

文章编号: 0253-2239(2006)03-0393-5

# 利用贝叶斯估计法对双频投影条纹的 相位进行修正\*

李健兵 雷志辉

(国防科技大学航天与材料工程学院, 长沙 410073)

**摘要:** 为了进一步提高双频投影条纹的相位精度, 提出以双频投影条纹的条纹级数为坐标建立级数坐标系的分析方法, 使得条纹级数(或相位)及其误差的描述变得非常直观。在条纹级数坐标系内, 利用贝叶斯估计的方法对相移法求解的条纹相位进行修正, 使条纹相位精度得到进一步提高。仿真实验和真实实验证明了此方法的有效性。其中实际实验在利用本修正法修正后, 相位均方误差从 0.014 rad 下降为 0.009 rad, 高度均方误差从 0.058 mm 下降为 0.041 mm。

**关键词:** 光学测量; 双频投影条纹; 级数坐标系; 贝叶斯估计; 相位修正  
中图分类号: TP391.4 文献标识码: A

## Phase Amending of Projected Double Spacial Frequency Fringes with Bayes Estimation Method

Li Jianbing Lei Zhihui

(College of Aerospace and Material Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073)

**Abstract:** In order to get higher accurate phase of the double spacial frequency fringes, a method that employs the orders of projected fringes as axes to establish fringe-order-coordinate is presented. It makes the description of the fringe orders (phase) and their errors very direct and simple. In the fringe-order-coordinate, Bayes estimation method is used to amend the phase, and the more accurate phase is obtained. Emulational tests and actual experiments show that this method is effectual. With the application of this amending method in the actual experiment, the MSE of phase decrease from 0.014 rad to 0.009 rad, and the mean square error (MSE) of height decreases from 0.058 mm to 0.041 mm.

**Key words:** optical measurement; projected double spacial frequency fringes; fringe-order-coordinate; Bayes estimation; phase amending

## 1 引 言

William W. Macy, Jr<sup>[1]</sup>, 江桂荣<sup>[2]</sup>及本文作者<sup>[3]</sup>讨论了利用双频投影条纹特性进行相位解包裹的方法。其原理是在位相轮廓测量术中, 投影仪分别投影两种不同空间频率的正弦条纹(节距为  $p_1$ ,  $p_2$ )于物体表面, 摄像机得到两种条纹图。两种条纹图上同一点其条纹节距和级数之间满足  $p_1 n_1^A = p_2 n_2^A$ , 根据此关系式可以对条纹相位进行解包裹。但这些方法中关系式  $p_1 n_1^B = p_2 n_2^B$  只作为解包裹用, 并未为提高条纹相位的精度提供帮助, 所以求出的相

位精度与单种条纹进行相移法得到的精度相同。如果投影两种空间频率的条纹仅仅是为了解包裹而不能对提高相位精度提供帮助, 那么并不能充分体现其优点。本文提出了建立级数坐标系的分析方法, 同时引进了贝叶斯估计的原理对已测得的相位值进行修正, 提高了条纹的相位精度, 并减小了高度测量误差。

## 2 贝叶斯估计法相位修正

投影条纹的相位  $\phi$  与其条纹级数  $n$  满足简单的线性关系:  $n = (\phi + \pi) / (2\pi)$ 。所以为了讨论方便,

\* 国家自然科学基金(10472133)资助课题。

作者简介: 李健兵(1979~), 湖南邵阳人, 国防科技大学博士研究生, 主要从事光测力学、摄影测量学及图像处理的研究。  
E-mail: ljbnudt@tom.com

收稿日期: 2005-04-07; 收到修改稿日期: 2005-06-30

本文把对相位  $\phi$  的研究转化为对条纹级数  $n$  的研究。双频投影条纹的条纹节距与级数之间满足  $p_1 n_1^B = p_2 n_2^B$ 。根据两种条纹的条纹级数  $n_1, n_2$  建立级数坐标系,如图 1 所示。物体上某点,用相移法求解出的级数点坐标为  $B(n_1^B, n_2^B)$ 。若  $p_1 n_1^B \neq p_2 n_2^B$ , 则说明求解的相位肯定是有误差的。其真实级数点应位于直线  $L: p_1 n_1 = p_2 n_2$  上,设为  $A(n_1^A, n_2^A)$  点,那么误差向量为  $\overline{AB} = (\xi_1, \xi_2) = (n_1^B - n_1^A, n_2^B - n_2^A)$ 。这样条纹的相位及其误差非常直观地显现在图 1 的级数坐标系中。

