

文章编号: 0253-2239(2006)11-1657-9

# 偏折层析的滤波反投影算法及误差分析

宋 旸 张 斌 贺安之

(南京理工大学信息物理与工程系, 南京 210094)

**摘要:** 对偏折层析投影转换为相位层析投影的转换关系进行了分析, 给出明晰的数学关系, 并针对偏折层析的滤波反投影算法重建的结果进行误差分析。分析结果表明投影噪声对重建场的作用体现在与由偏折层析滤波反投影算法的滤波器有关的倾斜函数上。因此提出了改进的偏折层析滤波反投影算法, 数值模拟表明, 改进算法在有效抑制倾斜现象的同时, 对重建结果不会造成明显的失真。在此基础上改进的算法被用于真实火箭燃气射流密度场的三维重建中。

**关键词:** 信息光学; 偏折层析; 重建算法; 误差分析

中图分类号: O438 文献标识码: A

## Filtered Back-Projection Algorithm of Deflection Tomography and Error Analysis

Song Yang Zhang Bin He Anzhi

(Department of Information Physics & Engineering Nanjing University of Science & Technology, Nanjing 210094)

**Abstract:** The conversion from deflection tomography projection to phase tomography projection is analyzed, and an explicit expression corresponding to the conversion is presented. An error analysis is made to the reconstructed fields by filtered back-projection (DFBP) algorithm of deflection tomography. Results show that the effect of projection noise on the reconstructed fields is represented by a slope function related to the filter used in deflection tomographic filtered back-projection algorithm. So the deflection tomographic filtered back-projection algorithm is modified. Numerical simulation shows that the modified algorithm depresses the slope phenomena efficiently, while no obvious distortion is introduced to the reconstruction. Based on the modified algorithm, the three-dimensional reconstruction for density field of the real rocket exhausted plumes is carried out.

**Key words:** information optics; deflection tomography; reconstruction algorithm; error analysis

### 1 引 言

光学层析技术 (Optical Computerized Tomography, OCT) 是以光波为载体, 由加载了被测场信息的多方向投影数据重建待测场物理量分布的技术。其依据光波经过被测场时加载信息的不同可分为相位层析和偏折层析两类。相位层析的投影数据是光波经过待测场时, 沿射线路径上光程的累加, 如干涉层析<sup>[1~3]</sup>; 偏折层析的投影数据是沿射线路径上射线偏折角的累加, 如叠栅层析<sup>[4]</sup>和纹影层

析<sup>[5]</sup>。在数学形式上, 相位层析类似于经典的 X 射线层析中沿射线路径上对衰减率累加的形式, 因此应用于 X 射线层析的大量算法可以直接使用于相位层析重建。但由于相位层析的投影是光程的累加, 这也意味着相位层析对待测场的波动极为敏感, 有利的是可以测量具有微小起伏的流场分布, 不利的是对于物理量具有大动态范围或者测试环境恶劣, 具有较强震动的重建问题显得力不从心。而偏折层析则相对地具有投影数据对物理量变化不敏

作者简介: 宋 旸(1980~), 男, 江苏南京人, 南京理工大学信息物理与工程系博士研究生, 主要从事光学计算层析的研究。E-mail: sy0204@vip.sina.com

导师简介: 贺安之(1938~), 男, 四川遂宁人, 南京理工大学教授, 主要从事复杂流场的光学层析技术和高速公路路面智能检测系统方面的研究。E-mail: haz@mail.njust.edu.cn

收稿日期: 2005-12-26; 收到修改稿日期: 2006-04-12

感,抗干扰能力强的特点,尤其适合于恶劣环境下的大动态范围的复杂流场重建<sup>[4]</sup>,如火箭燃气密度场<sup>[6,7]</sup>、超音速风洞中的流场<sup>[8,9]</sup>等。

但偏折层析重建的困难在于其投影数据是偏折角累加的,在 Radon 变换的积分中存在折射率的偏微分项,因此一般的层析重建算法均不能直接使用。针对偏折层析的重建问题,一般存在两种解决思路:一种是直接将 Radon 变换中关于折射率的偏微分项分解,再利用代数迭代算法进行重建<sup>[10,11]</sup>,此方法的处理方式简洁,但不可避免的是会因为分解偏微分项而对重建结果带来误差;另一种则是考虑将偏折层析投影转换为相位层析投影,再使用相位层析算法进行重建,Faris<sup>[12]</sup>和阎大鹏<sup>[13]</sup>就分别从变换类和级数展开类的角度提出偏折层析的重建算法。Faris 导出了基于偏折层析的滤波反投影算法(Deflection filtered back-projection, DFBP),并将其用于超音速密度场<sup>[12]</sup>和温度场<sup>[5,14]</sup>的重建。阎大鹏等则将层析投影数据转换后,用代数迭代法(Algebraic reconstruction technology, ART)重建。这种方法有效地利用了相位层析中众多成熟的算法。但到目前为止,关于两类层析投影间的数学关系一直很模糊,缺乏必要的数学证明。另一方面,如果偏折投影包含噪声,对于在投影转换过程中噪声的作用,以及对重建精度的影响也没有文献讨论。因此本文从这两点出发,首先推导出偏折层析投影与相位层析投影间的关系,然后对包含噪声情况下的偏折层析的滤波反投影算法进行误差分析,寻找

