

文章编号: 0253-2239(2006)11-1687-4

# 基于数值模拟的高准确度五步相移算法研究<sup>\*</sup>

罗志勇 陈朝晖 顾英姿 陈允昌

(中国计量科学研究院, 北京 100013)

**摘要:** 传统五步算法具有很好的准确度,但必须满足测量中无法实现的等步长相移条件,这在实际测量中无法使用。为此在双光束干涉原理的基础上,提出了一种改进型的五步算法,实现了在 10 nm 范围内任意步长的算法高准确度。通过数值模拟,结果表明:对于 1 nm 的步长测量误差、0.1% 的信号测量误差,改进型五步算法的算法准确度优于 0.001 个相位周期,而且不需要等步长相移控制。改进型五步算法不仅技术上更易于实现,其结果也更加可靠,对于指导精密测长的实验和研究工作具有十分重要的意义。

**关键词:** 光学测量; 相移算法; 五步算法; 精密测长; 相位误差

中图分类号: TH774.3 文献标识码: A

## Five-Bucket Phase-Shifting Algorithm Based on Numerical Simulation

Luo Zhiyong Chen Zhaohui Gu Yingzi Chen Yunchang

(National Institute of Metrology, Beijing 100013)

**Abstract:** Although the traditional five-bucket phase-shifting algorithm possesses excellent accuracy, it isn't used in the practical length measurement because of the strict conditions of equal step length of phase shifting. Based on two-beam interference principle, a corrected five-bucket phase-shifting algorithm which possesses high accuracy with an arbitrary phase step in range of 10 nm is present. With the numerical simulation, it shows that the accuracy of the corrected algorithm is better than 0.001 phase period when the measuring error of the phase step is 1 nm and the measuring error of the signal is 0.1%, besides that, this algorithm does not need accurate equal step length of phase shifting. With higher reliability and higher accuracy, the corrected five-bucket phase-shifting algorithm is very valuable for the precision length measurement.

**Key words:** optical measurement; phase-shifting algorithm; five-bucket phase-shifting algorithm; precision length measurement; phase error

## 1 引言

在高准确度测长系统中干涉光强分布并不是严格的余弦依赖,如菲佐干涉仪、法布里-珀罗干涉仪等,由于其中一束光经过光学表面的多次反射,其干涉光强分布不严格随相位变化余弦分布<sup>[1~6]</sup>。在这种情况下,将引起余弦算法中的光强信号与实际测量光强信号之间的误差,如果再按标准算法进行相位处理,必然会引入较大的算法误差,因此产生了多光束干涉相移算法<sup>[7~9]</sup>。多光束干涉相移算法因为精确计算了多光束干涉的光强信号,因此不存在由算法引入的光强误差,从这一点上看是优于余弦依赖算法的。但是,干涉光束相位差的求解还包括另外两个重要影响因素:光强信号的测量误差和相移

步长的控制准确度,对这两个因素的敏感程度也决定着算法的优劣。

本文对余弦依赖算法中的最优算法——五步算法所引起的相位误差(“相位误差”即两束相干光的相位差的求解或测量误差)进行研究,并针对算法中存在的问题提出一种改进的优化算法,用于指导精密测长中的实验和研究工作。

## 2 余弦依赖五步算法的误差研究

忽略多次反射光强信号将引起余弦算法中的信号与实际测量光强信号之间的误差,从而影响相位的求解准确度;此外光强信号的测量误差和相移步长的控制准确度也是影响相位准确度的重要因素。

<sup>\*</sup> 科学技术部项目(2002DEA20014)资助课题。

作者简介: 罗志勇(1964~),男,四川人,中国计量科学研究院研究员,主要从事精密测长研究。

E-mail: luozhy9999@sina.com

收稿日期: 2006-02-16; 收到修改稿日期: 2006-05-29

## 2.1 忽略多光束干涉引入的相位误差

研究表明,由于忽略多次反射光的影响,导致了四步算法显著的相位误差,达到了1%,相比之下五步算法对于忽略多次反射光导致的光强信号误差敏感度较低,优于四步算法。我们研究忽略多次反射光对五步算法引起的固有误差。设 $A_0$ 为光束入射到标准板时的振幅,标准板、待测面的反射率分别为 $\rho$ 和 $\rho'$ 。则干涉信号可表示为

$$I = A_0^2 \left[ 1 - \frac{(1-\rho)(1-\rho')}{1+\rho\rho' - 2\sqrt{\rho\rho'}\cos\varphi} \right]. \quad (1)$$