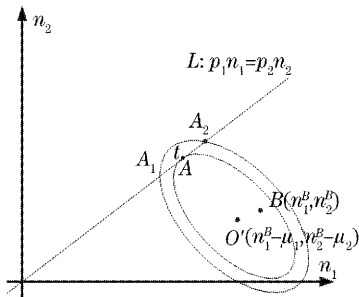


图 1 级数坐标系与贝叶斯估计示意图

Fig. 1 Fringe-order-coordinate and Bayes estimation

现已知观测点  $B$ , 欲在  $L$  上求取最可能的真实点  $A$ , 这可以借助于贝叶斯估计法进行。设事件  $A'_i$  和  $B'$  的意义如下,  $A'_i$ : 直线  $L$  上的点  $A_i$  为当前图像点的真实级数坐标点;  $B'$ : 利用相移法实测到的级数坐标

点为  $B$ (即观测点)。真实点为  $A_i$  的概率密度  $f(A'_i)$  称为先验概率密度; 在真实级数坐标点为  $A_i$  时, 观测点为  $B$  的概率密度为条件概率密度  $f(B' | A'_i)$ ; 根据贝叶斯估计, 当观测点为  $B$  点时, 真实点为  $A$  的概率密度  $f(A'_i | B')$  称为后验概率密度<sup>[4,5]</sup>。

$$f(A'_i | B') = \frac{f(B' | A'_i) f(A'_i)}{\int_j f(B' | A'_j) f(A'_j)} \quad (1)$$

贝叶斯估计最优点也就是  $f(A'_i | B')$  取得最大值时的  $A_i$  所对应的点。若条件概率密度  $f(B' | A'_i)$  根据先验知识已知道, 则求  $f(A'_i | B')$  便只需要知道  $A'_i$  的先验概率密度。假设  $A_i$  在直线  $L$  上是均匀分布的, 则变换 (1) 式为

$$f(A'_i | B') = \frac{f(B' | A'_i)}{g(B')} \quad (2)$$

(2) 式中  $g(B') = \int_j f(B' | A'_j) f(A'_j) / [f(A'_i)]$  是一个关于位置  $B$  的函数, 对于给定观测点  $B$ ,  $f(A'_i | B')$  与  $f(B' | A'_i)$  是成正比的。所以在  $L$  上寻找概率密度  $f(A'_i | B')$  最大的点, 可转化为在  $L$  上求取使  $f(B' | A'_i)$  最大的点  $A$ 。

假设相移法求解的相位之误差  $(\xi_1, \xi_2)$  符合二维正态分布:

$$f(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2 \sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{ \frac{-1}{2(1-\rho^2)} \left[ \frac{(\xi_1 - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(\xi_1 - \mu_1)(\xi_2 - \mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(\xi_2 - \mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\} \quad (3)$$

其中  $(\xi_1, \xi_2) = (n_1^B - n_1^A, n_2^B - n_2^A)$  为条纹级数的误差向量,  $\mu_1, \mu_2$  为相应的级数误差均值,  $\sigma_1, \sigma_2$  为相应的级数误差均方差。

在 (3) 式中, 令

$$R^2 = \frac{(n_1^B - n_1^A - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(n_1^B - n_1^A - \mu_1)(n_2^B - n_2^A - \mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(n_2^B - n_2^A - \mu_2)^2}{\sigma_2^2} \quad (4)$$

则 
$$f(B' | A'_i) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2 \sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[ \frac{-R^2}{2(1-\rho^2)} \right] \quad (5)$$

(5) 式是一个关于  $R$  在  $[0, +\infty)$  上的递减函数, 所以在  $L$  上求取使  $f(B' | A'_i)$  最大的点就是寻找  $R$  最小时所在点。由 (4) 式知道  $A_i$  位于椭圆半径为  $R$ , 中心为  $O'(n_1^B - \mu_1, n_2^B - \mu_2)$  的椭圆上, 如上图 1 中的  $A_1, A_2$ 。在此椭圆外的点, 所在椭圆之半径大于  $R$ , 椭圆内的点, 所在椭圆之半径小于  $R$ 。显然当某半径为  $R_0$  的椭圆与直线  $L$  相切时, 该  $R_0$  就是满足  $A_i$  位于直线  $L$  上时  $R$  的最小值, 切点  $A$  就是贝叶斯估计点。