影响重建精度的根源。同时结合误差分析结果对此算法进行改进,并将改进算法应用于真实火箭燃气射流的密度场重建中。

## 2 算法描述

### 2.1 两类层析投影间的关系

光学层析原理及坐标系设置如图 1 所示,待测场的折射率分布为  $n_c(x, y)$ ,环境参考折射率为  $n_0$ ,  $n(x, y) = n_0 - n_c(x, y)$ ,且  $n(x, y)$  为紧支撑函数。相位层析投影是沿射线路径上光程的累加,表示为

$$\varphi_p(y', \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} n(x, y) dx', \quad (1)$$

其中  $\varphi_p$  为相位层析投影。偏折层析投影是沿射线路径上偏折角的累加<sup>[15]</sup>,因为折射率的变化通常都较小,所以  $1/n_c \approx 1/n_0$ ,偏折层析表示为

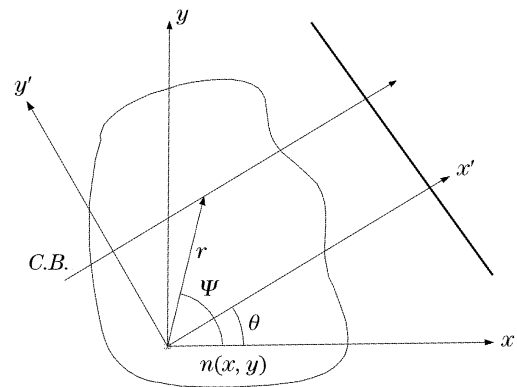


图 1 光学层析原理

Fig. 1 Essence of optical computerized tomography

$$\varphi_d(y', \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n_c(x, y)} \frac{\partial n_c(x, y)}{\partial y'} dx' \approx \frac{-1}{n_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial n(x, y)}{\partial y'} dx', \quad (2)$$

$\varphi_d$  为偏折层析投影。(2) 式的两端对  $y'$  做傅里叶变换有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_d(y', \theta) \exp(-j2\pi y' Y') dy' = \frac{-1}{n_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial n(x, y)}{\partial y'} dx' \right] \exp(-j2\pi y' Y') dy', \quad (3)$$

等式右端做分步积分有

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial n}{\partial y'} \exp(-j2\pi y' Y') dy' \right] dx' &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-j2\pi y' Y') d(n) \right] dx' = \\ & \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ n \exp(-j2\pi y' Y') \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} j2\pi Y' n \exp(-j2\pi y' Y') dy' \right] dx' \end{aligned}$$

因为  $n(x, y)$  为紧支撑函数,在无穷远处为零,则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial n}{\partial y'} \exp(-j2\pi y' Y') dy' \right] dx' = j2\pi Y' \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} n \exp(-j2\pi y' Y') dx' dy', \quad (4)$$

令

$$\Phi_d(Y', \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_d(y', \theta) \exp(-j2\pi y' Y') dy', \quad R(Y', \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} n \exp(-j2\pi y' Y') dx' dy',$$

则  $R(Y', \theta) = -\frac{n_0}{j2\pi Y'} \Phi_d(Y', \theta)$ , 又有  $R(Y', \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} n dx' \right] \exp(-j2\pi y' Y') dy'$ , 则  $\int_{-\infty}^{+\infty} n dx'$  与  $R(Y', \theta)$  互为傅里叶变换, 即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} n dx' = \mathcal{F}^{-1}[R(Y', \theta)] = -\frac{n_0}{2} \mathcal{F}^{-1}\left[\Phi_d(Y', \theta) \frac{1}{j\pi Y'}\right], \quad (5)$$

上式右端由卷积定理可得

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\Phi_d(Y', \theta) \frac{1}{j\pi Y'}\right] = \varphi_d(y', \theta) * h(y'), \quad (6)$$

其中

$$h(y') = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{j\pi Y'}\right) = \text{sgn}(y'), \quad (7)$$

则

$$\varphi_p(y', \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} n dx' = -\frac{n_0}{2} [\varphi_d(y', \theta) * \text{sgn } y'], \quad (8)$$

(8) 式反映的即是两类层析投影间的数学描述。它是一个奇妙的结论, 表明偏折层析投影可以通过与  $\text{sgn}$  函数卷积后得到相位层析投影。将(8)式展开为积分的形式, 可得到

$$\varphi_p(y', \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} n dx' = \frac{n_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_d(y', \theta) dy' - n_0 \int_{-\infty}^{y'} \varphi_d(\tau, \theta) d\tau, \quad (9)$$

(9) 式从积分形式反映两类投影间的关系, 将偏折投影转换为相位投影, 包含两项: 第一项是沿  $y'$  方向沿条纹方向的积分, 在理想的无噪声的情况下该项为零; 第二项是从负无穷积分到当前射线的  $y'$  位置。因此得到了偏折投影与相位投影间转换关系的数学形式, 这个形式比文献[12, 13, 16]的形式不论在推导过程和结论上都要清晰明确很多。

## 2.2 偏折层析的滤波反投影算法

相位层析的滤波反投影定理表示为

$$n(x, y) = \int_0^{\pi} [\varphi_d(y', \theta) * k(y')]_{y'=y\cos\theta-x\sin\theta} d\theta, \quad (10)$$