如忽略光的多次反射,则双光束干涉信号可简单表示为:

$$I' = A_0^2 [\rho + \rho'(1-\rho)^2 - 2\sqrt{\rho\rho'}(1-\rho)\cos\varphi]. \quad (2)$$

设五步干涉信号分别为 $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5$ ,对应的相位分别为 $\varphi-2\epsilon, \varphi-\epsilon, \varphi, \varphi+\epsilon, \varphi+2\epsilon$ ,其中 $\epsilon$ 为相移步长,取最优值 $\epsilon = \pi/2$ ,将其分别代入(2)式,列解方程组可得

$$\tan\varphi = \frac{2(I_2 - I_4)}{2I_3 - I_5 - I_1}. \quad (3)$$

欲求相位随光强的变化,将(3)式分别对光强 $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5$ 求偏导,考虑到 $\epsilon = \pi/2$ ,可得

$$\Delta\varphi = \frac{\sin\varphi}{4}(\Delta I_1 - 2\Delta I_3 + \Delta I_5) + \frac{\cos\varphi}{2}(\Delta I_2 - \Delta I_4). \quad (4)$$

(4)式中 $\Delta I_i = I_i - I'_i$ 由(1)式、(2)式给出。根据(4)式可得五步算法的相位误差与标准板和待测面反射系数、相位差的关系如图1所示。

可见当两个反射面或其中一个面反射率较低时,五步算法极大地降低了由于光强误差所引起的相位误差,如当 $\rho=0.035, \rho'=0.35$ 时相位误差小

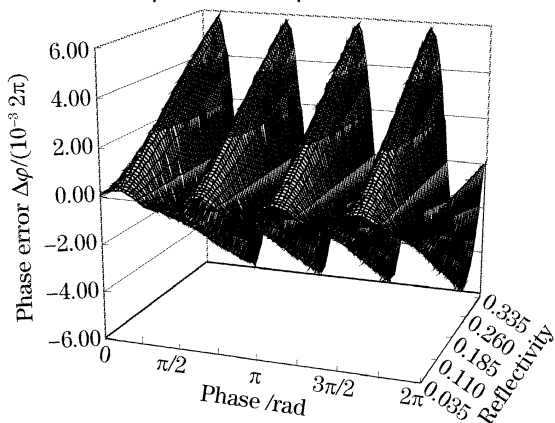


图1 五步算法相位误差随反射率、相位差的变化曲线  
Fig. 1 Phase error of five-step interferograms versus reflectivity and phase difference

于0.01%;但当反射系数增加时,相位误差以较快的速度增加。当 $\rho=0.35$ 即当两个反射面的反射系数均为0.35时最大相位误差已超过0.5%个相位周期,并将随着反射系数的增加而继续增大。

## 2.2 干涉信号测量误差对相位误差的影响

相位误差同时取决于光强信号的测量误差,假设干涉信号测量误差均相同且为与最大信号的比值为 $\Delta I_i/I_{\max}$ 。在 $\Delta I_i/I_{\max}$ 优于1%(典型的测量误差)的情况下,多光束干涉算法、余弦依赖四步算法和五步算法的相位误差分别是6.7%,0.43%,0.15%,对于高准确度测量均不能忽略,但是五步算法是明显优于其他算法的。

## 2.3 步长控制误差对相位误差的影响

步长控制误差是相移干涉法中最主要也是最难控制的误差源。为了研究多光束干涉相移算法步长控制误差对相位的影响,根据(3)式,对 $\epsilon$ 求导可得

$$\Delta\varphi = \frac{\sin 2\varphi \cos \epsilon}{2} \Delta\epsilon. \quad (5)$$

考虑到 $\Delta\epsilon$ 较小,作为一种近似可视 $\cos(\pi/2 + \Delta\epsilon)$ 与 $\Delta\epsilon$ 为线性关系。因此为更准确地求得 $\Delta\varphi$ ,取步长中值 $(\pi/2 + \Delta\epsilon/2)$ 作为变量 $\epsilon$ ,代入(5)式有

$$\Delta\varphi = \frac{\sin 2\varphi}{2} \sin\left(\frac{\Delta\epsilon}{2}\right) \Delta\epsilon, \quad (6)$$