经推导, 贝叶斯估计点  $A$  的坐标为

$$(n_1^A, n_2^A) = \left( \frac{-S_2}{2S_1}, \frac{p_1 S_2}{2p_2 S_1} \right) \quad (6)$$

$$v_1 = n_1^B - \mu_1, \quad v_2 = n_2^B - \mu_2, \quad S_1 = \frac{p_2^2 \sigma_2^2 - 2\rho p_1 p_2 \sigma_1 \sigma_2 + p_1^2 \sigma_1^2}{p_2^2 \sigma_1^2 \sigma_2^2}$$

其中

$$S_2 = \frac{2\rho p_2 \sigma_1 \sigma_2 (p_1 v_1 + p_2 v_2) - 2p_2^2 \sigma_2^2 v_1 - 2p_1 p_2 \sigma_1^2 v_2}{p_2^2 \sigma_1^2 \sigma_2^2}, \quad S_3 = \frac{p_2^2 \sigma_2^2 v_1^2 - 2\rho p_1 p_2 \sigma_1 \sigma_2 v_1 v_2 + p_1^2 \sigma_1^2 v_2^2}{p_2^2 \sigma_1^2 \sigma_2^2}$$

求取(6)式需要知道  $\rho, \mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, v_1, v_2$ , 其关键是获取  $\rho, \mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2$ 。作者推导了一种参考面(或标定面)相位修正的方法, 能够得到非常准确的参考面(或标定面)相位。该修正法的原理是首先推导出在理想状况下相位和坐标应满足的关系式形式, 然后假设噪声为高斯零均值的情况下, 利用实测的相位拟合该关系式, 得到相应的关系式参量, 进而利用这些参量可以求出非常准确的参考面(或标定面)相位<sup>[6]</sup>。根据参考面(或标定面)的相位在修正前后的差异很容易拟合得到相应的二维正态分布参量  $\rho, \mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2$ 。关于二维正态分布拟合的方法已有人进行了研究<sup>[6]</sup>, 本文不再赘述。

推而广之, 三维级数坐标系中, 贝叶斯估计最优点就是以  $O'(n_1^B - \mu_1, n_2^B - \mu_2, n_3^B - \mu_3)$  为中心的某等概率密度椭球面与直线  $L: p_1 n_1 = p_2 n_2 = p_3 n_3$  相切时的切点。在  $N$  维级数坐标系中, 贝叶斯估计的最优点  $A$  就是以  $O'(n_1^B - \mu_1, n_2^B - \mu_2, n_3^B - \mu_3, \dots, n_N^B - \mu_N)$  为中心的某等概率密度超椭球面与  $L: p_1 n_1 = p_2 n_2 = p_3 n_3 = \dots = p_N n_N$  相切时的切点。

### 3 贝叶斯估计法的可靠性

贝叶斯估计点的可靠性依如下原则进行判断: 如果从观测点  $B$  估计真实点  $A_i$  时的概率密度  $f(A'_i | B')$  很大, 那么认为得到估计点是比较可靠的; 反之, 若  $f(A'_i | B')$  很小, 则  $A_i$  很有可能较远地偏离了真实点  $A$ 。

取二维情况进行研究, 如图 1 所示。设  $\overline{AA_2} = t$ , (2) 式可进行变换为

$$f[A'(t) | B'] = \frac{f[B' | A'(t)]}{g(B')} = \frac{\exp\{- (4S_1 S_3 - S_2^2) / [8(1 - \rho^2) S_1]\}}{2\pi\sigma_1\sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2} g(B')} \times \exp\left[-\frac{t^2}{2(1 - \rho^2)(p_1^2 + p_2^2) / (p_2^2 S_1)}\right], \quad (7)$$

可以证明, 如果  $A'(t)$  在整条直线  $L$  上为均匀分布, 则(7)式是一个对于变量  $t$  的高斯正态分布的密度函数:

$$f[A'(t) | B'] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right), \quad (8)$$

其中  $\sigma = \sqrt{(1 - \rho^2)(p_1^2 + p_2^2) / p_2^2 S_1}$ 。

如若  $A'(t)$  在直线  $L$  上某一段  $L_1$  上为均匀分布, 其他部分为 0 概率分布, 这时(8)式便不是正态分布。但  $A'(t)$  在  $L_1$  上的后验概率密度函数的曲线与正态分布很相似, 也是一条有单峰的曲线, 且峰值

