

文章编号: 0253-2239(2006)01-0131-5

圆孔受限波差高斯光束的远场近似及发散度分析

刘宏展 徐荣伟 刘立人 栾 竹

(中国科学院上海光学精密机械研究所信息光学实验室, 上海 201800)

摘要: 引入复高斯函数对衍射受限的圆孔进行了复高斯分解,得到了波差高斯光束远场衍射的近似解析式。在各种参量条件下,近似解析式所表示的衍射图样与严格的夫琅和费衍射积分的衍射图样完全一致,这表明用此解析式表征远场衍射是正确的。它的形式相对简单,为计算带来极大的方便。基于此,对有波差的高斯光束的远场发散度进行了深入的研究,检验了确定参量的光束随距离的改变而发散度不被改变的特性;同时,探讨了在圆孔限制下,发散度随高斯光束的束腰及波差的改变而变化的关系曲线,结果表明,这两个参量是影响发散度的主要因素。

关键词: 物理光学; 衍射; 发散度; 高斯光束; 夫琅和费衍射

中图分类号: O431.1 文献标识码: A

Far-Field Approximation and Divergence of Gaussian Beam with Phase Aberrations Diffracted by a Circular Aperture

Liu Hongzhan Xu Rongwei Liu Liren Luan zhu

(Information Optics Laboratory, Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics,
The Chinese Academy of Sciences, Shanghai 201800)

Abstract: By expanding the circular function into a linear superposition of a set of complex Gaussian functions, the approximative analytic expression for the far-field of Gaussian beam with phase aberrations diffracted by a circular aperture is obtained. For different parameters, the diffraction patterns of the expression of the Fraunhofer diffraction are identical, indicating the correctness of the expression. For its relatively simple form, the calculation becomes more convenient. Based on these, the far-field divergence of Gaussian beam with phase aberrations is completely studied. The divergence of the certain beam does not change with the transmission distance, but with the beam-waist radius and the phase aberrations under the limit of circular aperture, and the result indicates that two parameters are the key factors affecting the divergence.

Key words: physical optics; diffraction; divergence; Gaussian beam; Fraunhofer diffraction

1 引 言

在研究星间半导体激光通信系统时,我们遇到这样的问题,即如何方便地求取具有波差的高斯光束在圆孔衍射下的远场分布,并根据求得分布快捷地确定光束的发散度、判别光束质量,看其是否能满足系统通信的要求。高斯光束衍射的求解方法有两种:一种是直接对衍射积分式进行数值积分^[1~5],此方法准确度高,但计算繁琐,极耗时间;一种是基于慢收敛的无穷级数解析解方法^[6~8],它需要对级

数进行多项式展开,且需根据要求的准确度来判断所需的展开项数,过程也难免麻烦。在这两种方法中,通常很少把光束的波差考虑在内,可是,在实际工程中波差是影响远场衍射的重要因素^[9]。针对这些情况,我们引入圆孔函数的复高斯分解^[10],用有限项的复高斯函数来近似圆孔函数,使得波差高斯光束的衍射积分简化为有限项的级数和,从而,为后续的计算提供了许多方便。

本文在引入复高斯函数的基础上对衍射受限的

作者简介: 刘宏展(1975~),男,湖南衡东人,博士研究生,主要从事激光通信及相关检测技术的研究。

E-mail: lhzhan@yahoo.com.cn

收稿日期: 2005-03-16; 收到修改稿日期: 2005-06-26

圆孔进行复高斯分解,得到了波差高斯光束远场衍射的近似解析式。在各种参量条件下,将它与严格的夫琅和费衍射积分进行了比较,它们的衍射图样完全一致。这表明,用此近似解析式表征远场衍射是正确的。此近似解析式仅用十项就能准确表征远场衍射,且形式相对简单,为计算带来极大的方便。基于此,对有波差的高斯光束的远场发散度进行了深入的研究,检验了参量确定的光束随距离的改变,而发散度不被改变的特性,数值计算表明,最大变化幅度不超过1%。同时,探讨了在某一圆孔限制下,发散度随高斯光束的束腰及波差的改变而变化的关系曲线,结果表明,这两个参量是影响发散度的主要因素,这为工程设计提供了必要的理论依据。