其中  $k(y')$  为  $|Y'|G(Y')$  的傅里叶逆变换,  $G(Y')$  为相应窗函数。将(8)式代入(10)式有

$$n(x, y) = -\frac{n_0}{2} \int_0^{\pi} [\varphi_d(y', \theta) * \text{sgn } y' * k(y')]_{y'=y\cos\theta-x\sin\theta} d\theta, \quad (11)$$

显然卷积  $-\frac{n_0}{2} \text{sgn } y' * k(y')$  为对应于偏折层析的滤波反投影的新滤波器, 其频域形式为

$$H(Y') = \mathcal{F}\left[-\frac{n_0}{2} \text{sgn } y' * k(y')\right] = \frac{-n_0}{j2\pi Y'} |Y'|G(Y') = \frac{jn_0}{2\pi} \text{sgn } Y'G(Y'), \quad (12)$$

$H(Y')$  相应的空域形式为

$$h(y') = \frac{-n_0}{\pi^2 y'} \sin^2\left(\frac{\pi y'}{2\Delta y'}\right), \quad (13)$$

其中  $\Delta y'$  为每方向上的采样间隔。则偏折层析的滤波反投影算法为

$$n(x, y) = \int_0^{\pi} [\varphi_d(y', \theta) * h(y')]_{y'=y\cos\theta-x\sin\theta} d\theta, \quad (14)$$

这与 Faris 推导出的偏折层析的滤波反投影结果<sup>[12]</sup>完全相同。

## 3 误差分析

从(8)式已知相位层析的投影可以由偏折投影与一个  $\text{sgn}$  函数卷积得到, 而(9)式表明在投影转换过程

中存在着积分的过程。但在实际的层析问题中,在提取条纹数据时必然存在着噪声,尤其是如果噪声的期望不为零时,在转换过程中的积分操作必然使得噪声被不断累加,这种噪声累加的后果对重建精度有很大的影响。下面通过一个数值模拟实验来说明噪声的影响,然后对包含噪声情况下的偏折层析的滤波反投影算法的重建进行分析。

### 3.1 数值模拟

数值模拟的对象为一具有高斯分布的三峰温度场,如下式所示:

$$f(x,y) = \begin{cases} 100\exp\left[-\frac{(x-16)^2+(y-15)^2}{40}\right] + 200\exp\left[-\frac{(x-31)^2+(y-23)^2}{40}\right] + \\ 300\exp\left[-\frac{(x-21)^2+(y-33)^2}{40}\right], & 0 < x < 49, 0 < y < 49 \\ 0. & \text{outside the region} \end{cases}$$

其分布如图 2 所示。

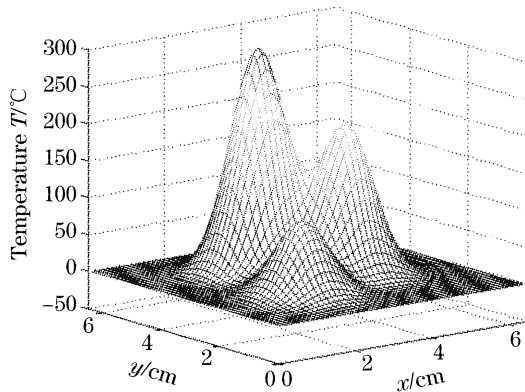


图 2 模拟场

Fig. 2 Simulated field

设定的网格数为  $50 \times 50$ , 区域实际长度为  $6.5 \text{ cm} \times 6.5 \text{ cm}$ 。投影方向从  $0^\circ$  到  $170^\circ$ , 每隔  $10^\circ$  进行采样共 18 个方向, 每方向采样数为 150。首先在无噪声的情况下使用 2.2 节中的偏折层析的滤波反投影算法和 2.1 节中的由投影转换公式(8)将偏折投影转换为相位投影再使用代数迭代法重建的算法(为方便描述,称为 Deflection convolution iterative

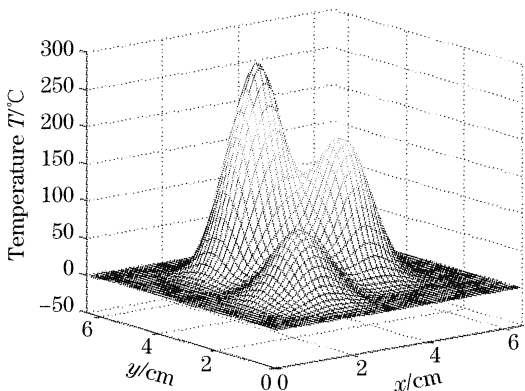


图 3 18 方向偏折层析的滤波反投影重建

Fig. 3 Deflection filtered back-projection (DFBP) reconstruction with 18 directions

reconstruction, DCIR) 进行重建, 进行代数重建时, 松弛因子取 0.25, 迭代次数为 10 次。然后对叠栅条纹的偏移数据(单位为像素)叠加高斯噪声, 其中均值为 1, 方差为 1。均值不为零表示在测量以及条纹提取过程中条纹与基准的水平面存在微小交角, 这是在实际测量中应极力避免, 但确也是无法完全消除的且经常遇到的情况。偏折层析的滤波反投影不含噪声的重建如图 3, 含噪声的重建如图 4, 偏折卷积迭代重建算法不含噪声的重建如图 5, 包含噪声的重建如图 6 所示。

