

文章编号: 0253-2239(2006)12-1861-5

高斯光束在克尔型非线性介质中演化的奇异特性

刘雅洁¹ 冯启元²

(¹ 嘉兴学院 物理教研室, 嘉兴 314001)
(² 内蒙古大学物理系, 呼和浩特 010021)

摘要: 由光束在克尔型吸收介质中传输的非线性薛定谔方程出发, 推导了高斯光束注入介质后满足的耦合方程。在不考虑高阶展开项的前提下, 将介质分为无吸收、有吸收两种情况, 对脉冲的腰斑半径的演化进行了解析分析, 得到注入克尔型非线性介质中的高斯光束, 形成“孤波”必须满足光束在束腰处注入, 介质没有吸收的条件; 当考虑高阶展开项时, 通过数值分析发现, 无论介质是否存在吸收, 光束传输不存在“孤波”形式, 而是在注入强度的控制之下。当注入强度较小时, 自聚焦过程是它的一个主要结果。但当注入脉冲的强度增加后, 除了腰斑半径不为零的区间增加, 光束仍保持聚焦的正常现象之外, 存在一个阈值。当注入强度超过此阈值时, 腰斑半径随着距离的增加而快速增加, 聚焦趋势根本就不存在。

关键词: 高斯光束; 克尔型吸收介质; 非线性薛定谔方程; 腰斑半径; 自聚焦

中图分类号: O437.5 文献标识码: A

Singularity Feature of Gaussian Beam Propagating in Absorptive Kerr Medium

Liu Yajie¹ Feng Qiyuan²

(¹ Physics Teaching & Research Section, Jiawing Institute, Jiawing 314001)
(² Department of Physics Inner Mongolia University, Huhhot 010021)

Abstract: From the nonlinear Schrödinger equation of beam propagating in Kerr absorbing medium, a set of evolution equations describing Gaussian beam waist radius have been deduced. As taking no account of high order expanded term, the evolution of beam waist radius in medium without or with absorption has been analyzed theoretically. And the result is that the beams would form solitary wave only as inputting at waist, no absorption are acquired. As taking account of high order expanded terms, there exists no solitary wave in beam propagation by numerical analysis without or with absorption, and the beams are controlled by input intensity. When input intensity is smaller, the beam would behave self-focusing only. Along with the increasing of input intensity, there is a threshold. As the input intensity is below this threshold, the input beam behaves self-focusing still; but as the input intensity surpasses this threshold, the input beam behaves diffraction strongly, no self-focusing occurs at all.

Key words: Gaussian beam; Kerr nonlinear medium; the nonlinear Schrödinger equation; waist radius; self-focusing

1 引言

近年来, 激光脉冲在块状非线性介质中的传输问题越来越受到人们的关注^[1~4]。激光光束的高强度特性使得它在通过介质时, 对介质的物理特性的改变是不容忽视的, 特别是非线性效应。这是因为非线性效应反过来会影响光束的传输行为。当光束

的衍射行为与介质的非线性效应(如自聚焦)相匹配时, 就会导致光束自陷(Self-trapping)而形成空间光孤子, 从而使光束能够在空间传输很长一段距离, 其横向尺寸不发生变化。

理论上讨论光学孤子的基本方程是非线性薛定谔方程(NLSE)。根据介质不同的非线性特性, 如

作者简介: 刘雅洁(1962~), 女, 内蒙古包头人, 理学硕士, 副教授, 主要从事非线性光学传输理论方面的研究。

E-mail: lyj0919@mail.zjxu.edu.cn

收稿日期: 2005-05-25; 收到修改稿日期: 2006-09-10

克尔型^[5~7]或饱和非线性型^[6,8,9],方程的解及其特性是不相同的。大量的研究表明^[6,10],在(1+1)维(横向一维,传输方向一维)的情形下,非线性薛定谔方程的孤子解存在且稳定。在(2+1)维和(3+1)维的情形下与介质的非线性特性有关。如果介质具有饱和非线性,解是稳定的,也即在这类介质中存在稳定孤子解;如果介质具有克尔非线性,其解是不稳定的,即在这类介质中不存在稳定孤子解。按照已有的结果^[11],满足非线性薛定谔方程的自洽解是双曲正割型,但一般激光器的输出脉冲具有高斯型空间分布,亦即注入到非线性介质中的激光脉冲并不满足非线性薛定谔方程方程自洽解的要求。