就在贝叶斯估计的最优点处(在该点  $t = 0$ )。

对于高斯分布函数, 可以用均方差(或峰值)来衡量数据集中的程度, 若均方差愈小(函数峰值愈大), 则数据愈集中在均值附近。在本文中, 考虑到相移法求解的级数误差之均方差  $\sigma_1, \sigma_2$ , 采用  $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} / \sigma$  作为该点贝叶斯估计修正法的可信度当量。可信度当量  $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} / \sigma$  越大, 则可靠性越高; 反之若此量越小, 可靠性越低。

### 4 以长度为修正量描述方式的直观修正法

对相移法得到的条纹级数进行修正就是根据观测点  $B$  在  $L: p_1 n_1 = p_2 n_2$  上寻找真实点  $A$  的过程, 找到的点就是  $B$  点经过修正后的结果。对于观测点  $B$ , 虽然其可能不是真实点, 但毕竟是经过正确的测量方法得到的, 所以应认为其比较真实, 在对其进行修正的过程中修正量应尽量小。若以长度作为修正量的描述方式, 那么修正的过程显然就是从  $B$  点往  $L: p_1 n_1 = p_2 n_2$  引垂线的过程, 所得垂足  $C$  就是估计点, 如图 2 所示。若  $A$  为真实的级数点, 那么  $\overline{AB}$  为未修正时的误差当量,  $\overline{AC}$  为修正后的误差当量, 显然在  $A, B, C$  三点组成的直角三角形中  $\overline{AC} < \overline{AB}$ , 这说明修正的结果总是要优于实测结果。经推导知道  $C$  点坐标为

$$C\left[\frac{p_2(p_1 n_2^B + p_2 n_1^B)}{p_1^2 + p_2^2}, \frac{p_1(p_1 n_2^B + p_2 n_1^B)}{p_1^2 + p_2^2}\right], \quad (9)$$

该  $C$  点坐标与(6)式中  $\rho = 0, \mu_1 = \mu_2 = 0, \sigma_1 = \sigma_2$  时的坐标相同, 所以直观修正法是贝叶斯估计法的一个特殊情况。三维的情况与二维的情况相似, 在此不再赘述。

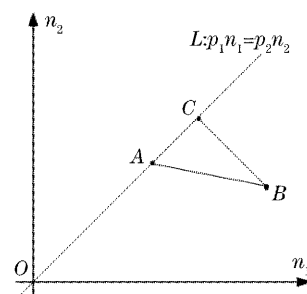


图 2 直观修正法示意图

Fig. 2 Intuitionistic amending method

### 5 实 验

本文针对(6)式与(9)式进行了仿真实验和真实

实验。

### 5.1 仿真实验

制作了某平面的一组相移仿真图,各图像中均加入均方差为 10 的高斯随机噪声,各点的理想相位在制仿真图时输出至一数据文件以备对比。利用相移法得到条纹图中各点在级数坐标系中的分布(观测点集),称此时各点所对应的条纹级数为未修正级数;由观测点集估计理想条纹级数点时按(6)式与

(9)式进行,所得条纹级数称修正后级数。未修正级数与修正后级数分别转换为相位后再与理想相位进行对比,可以得到某截面相应的误差分布。实验结果如图 3 所示。图 3 中(a)图加入了噪声水平为 10 的高斯随机噪声,(b)图中未修正相位误差的均方差为 0.056 rad,(c)图中利用贝叶斯估计法修正后相位误差的均方差为 0.033 rad,(d)图中利用直观修正法修正后相位误差的均方差为 0.034 rad。