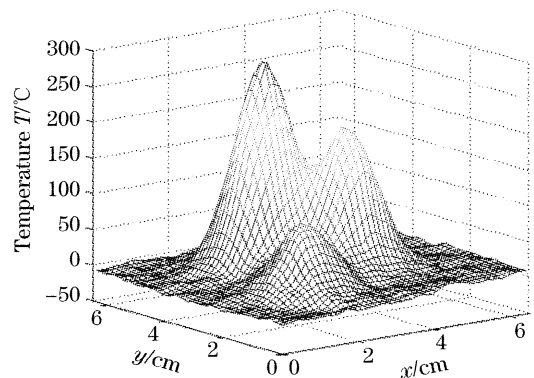


图 4 叠加高斯噪声的 18 方向偏折层析的滤波反投影重建

Fig. 4 DFBP reconstruction with 18 directions with Gaussian noise added

采用均方根误差(Root mean-square error, RMSE), 平均绝对误差(Mean absolute error, MAE)和峰值误差(Peak value error, PVE)来评价重建效果, 如表 1 所示。

表 1 重建误差

Table 1 Reconstruction errors

		RMSE	MAE	PVE
DFBP	Ideal condition	0.000207	0.00488	0.0567
	Gaussian noise added	0.000504	0.0209	0.0594
DCIR	Ideal condition	0.000239	0.00795	0.0272
	Gaussian noise added	0.00268	0.0878	0.124

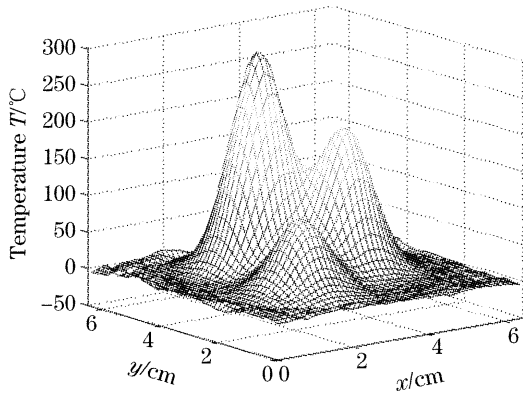


图 5 18 方向偏折卷积迭代重建算法重建

Fig. 5 Deflection convolution iterative reconstruction (DCIR) with 18 directions

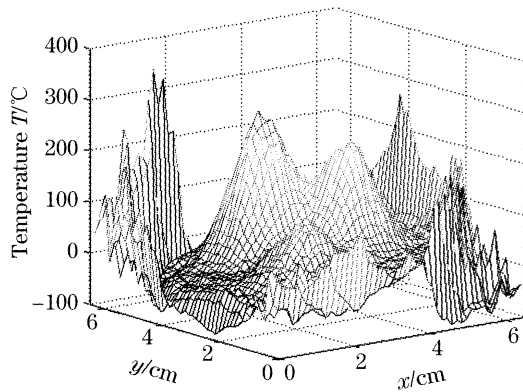


图 6 叠加高斯噪声的 18 方向偏折卷积迭代重建算法重建

Fig. 6 Reconstruction by DCIR with 18 directions with Gaussian noise added

可以发现在叠加噪声以后,采用偏折层析算法的滤波反投影的重建场有倾斜的现象,而采用偏折卷积迭代重建算法的重建场除了倾斜以外,出现剧烈的震荡,这是由于噪声的存在使得方程中的不兼容性增加,而迭代过程对不兼容性很敏感。这种噪声的作用是与式(8)的投影转换密切相关的。图 7 和图 8 将进一步说明噪声在(8)式的投影转换中所起的放大作用。图 7 是上面的模拟实验中在 30° 方向上的偏折投影和由(8)式转换后的相位投影,图 8

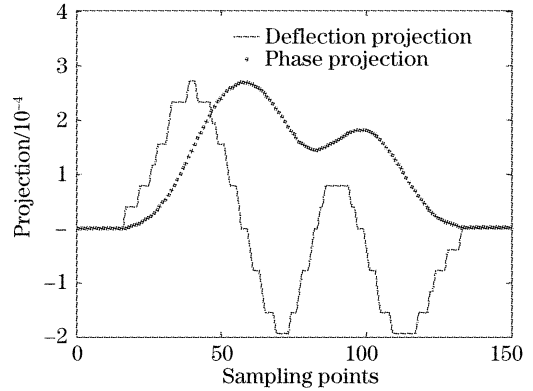


图 7 理想情况下的投影数据

Fig. 7 Projection data under ideal condition

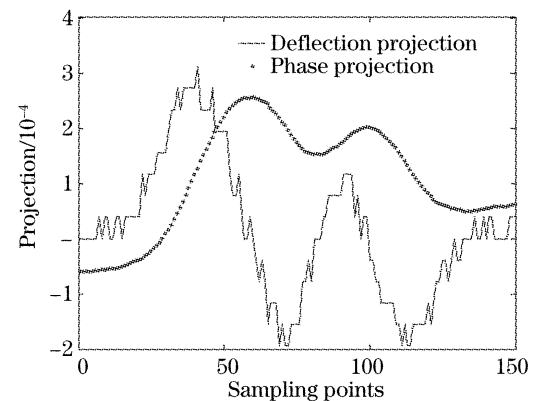


图 8 有噪声情况下的投影数据

Fig. 8 Projection data with noise added

则是相同情况下叠加了噪声的情况。其中实线为偏折投影,虚线为相位投影(横坐标为采样点,纵坐标为投影数据)。可见叠加了均值不为零的噪声后,经过投影转换条纹发生了明显倾斜,可以预见这种倾斜会发生于所有投影方向上,由这些互相倾斜的投影数据得到的重建精度必然会受到很大影响。