近年来,一些文章讨论了基态高斯光束或类高斯光束在非线性介质中的传输特性^[12~15]。在讨论方法上,有的假设高斯光束在传输过程中保持分布不变——自相似假设^[12,15],有的直接采用数值分析的方法^[12~14]进行数值模拟,取得了一些有益的结果。我们认为,在分析高斯光束传输问题时,自相似假设仅是一个初级假设,光束相位的空间部分会发生改变,引入与位置有关的空间啁啾。

本文从慢变包络光场满足的非线性薛定谔方程出发,推导出了基态高斯光束在克尔非线性介质中满足的耦合方程,对高斯光束的参量——腰斑半径的演化分几种情况进行了详尽的讨论,得到了在克

尔型非线性介质中的有关高斯光束传输的一些有益结论。

2 基本方程

当光束在有损耗的介质中沿 z 方向传输时,光场 $E(\mathbf{r}, t) = E(\mathbf{r}) \exp(ik_0 z - i\omega t)$ 的慢变包络为 $E(\mathbf{r}) = E(x, y, z)$,它在非线性介质中传输时满足非线性薛定谔方程

$$2ik_0 \frac{\partial E}{\partial z} + ik_0 a E + \nabla_{\perp}^2 E + 2k_0 \frac{\omega}{c} n_{\text{NL}}(I) E = 0, \quad (1)$$

描述光束的横向分布的坐标为 x, y 。 ω 是光束振荡的中心频率, k_0 是光束传播的角波数,有 $k_0 = \frac{n_0 \omega}{c} = \frac{2\pi n_0}{\lambda}$, n_0 是介质折射率线性部分, λ 是光在真空中的波长, c 是光在真空中的速度, $I = |E|^2$ 表示光强, $n_{\text{NL}}(I)$ 是折射率依赖光强变化的部分,即介质的非线性响应部分。对于克尔自聚焦介质, $n_{\text{NL}}(I) = n_2 |E|^2$ (n_2 是大于零的常数)。 ∇_{\perp}^2 是横向拉普拉斯算符。

将介质中的光场一般性写作

$$E(x, y, z) = A(r, z) \exp[i\phi(r, z)], \quad (2)$$

这是考虑到自由空间中高斯光束的基本形式

$$E(x, y, z) = \frac{E_0 \omega_0}{w(z)} \exp\left[i\eta(z) - \frac{r^2}{w^2(z)} - \frac{ik_0}{2} \frac{r^2}{R(z)}\right] \quad (3)$$

写出的。其中 ω_0 是高斯光束在“束腰”处的光斑半径, $w(z)$ 是任意位置处的光斑半径。 $R(z)$ 是波阵面的曲率半径。(3)式恰是(2)式在 $n_2 = 0$ 满足(1)式的解。可见,当光的强度较大,非线性效应不可忽略时,(2)式的具体形式必须重新考虑。

将(2)式代入(1)式,并将实、虚部分开,得

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{A}{2k_0} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \right) + \frac{1}{k_0} \frac{\partial A}{\partial r} \frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{\alpha}{2} A, \quad (4a)$$

$$\frac{1}{k_0} \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{2k_0^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)^2 = \frac{1}{2k_0^2 A} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{n_2}{n_0} A^2, \quad (4b)$$

假设高斯光束注入到非线性介质中,基本上保持其横向分布,将(2)式中 $A(r, z)$ 和 $\phi(r, z)$ 写作

$$A(r, z) = E_0 \omega_0 \left[\frac{1}{w(z)} + \delta(z) \right] \exp\left(-\frac{r^2}{w^2(z)}\right),$$

即

$$A(r, z) = E_0 \omega_0 K(z) \exp\left[-\frac{r^2}{w^2(z)}\right],$$

$$\phi(r, z) = \frac{-k_0 r^2}{2R(z)} + \sum_{n>1} a_{2n} r^{2n} + \eta(z), \quad (5a)$$

即

$$\phi(r, z) = \sum_{m=0} a_{2m} r^{2m}, \quad (5b)$$

其中 $a_{2m} = a_{2m}(z)$ ($m = 0, 1, 2, 3, \dots$)。 $a_0(z)$ 是由于传输而附加的相位, $a_2(z)$ 对应于波面的曲率, a_{2m} ($m \geq 2$)