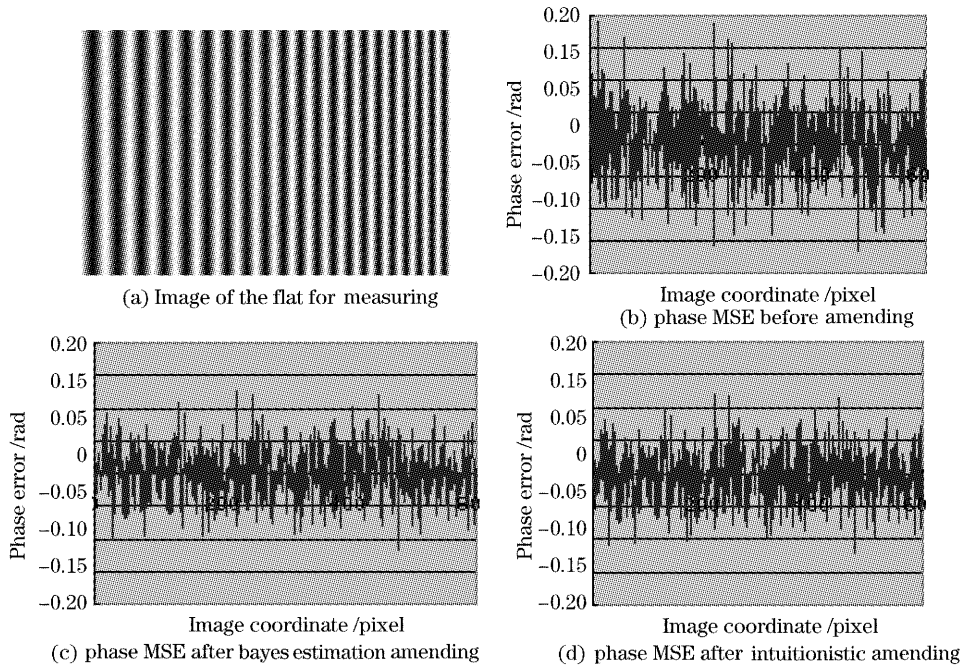


图 3 仿真实验结果

Fig. 3 Result of emulational test

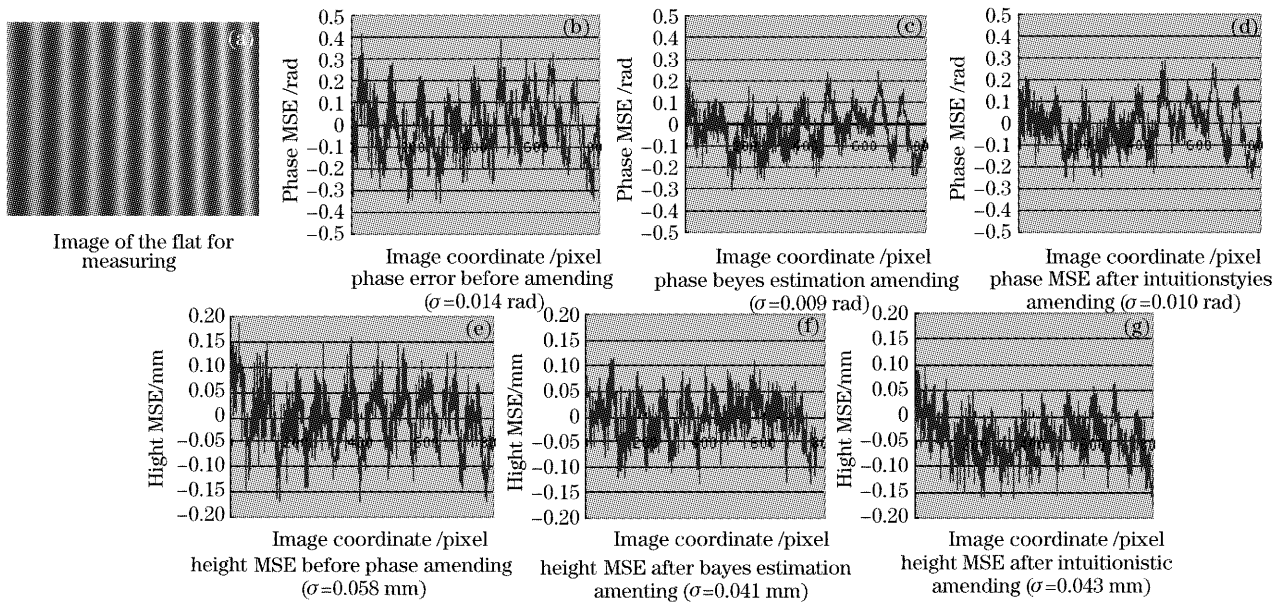


图 4 真实实验结果

Fig. 4 Result of actual experiment

## 5.2 实际实验

对某平板投影双频条纹, 获取相应的条纹图。实验步骤与仿真实验相似, 只是各点的真实相位由拟合法得到, 在此不再赘述。实验结果如图 4 所示。图 4 中, (a) 图摄像机摄取的待测平面图像, (b) 图为未修正相位的  $0.014 \text{ rad}$ , (c) 图为贝叶斯估计法修正后相位的  $0.009 \text{ rad}$ , (d) 图为直观修正法修正后相位的  $0.010 \text{ rad}$ , (e) 图为未进行修正时高度的  $0.058 \text{ mm}$ , (f) 图为贝叶斯估计法修正后高度的  $0.041 \text{ mm}$ , (g) 图为直观修正法修正后高度的  $0.043 \text{ mm}$ 。