### 3.2 对包含噪声情况下的偏折层析的滤波反投影算法重建精度的研究

设叠加了高斯噪声后的偏折投影为

$$\varphi_a^m(y', \theta) = \varphi_a(y', \theta) + v(y', \theta), \quad (15)$$

其中  $v(y', \theta)$  为叠加的高斯噪声,且期望  $E[v(y', \theta)] = \mu$ , 方差  $D[v(y', \theta)] = \sigma$ 。假设所有方向上的噪声各不相关,则有

$$E[v(y'_1, \theta_1)v(y'_2, \theta_2)] = S_0 \delta(y'_1 - y'_2) \delta(\theta_1 - \theta_2), \quad (16)$$

如果  $V(Y', \theta) = \mathcal{F}[v(y', \theta)]$ , 则有

$$E[V(Y'_1, \theta_1)V(Y'_2, \theta_2)] = S_0 \delta(Y'_1 - Y'_2) \delta(\theta_1 - \theta_2), \quad (17)$$

(14) 式又可以写为

$$n(x, y) = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_d(Y', \theta) \frac{jn_0}{2\pi} \text{sgn}(Y') G(Y') \exp[j2\pi(y \cos \theta - x \sin \theta) Y'] dY' d\theta, \quad (18)$$

则包含噪声的重建结果为

$$\hat{n}(x, y) \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [\Phi_d(Y', \theta) + V(Y', \theta)] \frac{jn_0}{2\pi} \text{sgn}(Y') G(Y') \exp[j2\pi(y \cos \theta - x \sin \theta) Y'] dY' d\theta, \quad (19)$$

对(19)式求期望得

$$E[\hat{n}(x, y)] = n(x, y) + K_0 t(x, y), \quad (20)$$

其中  $E[V(Y', \theta)] = K_0 \delta(Y')$ ,

$$t(x, y) = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(Y') H(Y') \exp[j2\pi(y \cos \theta - x \sin \theta) Y'] dY' d\theta, \quad (21)$$

其中  $H(Y') = \frac{jn_0}{2\pi} \text{sgn} Y' G(Y')$  为偏折层析滤波反投影的滤波器。(19) 式的方差为

$$D[\hat{n}(x, y)] = E\{\hat{n}(x, y) - E[\hat{n}(x, y)]\}^2 = \pi(S_0 - K_0^2) \int_{-\infty}^{+\infty} |H(Y')|^2 dY', \quad (22)$$

(20)式说明叠加噪声后的重建场的期望包含两部分,一部分是理想的重建场  $n(x, y)$ ,另一部分是由  $t(x, y)$  确定的函数,在形式上可以看成是各方向投影为常量的偏折层析滤波反投影结果,如图 9 所示。

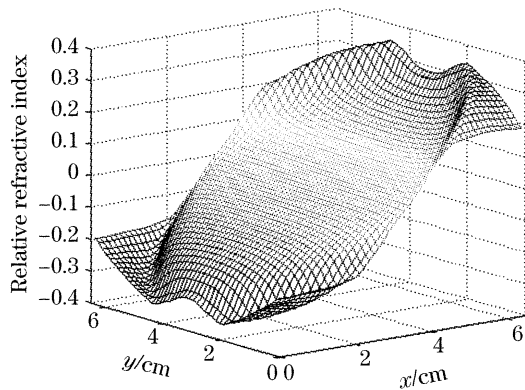


图 9 函数  $t(x, y)$

Fig. 9 Function  $t(x, y)$

可以看出函数  $t(x, y)$  的形式恰好说明为什么图 4 所示的包含噪声的滤波反投影重建场存在的倾斜现象,我们称之为倾斜函数。而图 10 是图 3 和

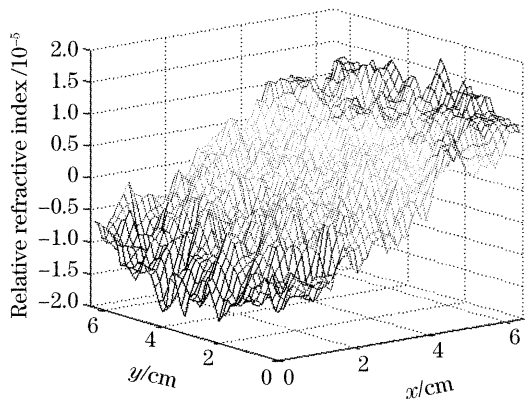


图 10 理想情况和含噪声情况重建的相减分布  
Fig. 10 Difference field between ideal condition  
and noise condition

图 4 对应的重建场相减后的分布,尽管在数量级上有较大差别(由  $K_0$  决定),但在总体趋势上与图 9 相同。这说明滤波反投影算法的重建精度依赖于函数  $t(x, y)$  的影响,而函数  $t(x, y)$  的形式由(21)式描述,即主要还是依赖于偏折层析的滤波反投影算法的滤波器  $H(Y') = \frac{jn_0}{2\pi} \text{sgn} Y' G(Y')$ 。而同时可以发现该函数与被测对象无关,倾斜的程度反映在  $K_0$  上,如果噪声的期望为零,则函数  $t(x, y)$  对期望不起作用,重建场不会倾斜,而噪声的期望的绝对值越大,则倾斜越严重。同时(22)式描述的方差决定了图 10 各位置的起伏程度。