2 圆孔受限下远场分布的近似解析解

带有波差的高斯光束通过有限圆孔时,会有衍射现象产生。现假设单位振幅的圆对称的高斯光束为

$$a(r_0) = \exp(-r_0^2/\omega_0^2), \quad (1)$$

式中 ω_0 为高斯光束的束腰。令高斯光束的附加波差为 $\text{err}(r_0)$,根据文献[11]

$$\begin{aligned} \text{err}(r_0) &= \exp\left(-i2\pi \frac{\Delta\omega}{\lambda}\right) = \\ &\exp\left(-i2\pi \frac{\Delta\omega_m}{\lambda}\right) \exp\left(i2\pi \frac{\Delta\omega_m r_0^2}{\lambda R_0^2}\right), \end{aligned} \quad (2)$$

式中 R_0 表示圆孔的半径, $\Delta\omega_m$ 表示波差值。而圆孔的孔径函数为 $\text{circ}(r_0)$,则有波差的高斯光束经孔径光阑后的振幅 $b(r_0)$ 可表示成

$$b(r_0) = a(r_0)\text{err}(r_0)\text{circ}(r_0) = \exp\left(-\frac{r_0^2}{\omega_0^2}\right) \exp\left(-i2\pi \frac{\Delta\omega_m}{\lambda}\right) \exp\left(i2\pi \frac{\Delta\omega_m r_0^2}{\lambda R_0^2}\right) \text{circ}(r_0), \quad (3)$$

由衍射理论可知,光波在远场的无量纲分布形式如下:

$$\begin{aligned} A(\tau, \eta) &= \frac{2C}{j\eta} \int_0^1 \exp\left(j \frac{\tau^2 + \zeta^2}{\eta}\right) \exp\left(-\frac{R_0^2}{\omega_0^2} \zeta^2\right) \exp(jk\Delta\omega_m \zeta^2) J_0\left(2 \frac{\tau\zeta}{\eta}\right) \text{circ}(\zeta) \zeta d\zeta = \\ &\frac{2C}{j\eta} \int_0^1 \exp\left(j \frac{\tau + \zeta^2}{\eta}\right) \exp(-B_0 \zeta^2) J_0\left(2 \frac{\tau\zeta}{\eta}\right) \text{circ}(\zeta) \zeta d\zeta, \end{aligned} \quad (4)$$

式中 $C = \exp(jkz) \exp(-jk\Delta\omega_m)$, $k = 2\pi/\lambda$, J_0 表示零阶贝塞尔函数, $L = kR_0^2/2$ 表示半径为 R_0 的圆孔的瑞利距离, $B_0 = (R_0^2/\omega_0^2) - jk\Delta\omega_m$, $\tau = r/R_0$, $\zeta = r_0/R_0$, $\eta = z/L$ 。

(4)式表示了高斯光束通过圆孔衍射后的远场分布,要求它的精确解析式是不可能的。要研究远场,通常是对(4)式进行数值积分。但是为了得到表征远场衍射特征的解析式,我们对(4)式中的圆孔函数 $\text{circ}(\zeta)$ 进行复高斯分解,从而求得远场的近似解析式。

根据文献[10],圆孔函数 $\text{circ}(r_0)$ 可以表示成复高斯函数的线性叠加,则^[10]

$$\text{circ}(\zeta) = \sum_{n=1}^{10} A_n \exp(-B_n \zeta^2), \zeta \in [0, \infty) \quad (5)$$

对应的 A_n, B_n 可以通过计算机优化计算得到,在文献[10]中的表1中已经给出。光束通过圆孔后由 $b(\zeta)$ 表示:

$$b(\zeta) = \begin{cases} \exp(-B_0 \zeta^2), & 0 \leq \zeta < 1 \\ 0, & \zeta > 1 \end{cases} \quad (6)$$

利用(6)式, $b(\zeta)$ 变换为

$$b(\zeta) = \exp(-B_0 \zeta^2) \text{circ}(\zeta) = \exp(-B_0 \zeta^2) \sum_{n=1}^{10} A_n \exp(-B_n \zeta^2), \zeta \in [0, \infty) \quad (7)$$