则相位测量误差 $\Delta\varphi$ 与 $\varphi$ 和 $\Delta\epsilon$ 的关系可用图2表示。

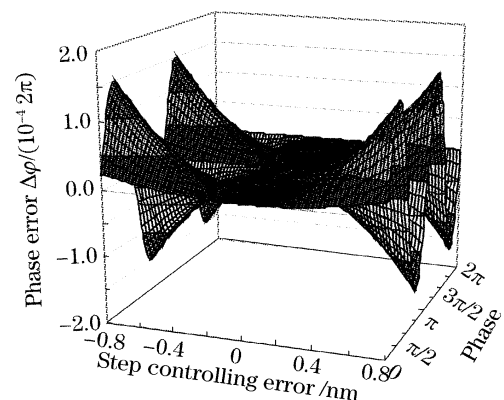


图2 相位测量误差与 $\varphi$ 和 $\Delta\epsilon$ 的关系

Fig. 2 Measuring error of phase versus  $\varphi$  and  $\Delta\epsilon$

由图可知,当步长测量误差优于 $\pm 0.8$  nm时五步算法给出的相位误差达到 $2 \times 10^{-4}$ 个相位周期,即影响长度准确度约为 $\pm 0.063$  nm(基于633 nm激光束),比相同条件下其他算法给出的相位误差低两个数量级以上,这也是五步算法最大的优势。

## 3 对余弦依赖五步算法的改进

余弦依赖五步算法极大地提高了相位测量的准

准确度。但是,一方面五步算法对步长控制误差不敏感也仅仅局限在一个以  $\pi/2$  为中心的较小范围,随着步长误差的增加相位误差将以较快的速度增加;另一方面,从(3)式和(6)式的推导过程可以发现,该推导结果是基于对步长的精确定位:不仅假定每步相移的定位误差正负方向相同,而且假定误差的数值相等,由于纳米定位技术方面的局限,作为五步算法的基本技术条件实际上是不能严格满足的,因此必然存在着因算法本身引入的不确定度,不确定度的大小取决于步长定位对五步算法技术条件的满足程度。为此将五步算法作如下改进:设五步干涉信号分别为  $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5$  对应的相位分别为  $\varphi-2\varepsilon-k_1, \varphi-\varepsilon-k_2, \varphi, \varphi+\varepsilon+k_3, \varphi+2\varepsilon+k_4$ , 其中  $\varepsilon$  取  $\pi/2, k_1, k_2, k_3, k_4$  为相应的步长控制误差,将其分别代入(2)式,列解方程组可得

$$\tan \varphi = \frac{2R + k(\cos k_1 + \cos k_4) + \sin k_2 - \sin k_3}{\cos k_2 + \cos k_3 - R(-\sin k_1 + \sin k_4)}, \quad (7)$$

(7) 式中  $R = \frac{I_2 - I_4}{2I_3 - I_5 - I_1}$ , 相位误差  $\Delta\varphi$  主要来源于对步长控制误差的测量准确度。由于纳米定位技术存在着种种局限,相移技术中遇到的最大技术困难是进行精确的步长定位。从纳米测量技术的发展现状来看,要实现亚纳米级位置的测量比实现对亚纳米级位置的定位容易得多,因此  $k_1, k_2, k_3, k_4$  的测量误差是一个比其本身小得多的量。为了对相位的误差  $\Delta\varphi$  进行评估,将(7)式对  $k_1, k_2, k_3, k_4$  求偏导数,有

$$\Delta\varphi = \sqrt{\sum_{i=1}^4 \left( \frac{\partial\varphi}{\partial k_i} \Delta k_i \right)^2}, \quad (8)$$

其中

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dk_1} &= -\frac{R\cos^2\varphi[R + 2R\cos k_1 + R\cos(k_1 + k_4) + \sin(k_1 + k_2) + \sin(k_1 - k_3)]}{[\cos k_2 + \cos k_3 - R(-\sin k_1 + \sin k_4)]^2}, \\ \frac{d\varphi}{dk_2} &= \frac{\cos^2\varphi[1 + \cos(k_2 + k_3) - 2R\sin k_2 - R\sin(k_1 - k_2) + R\sin(k_2 - k_4)]}{[\cos k_2 + \cos k_3 - R(-\sin k_1 + \sin k_4)]^2}, \\ \frac{d\varphi}{dk_3} &= \frac{\cos^2\varphi[-1 - \cos(k_2 + k_3) + 2R\sin k_3 + R\sin(-k_1 + k_3) + R\sin(k_3 + k_4)]}{[\cos k_2 + \cos k_3 - R(-\sin k_1 + \sin k_4)]^2}, \\ \frac{d\varphi}{dk_4} &= \frac{E\cos^2\varphi[R + 2R\cos k_4 + R\cos(k_1 + k_4) + \sin(k_2 - k_4) - \sin(k_3 + k_4)]}{[\cos k_2 + \cos k_3 - R(-\sin k_1 + \sin k_4)]^2}. \end{aligned}$$