### 3.3 改进的偏折层析的滤波反投影算法

基于上述分析,考虑对偏折层析的滤波反投影算法进行改进以抑制噪声的影响,新的改进算法必须满足以下两点:首先要能有效地使倾斜函数的倾斜程度减小;其次由于改进偏折层析的滤波反投影算法实际上是改变了滤波反投影的滤波器,所以必然会对理想重建场造成模糊,所以要使得改进算法可以被接受,就需要改进的算法在抑制倾斜函数倾斜程度的同时,不能对理想的重建结果造成太大失真。所以新的改进算法必须在这两点之间做均衡的考虑。基于以上分析,我们设计了一个函数  $r(y')$  对偏折层析的滤波反投影算法进行改进,改进的偏折层析的滤波反投影算法如(23)式:

$$n(x, y) = \int_0^{\pi} \{[\varphi_d(y', \theta) * h(y')] r(y')\}_{y' = y \cos \theta - x \sin \theta} d\theta, \quad (23)$$

$$r(y') = \frac{-4}{d^2} y'^2 + 1, \quad (24)$$

则相应改进后的倾斜函数为

$$t(x, y) = \int_0^\pi \{ [1 * h(y')] \cdot r(y') \}_{y'=y \cos \theta - x \sin \theta} d\theta, \tag{25}$$

其中  $d$  为条纹的长度。 $r(y')$  实际上是一个顶点为  $(0, 1)$ , 零点为  $(-d/2, 0)$  和  $(d/2, 0)$  的二次函数, 经数值模拟, 该改进算法可以有效减小倾斜函数  $t(x, y)$  的倾斜程度。图 11 为添加  $r(y')$  后的倾斜函数  $t(x, y)$  分布。图 12 为用改进的偏折层析的滤波反投影算法对上节数值模拟中添加噪声情况下的重建场分布。表 2 为相应的用三种评价指标对改进的偏折层析的滤波反投影算法的评价结果。

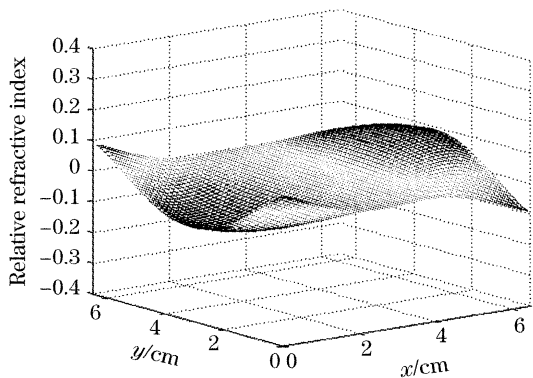


图 11 改进的函数  $t(x, y)$   
Fig. 11 Modified function  $t(x, y)$

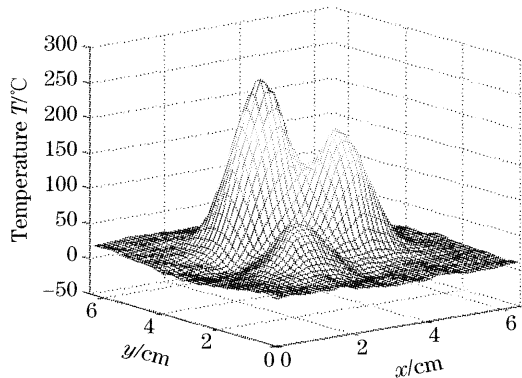


图 12 叠加高斯噪声的 18 方向改进的偏折层析的滤波反投影重建  
Fig. 12 Modified DFBP reconstruction with 18 directions with Gaussian noise added

表 2 改进偏折层析的滤波反投影算法的重建误差  
Table 2 Reconstruction errors of the modified DFBP algorithm

		RMSE	MAE	PVE
Modified	DFBP	0.000329	0.0187	0.156
Gaussian noise	added			

#### 4 对真实火箭燃气射流密度场的重建

火箭燃气射流场的密度分布是描述燃气流场的

重要参量之一。真实火箭燃气射流场具有强火焰光, 是高温、高速、气固两相含化学反应的流动, 喷流场结构比较复杂。张福祥<sup>[7]</sup>、阎大鹏<sup>[6]</sup>等提出了用于实时显示和测量燃气射流场的大口径叠栅偏折层析装置, 对真实火箭燃气流场进行了显示和定量分析。本文采用改进的偏折层析的滤波反投影算法对真实火箭燃气射流密度场进行三维重建。

#### 4.1 实验装置

真实火箭燃气射流场的测试装置如图 13,  $L_1$  为扩束镜,  $L_2, L_3$  为准直透镜和聚焦透镜。  $W_1, W_2$  为观察窗口, 用于隔离燃气流与光学系统, 使光学系统不受冲击、震动的影响。  $G_1, G_2$  为一对龙基 (Ronchi) 光栅, 光栅常量为 0.005 cm, 光栅间距为 4.6 cm,  $T$  为小孔光阑。实验使用的光源为 He-Ne 激光器, 波长 632.8 nm, 图 14 为环境温度为 20 °C 条件下拍摄真实火箭燃气流场的叠栅偏折图。由于被测场具有轴对称结构, 所以各投影方向上的投影相同, 实验中只需要一个方向上的投影图。