对应于相位畸变。这样的写法使得下面的推导显得更加合理一些。将(5)式代入(4)式,经过一些推导,得到一组耦合方程

$$\frac{dK(z)}{dz} + \frac{2K(z)r^2}{w^3(z)} \frac{dw(z)}{dz} + \frac{2K(z)}{k_0} \sum_{m=0} a_{2m} \cdot m^2 \cdot r^{2m-2} - \frac{2}{k_0} \frac{K(z)}{w^2(z)} \sum_{m=0} 2m \cdot a_{2m} \cdot r^{2m} = -\frac{\alpha}{2} K(z), \quad (6)$$

$$\frac{1}{k_0} \sum_{m=0} \frac{da_{2m}}{dz} r^{2m} + \frac{2}{k_0^2} \left(\sum_{m=0} m \cdot a_{2m} \cdot r^{2m-1} \right)^2 = \frac{2}{k_0^2} \left[-\frac{1}{w^2(z)} + \frac{r^2}{w^4(z)} \right] + \frac{n_2}{n_0} A^2, \quad (7)$$

其中

$$\frac{n_2}{n_0} A^2 = \frac{n_2}{n_0} E_0^2 w_0^2 K^2(z) \left[1 - \frac{2r^2}{w^2(z)} + \frac{2r^4}{w^4(z)} - \frac{4r^6}{3w^6(z)} + \dots \right], \quad (8)$$

这组耦合方程一般情况下很难解出。下面,先做一些简化,以便能够通过数学分析的方法,得到一些能够说明光束腰斑半径演化的初级结果。

3 光束腰斑半径的演化特征

3.1 忽略高阶展开项(r^4)

3.1.1 无吸收($\alpha=0$)

在这个条件下,耦合方程写作

$$\frac{da_0}{dz} = -\frac{2}{k_0 w^2(z)} + k_0 \Omega^2 K^2(z), \quad (9)$$

$$\frac{dK(z)}{dz} + \frac{2a_2 K(z)}{k_0} = 0, \quad (10)$$

$$\frac{dw(z)}{dz} - \frac{2a_2 w(z)}{k_0} = 0, \quad (11)$$

$$\frac{da_2}{dz} + \frac{2a_2^2}{k_0} = \frac{2}{k_0 w^4(z)} - 2k_0 \Omega^2 \frac{K^2(z)}{w^2(z)}, \quad (12)$$

其中 $\Omega^2 = n_2 E_0^2 w_0^2 / n_0 a_0(z)$ 是由于传输而附加的相位。(9)式说明,这个量也受到腰斑半径非线性演化的调制。由(10)式、(11)式,得

$$K(z)w(z) = K(0)w(0), \quad (13)$$

其中 $K(0)$ 和 $w(0)$ 是注入处($z=0$)的 $K(z)$ 和 $w(z)$ 值。考虑到(3)式和(5a)式,在注入处 $K^2(0)w^2(0) = 1$ 。将(13)式代入(9)式,得

$$\frac{da_0}{dz} = k_0 \left(\Omega^2 - \frac{2}{k_0^2} \right) \frac{1}{w^2(z)}, \quad (14)$$

$a_0(z)$ 的变化率仅与 $w(z)$ 有关系。由于我们仅关注光束的腰斑半径的演化,可以先不考虑式(14)。由(11)式,得

$$a_2 = \frac{k_0}{2w(z)} \frac{dw(z)}{dz}, \quad (15)$$

求 z 导数,得

$$\frac{da_2}{dz} = -\frac{k_0}{2w^2(z)} \left[\frac{dw(z)}{dz} \right]^2 + \frac{k_0}{2w(z)} \frac{d^2 w(z)}{dz^2}, \quad (16)$$

将(15)式、(16)式代入(12)式,并利用(13)式及 $K^2(0)w^2(0) = 1$,得

$$\frac{d^2 w(z)}{dz^2} = 4 \left(\frac{1}{k_0^2} - \Omega^2 \right) \frac{1}{w^3(z)},$$