(8)式中由于相移测量误差的正负是不确定的,因此  $\Delta\varphi$  的合成误差为各误差分量之“方和根”。如采用算术相加法,则当  $k_1 = k_4 = 2\Delta\varepsilon, k_2 = k_3 = \Delta\varepsilon$  ( $\Delta\varepsilon$  为相移测量误差)时,  $\Delta\varphi$  的合成结果将与(6)式完全等效。采用算术相加的缺陷在于,当  $k_1, k_2, k_3, k_4$  不满足前述条件时(事实上也不可能满足条件),用(6)式评估  $\Delta\varphi$  将引起较大的相位误差。为准确评估  $\Delta\varphi$  应代入  $k_1, k_2, k_3, k_4$  的实测值由(8)式进行评估。为分析问题,此处任意假设步长偏移量  $k_1, k_2, k_3$  分别为  $-5 \text{ nm}, 6 \text{ nm}, 10 \text{ nm}$ , 研究相位误差随步长偏移量  $k_4$  ( $-10 \sim 10 \text{ nm}$ ) 的变化关系。

图 3 是根据(8)式给出的相位测量误差与相位  $\varphi$  和步长偏移  $k_4$  的关系。假设步长位置的测量误差的绝对值均不大于  $0.3 \text{ nm}$ (这是能实现的),且均取  $0.3 \text{ nm}$ 。可以看出,改进后的五步算法相位测量误差较之图 2 给出的结果稍差,但相位准确度仍达到了  $10^{-3}$  数量级,完全能够满足高准确度测长对算法的要求。图 3 得出的另一个结论是相位误差与步长偏移量( $-10 \sim 10 \text{ nm}$ ) 几乎无关(事实上,经过大

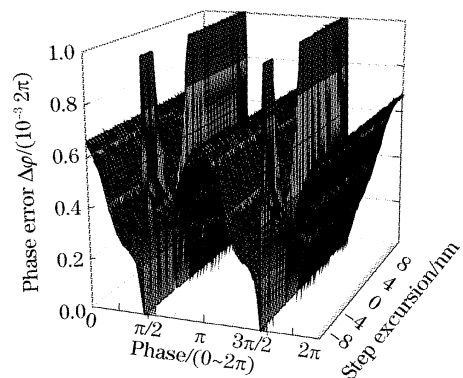


图 3 相位测量误差与相位  $\varphi$  和步长偏移  $k_4$  的关系  
Fig. 3 Measuring error of phase versus phase  $\varphi$  and step excursion  $k_4$

量的数学计算,包括分别改变  $k_1, k_2, k_3, k_4$  的相互位置及各自的值,结果均得出了相同的结果),这也证明了前文为了分析问题对步长偏移量  $k_1, k_2, k_3$  的假设是合理的。利用改进型五步算法的这一特点,在精密测长系统中相移步长在  $\pi/2$  附近不需要精确定位,只需精确测量出步长的实际值,即可通过(7)式求解相位。

以上分析表明了改进后的五步算法的相位误差只与相移步长的测量准确度有关,而与相移步长的定位准确度无关。下面再讨论改进后的五步算法的

相位误差与由于忽略次级多光束干涉而引起的光强信号误差的依赖关系。将(7)式分别对  $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5$  求偏导,可得

$$\Delta\varphi = F \left[ \frac{\sin\varphi}{4} (\Delta I_1 - 2\Delta I_3 + \Delta I_5) + \frac{\cos\varphi}{2} (\Delta I_2 - \Delta I_4) \right], \quad (9)$$

其中

$$F = \frac{2[\cos k_2 + \cos k_3 + \cos(k_1 + k_2) + \cos(k_1 - k_3) + \cos(k_2 - k_4) + \cos(k_4 + k_3)]}{2[\cos k_2 + \cos k_3 - R(\sin k_4 - \sin k_1)]^2}.$$

根据误差理论,由于光强信号测量误差所引起的相位误差可表示为

$$\Delta\varphi = F \sqrt{[(\Delta I_2)^2 + (\Delta I_4)^2] \left(\frac{\cos\varphi}{2}\right)^2 + [(\Delta I_1)^2 + (2\Delta I_3)^2 + (\Delta I_5)^2] \left(\frac{\sin\varphi}{4}\right)^2}. \quad (10)$$