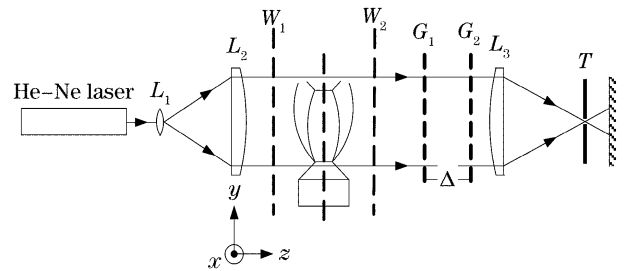


图 13 实验装置  
Fig. 13 Experimental setup

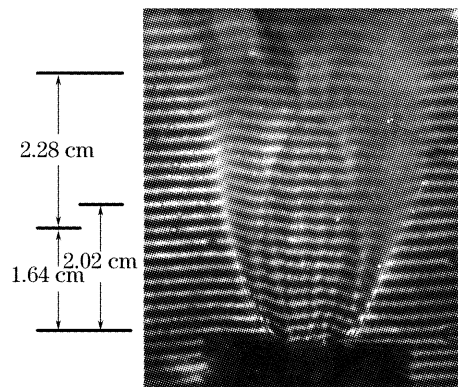


图 14 真实火箭燃气射流场的叠栅偏折图  
Fig. 14 Moiré deflectogram of real rocket exhausted plumes

#### 4.2 重建结果

从图 14 可以看出, 火箭燃气射流结构非常复杂, 鼓形激波在马赫盘所包围的区域内仍有间断出现, 而且越靠近喷口, 流动的多层结构越复杂。现有的条纹提取技术很难在喷口处提取出准确的投影数

据。因此,我们选择了对距离喷口位置较远,条纹较为清晰可靠的区域进行重建。然后由格拉斯顿-戴尔(Gladstone-Dale)<sup>[15]</sup>公式确定密度分布:

$$n_c = K\rho + 1, \quad (26)$$

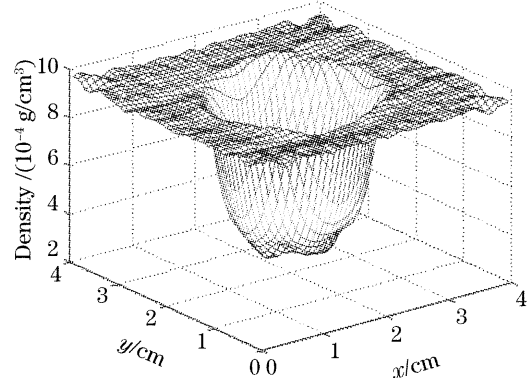
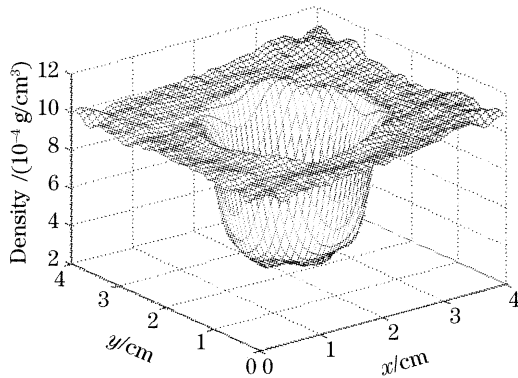


图 15 选定截面的密度分布。(a)偏折层析的滤波反投影算法,(b)改进的偏折层析的滤波反投影算法

Fig. 15 Density distribution of the selected cross section. (a) DFBP algorithm, (b) modified DFBP

从重建结果可以发现偏折层析的滤波反投影算法的重建结果具有较明显的倾斜现象,而改进后的偏折层析的滤波反投影算法较好地抑制了倾斜,并且清晰地重建出被测截面的密度分布。

图 16 为距离喷口 1.64 cm 到 3.92 cm 范围内的燃气射流场的三维密度场分布。可以看出激波半径沿径向逐渐扩大,而中心区域的密度沿轴线方向呈逐渐降低的趋势。

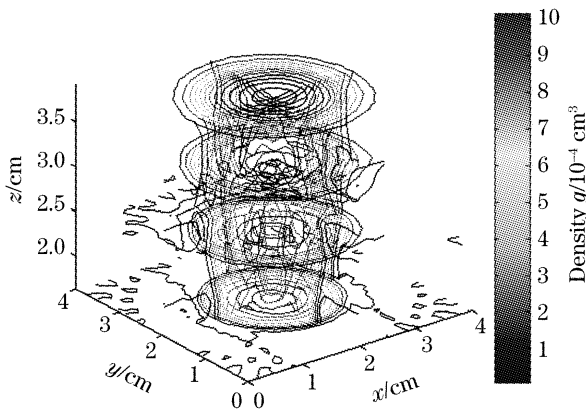


图 16 火箭燃气射流密度场的三维分布

Fig. 16 Three-dimensional distribution of the density field of rocket exhausted plumes

## 5 结 论

本文首先对两类层析问题:相位层析和偏折层析投影间的关系给出了详细的数学描述,然后对偏折投影在含有噪声的情况下用滤波反投影算法进行重建的重建场进行误差分析,得出重建场受(21)式的函数  $t(x, y)$  影响而产生倾斜的结论。为解决此问题,提出了改进的偏折层析滤波反投影算法,其主