经过一定的推导,最后得

$$\frac{d}{dz} \left\{ \left[\frac{dw(z)}{dz} \right]^2 - 4 \left(\Omega^2 - \frac{1}{k_0^2} \right) \frac{1}{w^2(z)} \right\} = 0,$$

即

$$\left[\frac{dw(z)}{dz} \right]^2 = \left[\frac{dw(z)}{dz} \right]^2 \Big|_{z=0} + 4 \left(\Omega^2 - \frac{1}{k_0^2} \right) \left[\frac{1}{w^2(z)} - \frac{1}{w^2(0)} \right]. \quad (17)$$

若在介质中形成所谓的空间“孤波”,则须使

$$\frac{dw(z)}{dz} = 0, \text{ 对所有的 } z \text{ 存在。由(17)式,当高斯光}$$

束以任意位置 $\left[\frac{dw(z)}{dz} \Big|_{z=0} \neq 0 \right]$ 注入介质时,由于

(17)式第二项是位置的函数,不能满足孤波条件 $\frac{dw(z)}{dz} = 0$ 对任意 z 均成立,故无法形成空间“孤

波”,其演化趋势分别对应 $\frac{dw(z)}{dz} > 0$ 或 $\frac{dw(z)}{dz} < 0$ 。对

于前者,光束在介质中的腰斑半径随着 z 的增大逐渐增大,呈衍射趋势;对于后者,光束在介质中的腰斑半径随着 z 的增大逐渐减小,呈聚焦趋势。可见,若要在介质中形成“孤波”,必须使高斯光束在“束腰”处注

入 $\left[\text{此时, } \frac{dw(z)}{dz} \Big|_{z=0} = 0, w(0) = w_0 \right]$, 强度 E_0^2 应

满足 $(k_0^2 \Omega^2 - 1) = 0 \left(\Omega^2 = \frac{n_2 E_0^2 w_0^2}{n_0} \right)$ 。

3.1.2 有吸收($\alpha \neq 0$)

在有吸收的情况下,除了(10)式由

$$\frac{dK(z)}{dz} + \frac{2a_2 K(z)}{k_0} = -\frac{\alpha}{2} K(z), \quad (18)$$

替代外,(9)式、(10)式、(11)式保持不变。经过与上面同样的推导过程,得到

$$\frac{d^2 w(z)}{dz^2} = 4 \left[\frac{1}{k_0^2} - \Omega^2 \exp(-\alpha z) \right] \frac{1}{w^3(z)}, \quad (19)$$

由于因子 $\exp(-\alpha z)$ 的存在,(19)式不能满足孤波

条件 $\frac{d^2w(z)}{dz^2} = 0$ 对任意 z 均成立,故在有吸收存在的介质中,高斯光束不能通过“自陷”,形成“孤波”。由数学分析知,在整个介质 ($z > 0$) 中,若 $\frac{d^2w(z)}{dz^2} > 0$,则曲线上凹,对应着衍射趋势;若 $\frac{d^2w(z)}{dz^2} < 0$,则 $w(z)$ 曲线下凹,对应着聚焦趋势。且存在一个位置 $z = z_0$,使得 $\left. \frac{d^2w(z)}{dz^2} \right|_{z=z_0} = 0$,但当 z 渐增通过 z_0 时, $\frac{d^2w(z)}{dz^2}$ 由小于零变到大于零,则 $w(z)$ 从聚焦趋势转变到衍射趋势。让(18)式的右端等于零,得到这个 z_0 值

$$z_0 = \frac{1}{\alpha} \ln(k_0^2 \Omega^2),$$

仅当 $\Omega^2 \geq 1/k_0^2$ 时, $z_0 \geq 0$,在介质内部。

从上面的分析,可以知道:1) 若注入的高斯光束的参量 $\Omega^2 = n_2 E_0^2 w_0^2 / n_0 < 1/k_0^2$,则(19)式右端保证 $\frac{d^2w(z)}{dz^2} > 0$,在整个介质中均成立,说明光束进入介质之后,一直处于衍射趋势;2) 若注入的高斯光束的参量 $\Omega^2 = n_2 E_0^2 w_0^2 / n_0 > 1/k_0^2$,则(19)式右端在 z 较小时, $\frac{d^2w(z)}{dz^2} < 0$,说明光束进入介质之后,处于聚焦趋势。随着光束的传输, z 逐渐增大,若存在 $1/k_0^2 > \Omega^2 \exp(-\alpha z)$ 的位置 z , $\left[z > \frac{1}{\alpha} \ln(k_0^2 \Omega^2) = z_0 \right]$,否则光束在一直保持聚焦趋势,直至聚焦“崩塌”,此时聚焦点 $z < \frac{1}{\alpha} \ln(k_0^2 \Omega^2) = z_0$ 。可见, z_0 是一个特征点,在文献[15]中被称作特征长度。