比较(9)式与(3)式,(10)式与(4)式可以发现,二者的差别在于(9)式与(10)式多出了一个系数因子  $F$ 。假设  $k_1, k_2, k_3, k_4$  均小于 10 nm,经简单计算可得  $F \approx 1$ 。由于(3)式,(4)式分别表示余弦依赖五步算法相位误差与由于忽略次级多光束干涉而引起的光强信号误差及光强测量误差的依赖关系,这就说明改进后的五步算法对这两个误差源的依赖关系与未经改进的五步算法几乎一样。可见改进后的五步算法在保持余弦依赖五步算法优点的前提下,解决了精密测长系统中最重要也是最难控制的误差源——相移定位误差。需要注意的是改进后的五步算法在一个周期的相位内存在两处“坏点”,即在相位为  $\pi/2$  和  $3\pi/2$  附近的极窄范围内相位误差对相位偏移量十分敏感,在精密测量时可通过对初相位的调整避开这两个极窄的敏感区间,这一点和多光束干涉算法中调整初相位的原理十分类似。

## 4 结 论

改进的余弦依赖五步算法是众多相移算法中能最优的算法。当干涉仪的标准反射板或待侧面的反射率较低时,余弦依赖五步算法对光强测量误差和相移步长控制误差反映不灵敏,由此引起的相位误差即使在高准确度测长系统中也是可以忽略的;另一方面,当干涉仪的标准反射板或待侧面的反射率较高如涂有反射涂层时,由五步算法所引起的光强误差成为相位误差的主要误差源,此时选择改进型五步算法具有较高的准确度。显然改进型五步算法比较复杂,计算量也较大,但它不需要精确控制相移步长,在技术上易于实现,结果更可靠,这对于标准反射板或待侧面涂有反射层的干涉仪具有其他算

法无法比拟的优越性。

## 参 考 文 献

- 1 Luo Zhiyang, Yang Lifeng, Chen Yunchang. Error evaluation of cosine dependent algorithm in precision interference measurement [J]. *Acta Optica Sinica*, 2005, **25**(12): 1629~1633 (in Chinese)  
罗志勇,杨丽峰,陈允昌. 精密干涉测量中余弦依赖算法的误差研究[J]. *光学学报*, 2005, **25**(12): 1629~1633
- 2 Luo Zhiyang, Yang Lifeng, Chen Youchang. Phase-shift algorithm research based on multiple-beam interference principle [J]. *Acta Physica Sinica*, 2005, **54**(7): 3051~3057 (in Chinese)  
罗志勇,杨丽峰,陈允昌. 基于多光束干涉原理的相移算法研究[J]. *物理学报*, 2005, **54**(7): 3051~3057
- 3 Wang Liwu, Su Xianyu, Zhou Lipin. Correction algorithm of random phase shifting errors in phase measuring profilometry[J]. *Acta Optica Sinica*, 2003, **24**(5): 614~618 (in Chinese)  
王立无,苏显渝,周利兵. 相位测量轮廓术中随机相移误差的校正算法[J]. *光学学报*, 2003, **24**(5): 614~618
- 4 Li Wansong, Su Likun, Su Xianyu. Phase-measuring profilometry in big scale measurement[J]. *Acta Optica Sinica*, 2000, **20**(6): 792~796 (in Chinese)  
李万松,苏礼坤,苏显渝. 相位检测面形术在大尺度三位面形测量中的应用[J]. *光学学报*, 2000, **20**(6): 792~796
- 5 Jiang Zhenyu, Niao Hong, Zhang Qingchuan et al.. Weighted phase unwrapping based on analysis of intensity modulation for phase-shifting interferometry [J]. *Acta Optica Sinica*, 2003, **24**(8): 1032~1038 (in Chinese)  
蒋振宇,廖泓,张清川等. 调制度分析在等步长相移法相位展开中的应用[J]. *光学学报*, 2003, **24**(8): 1032~1038
- 6 Guo Hongwei, Chen Mingyi, Wei Chunlong. A new algorithm by iterative least squares fitting based on the first order Talor series expansion in phase shifting interferometry[J]. *Acta Optica Sinica*, 2000, **21**(1): 72~74 (in Chinese)  
郭红卫,陈明仪,韦春龙. 基于一阶泰勒展开式的迭代最小二乘相移新算法[J]. *光学学报*, 2001, **21**(1): 72~74
- 7 G. Bonsch, H. Bohme. Phase-determination of Fizeau interferences by phase-shifting interferometry[J]. *Optik*, 1989, **82**(4): 161~164
- 8 Lai G, Yatagai T. Generalized phase-shifting interferometry[J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1991, **8**(5): 822~827
- 9 Yves Surrel. Design of algorithms for phase measurements by the use of phase stepping[J]. *Appl. Opt.*, 1996, **35**(1): 51~60