通过这一变换,(4)式的积分上限被外推到了无穷大处,这样一来,(4)式可以表示为

$$\begin{aligned} A(\tau, \eta) &= \frac{2C}{j\eta} \int_0^1 \exp\left(j \frac{\tau^2 + \zeta^2}{\eta}\right) \exp(-B_0 \zeta^2) J_0\left(2 \frac{\tau\zeta}{\eta}\right) \text{circ}(\zeta) \zeta d\zeta = \\ &\frac{2C}{j\eta} \int_0^\infty \exp\left(j \frac{\tau^2 + \zeta^2}{\eta}\right) J_0\left(2 \frac{\tau\zeta}{\eta}\right) \exp(-B_0 \zeta^2) \left[\sum_{n=1}^{10} A_n \exp(-B_n \zeta^2) \right] \zeta d\zeta = \\ &\frac{2C}{j\eta} \int_0^\infty \exp\left(j \frac{\tau^2 + \zeta^2}{\eta}\right) J_0\left(2 \frac{\tau\zeta}{\eta}\right) \left[\sum_{n=1}^{10} A_n \exp(-B'_n \zeta^2) \right] \zeta d\zeta = C \sum_{n=1}^{10} A_n \frac{\exp[-B'_n \tau^2 / (1 + jB'_n \eta)]}{(1 + jB'_n \eta)}, \end{aligned} \quad (8)$$

式中 $B'_n = B_0 + B_n$, (8) 式最后利用了

$$\int_0^{\infty} J_0(at) \exp(-\gamma^2 t^2) t dt = \frac{1}{2} \gamma^{-2} \exp\left(-\frac{1}{4} \gamma^{-2} a^2\right).$$

通过以上运算,得到了表示远场的近似解析式。下面讨论(8)式能否很好地近似(4)式及其吻合程度。通过数值运算,并通过相应的图形来进行比较、

说明。其中,取圆孔半径 $R_0 = 10 \text{ mm}$, 光束波长 $\lambda = 0.8 \text{ } \mu\text{m}$, 瑞利距离 $L = kR_0^2/2 = 393 \text{ m}$, 远场距离 $z = 10000 \text{ m} \gg L$, 让光束的束腰 ω_0 以及波差 $\Delta\omega_m$ 改变。我们选取了三种有代表性的情况来检验,它们分别是 $\omega_0 \gg R_0$, $\omega_0 \approx R_0$, $\omega_0 < R_0$, 相应结果如图 1 所示。

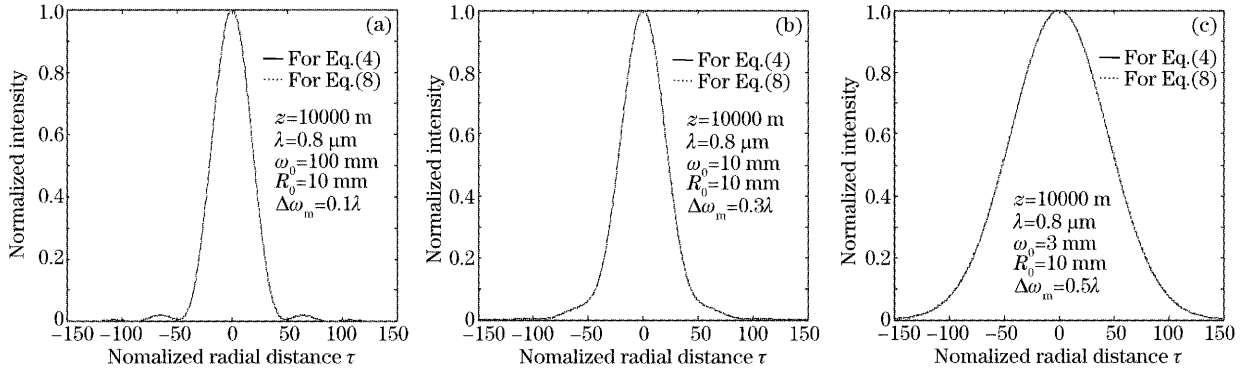


图 1 同一传播距离,不同参量时,(4)式和(8)式的远场光场径向归一化强度分布曲线

Fig. 1 Normalized intensity distributions of far-field optical field in the radial direction of Eq. (4) and Eq. (8) for different parameters in the same transmission distance

