Optical Sinica*, 1998, **18**(3): 376~380 (in Chinese)
高益庆, 龚勇清. 用莫尔计算机层析技术诊断三维电弧温度场[J]. *光学学报*, 1998, **18**(3): 376~380
- 11 Da-peng Yan, Feng Liu, Zhen-dong Wang *et al.*. Moiré tomography by ART[J]. *Proc. SPIE*, 1996, **2861**: 146~150
- 12 Zhu Dezhong. *Laser Metrology for Thermal Physics* [M]. Beijing: Science Press, 1990. 4~12
朱德忠. *热物理激光测试技术* [M]. 北京: 科学出版社, 1990. 4~12
- 13 Yao Hongbing, He Anzhi. Improvement of the reconstruction algorithm of optical computerized tomography[J]. *Acta Optical Sinica*, 2004, **24**(2): 158~161 (in Chinese)
姚红兵, 贺安之. 光学层析重建算法改进的研究[J]. *光学学报*, 2004, **24**(2): 158~161
- 14 Yao Hongbing, He Anzhi, Wu Yingchuan *et al.*. Three-dimensional tomography of incomplete data with fusion of virtual and real experiments[J]. *Acta Optical Sinica*, 2005, **25**(4): 479~484 (in Chinese)
姚红兵, 贺安之, 吴颖川 等. 虚拟实验和真实实验相融合的三维非完全数据层析[J]. *光学学报*, 2005, **25**(4): 479~484
- 15 Rangaraj Rangayyan, Atam Prakash Dhawan, Richard Gordon. Algorithms for limited-view computed tomography: an annotated bibliography and a challenge[J]. *Appl. Opt.*, 1985, **24**(23): 4000~4012
- 16 Wan Xiong, He Xindao, Gao Yiqing. A novel limited-view tomography algorithm based on maximum entropy and its application[J]. *Acta Optical Sinica*, 2003, **23**(12): 1433~1438 (in Chinese)
万 雄, 何兴道, 高益庆. 一种少投影光学层析新算法及其应用[J]. *光学学报*, 2003, **23**(12): 1433~1438
- 17 Kenneth M. Hanson, George W. Wecksung. Bayesian approach to limited-angle reconstruction in computed tomography[J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1983, **73**(11): 1501~1509
- 18 B. R. Hunt. Bayesian methods in nonlinear digital image restoration [J]. *IEEE Trans. Computer*, 1977, **C-26**(3): 219~229