## 6 结 论

从实验结果可以看出, 利用贝叶斯估计法和直观修正法对相位进行修正后, 仿真图相位误差的均方差从  $0.056 \text{ rad}$  分别下降为  $0.033 \text{ rad}$  及  $0.034 \text{ rad}$ , 实际图相应的均方差从  $0.014 \text{ rad}$  分别下降为  $0.009 \text{ rad}$  及  $0.010 \text{ rad}$ ; 同时实际实验中高度误差的均方差从  $0.058 \text{ mm}$  分别下降为  $0.041 \text{ mm}$  及  $0.043 \text{ mm}$ , 所以修正方法是有效的。

比较仿真实验与实际实验中相位修正前后的数据, 可以看出仿真实验比实际实验相位改善的幅度要大些。其原因主要是: 制作仿真图时未考虑 CCD 非线性<sup>[7]</sup>、CCD 与 DLP 之间的叠栅效应<sup>[8]</sup> 等的影响, 加入的噪声为高斯随机噪声, 所以用本文提出的方法进行条纹级数修正时是合适的; 而实际实验中, 由于各种误差对条纹图的影响, 所以利用特殊情况对条纹级数进行修正将得不到最理想的效果。作者所在的实验室正在进行上述非线性因素影响的研究, 若能最大程度地减小这些因素的影响, 本文介绍的方法将有望收到更好的效果。

同时可以看出, 贝叶斯估计法修正的结果稍好于直观修正法修正的结果。这是因为贝叶斯估计法考虑了系统的统计特性, 所以修正后的结果能更真实地反应条纹的相位。

## 参 考 文 献

- 1 William W. Macy. Two dimensional fringe pattern analysis [J]. *Appl. Opt.*, 1983, **22**(23): 3898~3900
- 2 Jiang Guirong. Two-frequency method of absolute phase determination in profilometry and error analysis[J]. *J. Appl. Opt.*, 2003, **24**(6): 38~40 (in Chinese)  
江桂荣. 双频相位测量轮廓术及其误差分析[J]. *应用光学*, 2003, **24**(6): 38~40
- 3 Lei Zhihui, Li Jianbing. A full automatic phase unwrapping method based on projected double spacial frequency fringes[J]. *Acta Optica Sinica*, 2006, **26**(1): 39~42(in Chinese)  
雷志辉, 李健兵. 基于双频投影条纹的全自动相位解包裹方法[J]. *光学学报*, 2006, **26**(1): 39~42
- 4 Wu Yu, Li Yongle, Hu Qingjun. *Application of Mathematical Statistics* [M]. Changsha: Publishing House of National University of Defence Technology, 2003 (in Chinese)  
吴 翊, 李永乐, 胡庆军. *应用数理统计*[M]. 长沙: 国防科学技术大学出版社, 2003
- 5 Sheng Zhou, Xie Shiqian, Pan Chengyi. *Probability Theory and Mathematical Statistics* [M]. Beijing: Higher Education Press, 2001 (in Chinese)  
盛 骤, 谢式千, 潘承毅. *概率论与数理统计*[M]. 北京: 高等教育出版社, 2001
- 6 《Math Handbook》writers. *Math Handbook* [M], Beijing: Higher Education Press, 1998 (in Chinese)  
《数学手册》编写组. *数学手册*[M]. 北京: 高等教育出版社, 1998
- 7 Zhao Bing, Guo Bin, Fang Ruhua *et al.*. Effect of quantization error on the computed phase of phase-shifting measurement[J]. *Acta Optica Sinica*, 1996, **16**(12): 1767~1772 (in Chinese)  
赵 兵, 郭 彬, 方如华 等. 相位移法中的量化误差效应[J]. *光学学报*, 1996, **16**(12): 1767~1772
- 8 Shao Shuangyun, Su Xianyu. Moire effect in PMP using DLP and its influence on phase measurement[J]. *J. Sichuan University (Natural Science Edition)*, 2003, **40**(5): 882~887 (in Chinese)  
邵双运, 苏显渝. 采用 DLP 的 PMP 系统中的莫尔效应及其对位相测量的影响[J]. *四川大学学报*, 2003, **40**(5): 882~887