其中  $K=0.226 \text{ cm}^3/\text{g}$ ,图 15 为分别用偏折层析的滤波反投影算法和改进的偏折层析的滤波反投影算法对距离喷口 2.02 cm 的截面的燃气射流场的密度重建分布。

要手段是在滤波反投影重建中加入二次函数以抑制倾斜的趋势,并通过数值模拟对改进算法的效果进行验证。同时用改进算法对真实火箭燃气射流密度场进行重建,取得较为理想的重建结果。

## 参 考 文 献

- 1 D. W. Sweeny, C. M. Vest. Reconstruction of three-dimensional refractive index field from multi-direction interferometric data [J]. *Appl. Opt.*, 1973, **12** (11): 2649~2664
- 2 Yao Hongbing, He Anzhi. Improvement of the reconstruction algorithm of optical computerized tomography[J]. *Acta Optical Sinica*, 2004, **24**(2): 158~161 (in Chinese)  
姚红兵,贺安之. 光学层析重建算法改进的研究[J]. *光学学报*, 2004, **24**(2): 158~161
- 3 Yao Hongbing, He Anzhi, Wu Yingchuan *et al.*. Three-dimensional tomography of incomplete data with fusion of virtual and real experiments[J]. *Acta Optical Sinica*, 2005, **25** (4): 479~484 (in Chinese)  
姚红兵,贺安之,吴颖川 等. 虚拟实验和真实实验相融合的三维非完全数据层析[J]. *光学学报*, 2005, **25**(4): 479~484
- 4 O. Kafri, I. Glatt. Moiré deflectometry: a ray deflection approach to optical testing[J]. *Opt. Engng.*, 1985, **24** (6): 944~960
- 5 Aiay K. Agrawal, Nelson K. Butuk, Subramanyam R. Gollahalli *et al.*. Three-dimensional rainbow schlieren tomography of a temperature field in gas flows[J]. *Appl. Opt.*, 1998, **37**(3): 479~485
- 6 Yan Dapeng, Liu Feng, Wang Zhendong *et al.*. Real time visualization and quantitative measurement of rocket exhausted plumes field[J]. *Laser Technology*, 1996, **20**(6): 332~334 (in Chinese)  
阎大鹏,刘峰,王振东 等. 真实火箭燃气射流的实时显示及定量测试技术的研究[J]. *激光技术*, 1996, **20**(6): 332~334
- 7 Zhang Fuxiang, Li Kaiming, Fang Yi. Quantitative visualization of density fields by real rocket exhausted plumes fields[J]. *J. Astronautics*, 1994, **15**(2): 58~63 (in Chinese)  
张福祥,李开明,方毅. 真实火箭燃气羽流密度场的定量显示[J]. *宇航学报*, 1994, **15**(2): 58~63



- 8 J. Stricker, E. Keren, O. Kafri. Axisymmetric density field measurements by Moiré deflectometry[J]. *Appl. Opt.*, 1983, **21**(12): 1767~1769
- 9 Yan Dapeng, Wang Hailin, He Anzhi *et al.*. High sensitivity Moiré deflectometry and its application in flow field of hypersonic shock tunnel[J]. *Acta Aerodynamica Sinica*, 1994, **12**(1): 43~50 (in Chinese)  
阎大鹏,王海林,贺安之等. 高灵敏度莫尔偏折法及其在激波风洞流场中的应用[J]. *空气动力学学报*, 1994, **12**(1): 43~50
- 10 Gao Yiqing, Gong Yongqing. Diagnostics of 3-D arc temperature fields by Moiré CT technique[J]. *Acta Optical Sinica*, 1998, **18**(3): 376~380 (in Chinese)  
高益庆,龚勇清. 用莫尔计算机层析技术诊断三维电弧温度场[J]. *光学学报*, 1998, **18**(3): 376~380
- 11 Song Yang, Zhang Bin, He Anzhi. A novel iterative algorithm for Moiré tomography[J]. *Acta Optical Sinica*, 2006, **26**(3): 367~372 (in Chinese)  
宋 旸,张 斌,贺安之. 一种新的叠栅层析迭代算法[J]. *光学学报*, 2006, **26**(3): 367~372
- 12 Gregory W. Faris, Robert L. Byer. Three-dimensional beam-deflection optical tomography of a supersonic jet [J]. *Appl. Opt.*, 1988, **27**(24): 5202~5212
- 13 Da-Peng Yan, Feng Liu, Zhen-Dong Wang *et al.*. Moiré tomography by ART[C]. *Proc. SPIE*, 1996, **2861**: 146~150
- 14 Gregory W. Faris, Robert L. Byer. Beam-deflection optical tomography of a flame[J]. *Opt. Lett.*, 1987, **12**(3): 155~157
- 15 Zhu Dezhong. *Laser Metrology for Thermal Physics* [M]. Beijing: Science Press, 1990. 4~12 (in Chinese)  
朱德忠. *热物理激光测试技术* [M]. 北京: 科学出版社, 1990. 4~12
- 16 Liu Feng. Theory and Experiment on Optical Computerized Tomography and Three Dimensional Flow Field Measurement [D]. Nanjing: Nanjing University of Science & Technology, 1997. 4, 12~15  
刘 峰. 光学计算机层析技术及三维流场定量测试的理论与实验研究[学位论文]. 南京: 南京理工大学, 1997. 4, 12~15