由此可以得到这样的结论,注入的高斯光束,其在克尔非线性介质中传输能够形成“孤波”的条件是极其苛刻的:光束在束腰处注入,介质没有吸收。

3.2 考虑高阶展开项 (r^4)

3.2.1 无吸收 ($\alpha = 0$)

描述这个条件下的腰斑半径 $w(z)$ 演化趋势的方程是(10)式、(12)式及

$$\frac{dw(z)}{dz} + \frac{4a_4 w^3(z)}{k_0} - \frac{2a_2 w(z)}{k_0} = 0, \quad (20)$$

$$\frac{da_4}{dz} + \frac{8a_2 a_4}{k_0} = \frac{2k_0 \Omega^2 K^2(z)}{w^4(z)}, \quad (21)$$

同样, $a_0(z)$ 是由于传输而附加的相位,在这里仍不影响 $w(z)$ 的演化。显然,考虑高阶展开项后, $K(z)$ 和 $w(z)$ 的关系(13)式已经不存在,而与 a_2 和 a_4 由(10)式、(12)式、(20)式、(21)式相互耦合。这组耦

合方程无法用解析的方式分析,我们通过数值计算的方法进行分析。在注入光波波长固定,非线性介质一定,光波在“束腰”处的光斑半径一定的情况下,参量 Ω^2 (正比于 E_0^2) 的取值影响解的形式。按照 $\alpha = 0, \lambda = 1.05 \mu\text{m}, w_0 = 0.1 \text{ cm}, n_0 = 1.52, n_2 = 3 \times 10^{-7} \text{ cm}^2/\text{GW}$ 的取值情况下, $\Omega^2 = 1.974 \times 10^{-9} E_0^2 (\text{cm}^2)$,我们进行了数值计算,由图1给出了不同 E_0^2 时, $w(z)$ 演化趋势。

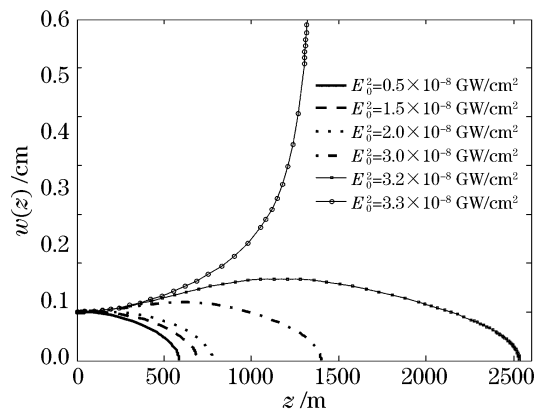


图1 考虑高阶展开项 r^4 且 $\alpha = 0$ 的情况下,高斯光束腰斑半径 $w(z)$ 在不同 E_0^2 值时的演化趋势

Fig. 1 Evolution of the beam waist radius $w(z)$ with different E_0^2 as $\alpha = 0$ when considering r^4

从图1可以看出,1) 当 $E_0^2 \leq 2 \times 10^{-8} \text{ GW/cm}^2$ 时,光束进入到非线性介质内之后, $w(z)$ 单调减小,直至聚焦,说明整个过程非线性效应占优势。且 E_0^2 值大,则焦点距注入点的距离大。2) 当 $E_0^2 > 2 \times 10^{-8} \text{ GW/cm}^2$,开始 $w(z)$ 值增大,说明衍射效应占优势;当光束走过一段距离之后, $w(z)$ 开始减小,非线性效应逐渐占优势,直至聚焦现象发生。且 E_0^2 值大,则现象越明显,焦点距注入点的距离大。3) 当 E_0^2 增大到 $3.2 \times 10^{-8} \text{ GW/cm}^2$ 的附近时,存在一个阈值,当