从图 1(a)看到,当 $\omega_0 = 100 \text{ mm} \gg R_0 = 10 \text{ mm}$, $\Delta\omega_m = 0.1\lambda$ 时,光束相当于波差平面光波的衍射情况,由(5)式和(11)式得到的在 $z = 10000 \text{ m} \gg L$ 处的远场衍射完全一致;从图 1(b)看出,当 $\omega_0 = 10 \text{ mm} = R_0$ 时,虽然此时光束具有较大的波差($\Delta\omega_m = 0.3\lambda$),但是由(8)式与(4)式的所得的结果还是完全吻合;而对于第三种情况 $\omega_0 = 3 \text{ mm} < R_0 = 10 \text{ mm}$,此时 $R_0/\omega_0 \approx 3.3$,它表明光束已经自由通过圆孔,即便光束具有 $\Delta\omega_m = 0.5\lambda$ 的波差,但由(8)式所得的结果与

由(4)式所得结果仍然完全一致。

通过以上三种情况,可以说明,在某一距离处的、具有波差的高斯光束,无论衍射强弱,或自由传播,近似解析(8)式都能与远场衍射积分式(4)相媲美。

随着传播距离的改变,(8)式和(4)式一致性结果如图 2 所示。圆孔半径与波长的取值与上边相同,波差 $\Delta\omega_m = 0.2\lambda$,光束束腰 ω_0 分别为 100 mm 、 10 mm 、 3 mm ,而距离 z 分别为 3000 m 、 6000 m 、 8000 m 。

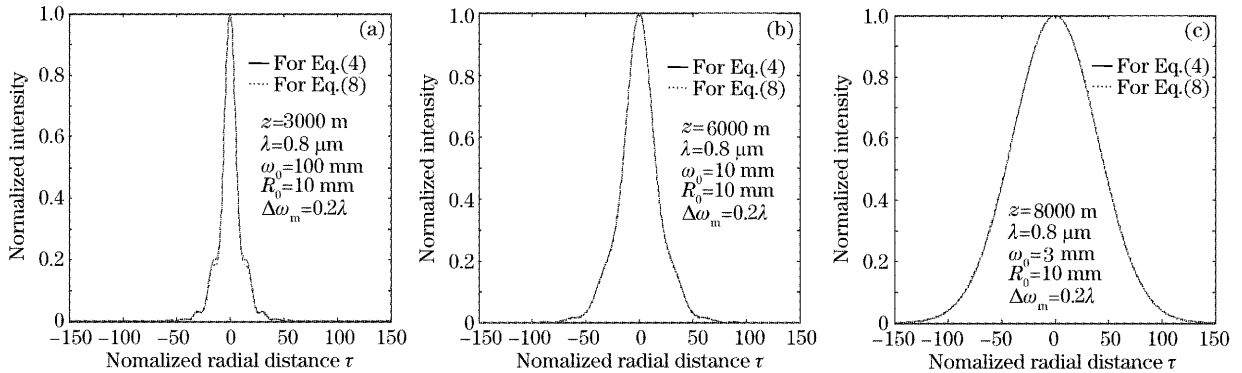


图 2 不同传播距离,不同参量时,(4)式和(8)式的远场光场径向归一化强度分布曲线

Fig. 2 Normalized intensity distributions of far-field optical field in the radial direction of Eq. (4) and Eq. (8) for different parameters in the different transmission distance