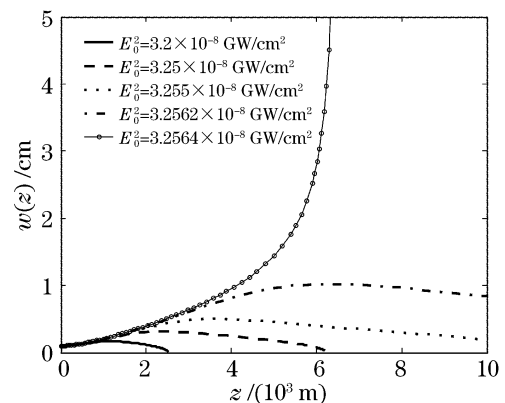


图2 考虑高阶展开项 r^4 且 $\alpha = 0$ 的情况下,高斯光束腰斑半径 $w(z)$ 在 E_0^2 在接近 $3.3 \times 10^{-8} \text{ GW/cm}^2$ 时的演化趋势
Fig. 2 Evolution of the beam waist radius $w(z)$ with E_0^2 as $\alpha = 0$ near to $3.3 \times 10^{-8} \text{ GW/cm}^2$ when considering r^4

E_0^2 小于这个阈值时, $w(z)$ 的演化与 2) 相同; 当 E_0^2 大于这个阈值时, $w(z)$ 的演化单调快速增加, 说明衍射效应的优势越来越强, 不会有聚焦趋势发生。为了更好的说明这个现象, 我们用图 2 详细地说明 E_0^2 由 $3.2 \times 10^{-8} \text{ GW/cm}^2$ (此时存在聚焦现象) 逐渐增大到 $3.2564 \times 10^{-8} \text{ GW/cm}^2$ 过程中, $w(z)$ 的演化。从图 2 中可以看出, 的确存在着 E_0^2 的一个阈值 E_{0c}^2 。

3.2.2 有吸收 ($\alpha \neq 0$)

描述这个条件下的腰斑半径 $w(z)$ 演化趋势的方程是(12)式、(18)式、(20)式、(21)式。通过数值计算, 得到高斯光束腰斑半径 $w(z)$ 的演化趋势, 如图 3 所示。其中, 波长 λ 、束腰半径 w_0 、折射率 n_0 和非线性系数 n_2 与 3.2.1 中相同, 吸收系数 α 取 0.02 cm^{-1} 。从图 3 可以看出, $w(z)$ 在演化形式上与吸收系数 $\alpha=0$ 时的情况一致, 只是传输距离不同, $w(z)$ 出现奇异时的 E_{0c}^2 值不同。

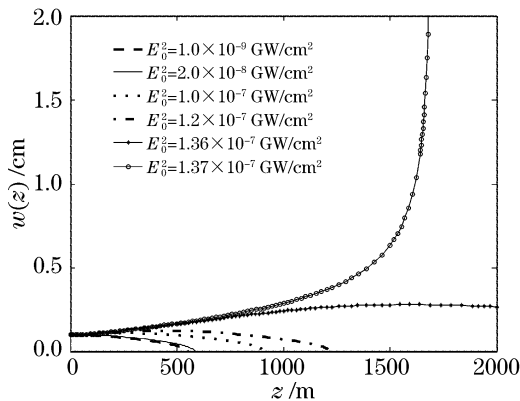


图 3 考虑高阶展开项 r^4 且 $\alpha=0.02$ 时, 高斯光束腰斑半径 $w(z)$ 在不同 E_0^2 值时的演化趋势

Fig. 3 Evolution of the beam waist radius $w(z)$ with E_0^2 as $\alpha=0.02$ when considering r^4

4 结 论

通过对高斯光束在克尔型吸收介质中的传输演化行为由简单到复杂的讨论, 得到了一些有益的结果。在不考虑高阶展开项 (r^4) 的情况下, 得到了已有的类似结论^[15]。当考虑高阶展开项 (r^4) 且无吸收的情况下, 得到了新的结果—高斯光束进入到克尔型非线性介质中后, 光束的行为受到 E_0^2 (注入强度) 值的控制。当 E_0^2 值较小时, 自聚焦过程是它的一个主要结果。但当注入脉冲的强度增加后, 除了

$w(z)$ 不为零的区间增加, 光束仍保持聚焦的正常现象之外, 存在一个阈值 E_{0c}^2 ! 当 E_0^2 的值超过此阈值 E_{0c}^2 , 注入脉冲进入介质后, 腰斑半径 $w(z)$ 随着距离的增加而快速增加, 聚焦趋势根本就不存在。

参 考 文 献

- 1 Yu S. Kivshar, G. I. Stegeman. Spatial optical solitons: Guiding light for future technologies [J]. *Opt. Photon. News*, 2002, **13**(2): 59~63
- 2 G. I. Stegeman, M. Segev. Optical spatial solitons and their interactions: universality and diversity [J]. *Science*, 1999, **286**(5444): 1518~1523
- 3 C. Zhigang, M. Mitchell, M. Segev *et al.*. Self-trapping of dark incoherent light beams [J]. *Science*, 1998, **280**(5365): 889~892
- 4 Chen Zhigang. Fascinating behavior of optical spatial solitons [J]. *Physics*, 2001, **30**(12): 752~756 (in Chinese)
陈志刚. 奇妙的空间光孤子 [J]. *物理*, 2001, **30**(12): 752~756
- 5 G. Fibich, R. Weiqing, W. Xiao-ping. Numerical simulations of self-focusing of ultrafast laser pulses [J]. *Phys. Rev. E*, 2003, **67**(5): 056603-1~056603-9
- 6 M. S. Bigelow, Q-Han Park, R. W. Boyd. Stabilization of the propagation of spatial solitons [J]. *Phys. Rev. E*, 2002, **66**(4): 046631-1~046631-5
- 7 G. Fibich, A. L. Gaeta. Critical power for self-focusing in bulk media and in hollow waveguides [J]. *Opt. Lett.*, 2000, **25**(5): 335~337
- 8 H. Buljan, M. Segev, M. Soljčić *et al.*. White-light solitons [J]. *Opt. Lett.*, 2003, **28**(14): 1239~1241
- 9 C. Anastassiou, C. Pigier, M. Segev *et al.*. Self-trapping of bright rings [J]. *Opt. Lett.*, 2001, **26**(12): 911~913
- 10 D. V. Skryabin, W. J. Firth. Dynamics of self-trapped beams with phase dislocation in saturable Kerr and quadratic nonlinear media [J]. *Phys. Rev. E*, 1998, **58**(3): 3916~3930
- 11 Huang Nian-ning. *Soliton Theory and Its Perturbative Methods* [M]. Shanghai: Shanghai Science and Technology Education Press, 1996
黄念宁. *孤子理论和微扰法* [M]. 上海: 上海科技出版社, 1996
- 12 Wen Shuangchun, Fan Dianyuan. Non-paraxial propagation of optical beams in nonlinear self-focusing media [J]. *Chin. J. Lasers*, 2001, **28**(12): 1066~1070 (in Chinese)
文双春, 范滇元. 非线性自聚焦介质中光束的非傍轴传输 [J]. *中国激光*, 2001, **28**(12): 1066~1070
- 13 Miao Runcai, Shen Changyu, Ye Qing *et al.*. Self-focusing effect of circle spot laser beam in Kerr-medium [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2003, **32**(2): 204~208 (in Chinese)
苗润才, 沈常宇, 叶青等. 环形斑光束在非线性克尔介质中的自聚焦效应 [J]. *光子学报*, 2003, **32**(2): 204~208
- 14 Li Zhongdong, Guo Qi, Lin Weigan. Numerical research on the self-focusing of optical beams [J]. *Chin. J. Lasers*, 1999, **26**(8): 711~716 (in Chinese)
李忠东, 郭旗, 林为干. 光束自聚焦效应的数值研究 [J]. *中国激光*, 1999, **26**(8): 711~716
- 15 Zhang Kejun, Lin Xiaodong, Jing Feng *et al.*. Specify steady-state self-focusing behaviors of circular Gaussian beams travelling inside absorptive Kerr medium [J]. *Chin. J. Lasers*, 2002, **29**(7): 613~615 (in Chinese)
张科军, 林晓东, 景峰等. 圆对称高斯光束在吸收克尔介质中的稳态自聚焦行为 [J]. *中国激光*, 2002, **29**(7): 613~615