从图 2 可以看到,即便在不同的传播距离,也不管衍射的强弱,(4)式和(8)式所表示的远场衍射图样依然吻合。

综合以上的各种情况,可以得到这样的结论:用(8)式来表征圆孔受限下的波差高斯光束的远场衍射是正确的。

3 波差高斯光束的远场发散度

从以上的分析可以肯定用近似解析式(8)来研究光束的远场特性是完全可行的。与(4)式相比,它避免了繁琐的数值积分运算,为计算带来极大的方便,这正是我们竭力求取远场衍射近似解析式的初衷。利用它可以方便地求取波差高斯光束的发散度。这里所指的发散度 θ 定义为:光束幅值为最大值的 $1/e$ 点所对应的光场径向距离 r_e 与光束传播距离 z 的比值。对应于(8)式,只要求取远场幅值为最大值的 $1/e$ 点所对应的光场径向归一化距离 τ_e ,发散度就可以得到。也即

$$D = \frac{|A(0, \eta)|}{e} = \left| \frac{C}{e} \sum_{n=1}^{10} \frac{A_n}{(1 + jB'_n \eta)} \right|, \quad (9)$$

$$|A(\tau_e, \eta)| = \left| C \sum_{n=1}^{10} A_n \frac{\exp[-B'_n \tau_e^2 / (1 + jB'_n \eta)]}{(1 + jB'_n \eta)} \right| = D, \quad (10)$$

$$\theta = \tau_e / \eta. \quad (11)$$

发散度是光束本身的一个特征参量,对于某一确定的光束,其发散度不会随传播距离的改变而改变;对于参量可变的光束,随着参量的改变其发散度会有相应的变化。下边将对波差高斯光束远场发散度做深入的研究。

首先,检验某一确定光束的发散度是否随传播距离的改变而改变。仿前文所述,取孔半径 $R_0 = 10 \text{ mm}$,光束 $\lambda = 0.8 \text{ }\mu\text{m}$,分三种情况进行检验,即 $\omega_0 \gg R_0$, $\omega_0 \approx R_0$, $\omega_0 < R_0$, $\Delta\omega_m$ 的取值分别为 0.3λ , 0.3λ , 0.1λ 。计算表明,对于强衍射($\omega_0 \gg R_0$),远场发散度的变化率范围为 $-0.4\% \sim +0.4\%$ (这里的远场发散度变化率是指:在某一传播距离内,先求所有取样点对应的发散度,再求它们的平均值,然后把每点的发散度与平均值相减,由所得的差与平均值相比,其比值就是对应点发散度的变化率);对于弱衍射

($\omega_0 \approx R_0$),远场发散度变化率范围为 $-0.3\% \sim +0.3\%$;对于光束自由通过孔径传播($R_0/\omega_0 = 3.3$),远场发散度变化率范围为 $-0.15\% \sim +0.15\%$ 。从这三种情况来看,不管衍射效应如何,随着传播距离的改变,确定参量的波差高斯光束的发散度变化率都不超过 1% ,所以说,某一确定光束的发散度不随距离的改变而改变;同时,这也间接证明了用(8)式表征远场是正确的。

实际工程中常常要了解光束参量改变时光束发散的变化情况,因此,有必要研究光束束腰、波差等参量改变所引起发散度的变化。下边将研究确定孔径下($R_0 = 10 \text{ mm}$),波差一定时,光束发散度与光束束腰的变化关系;以及确定孔径下,光束束腰一定时,光束发散度与波差的变化关系。

当波差一定时,如图3(a)所示,我们分别研究了 $\Delta\omega_m = 0.1\lambda, 0.3\lambda, 0.5\lambda$ 的情况。从图3(a)我们看到,当 $\omega_0 \leq 10 \text{ mm}$ 时,随着 ω_0 的增大, θ 单调递减。这可以这样来解释,随着 ω_0 的增大,光束由自由传播逐渐向弱衍射转变,在此过程中,发散度的主要决定因素由光束束腰 ω_0 变化为由 ω_0 和 $\Delta\omega_m$ 共同决定。如果不考虑衍射的影响,自由传播高斯光束的发散度 $\theta \approx 2\lambda/\pi\omega_0$,从它很容易看到发散度 θ 随 ω_0 单调变化的特性。当 $R_0/\omega_0 \ll 1/2$ 时,光束相当于具有波差的平面波。对于不同波差的光束,其发散度都达到一个定值,这个定值就是对应波差平面波的发散度。波差越大,发散度就越大。

当光束束腰一定时,如图3(b),我们分别研究了 $\omega_0 = 100 \text{ mm}, 10 \text{ mm}, 4 \text{ mm}$ 的情况。我们看到,不管衍射效应如何,光束发散度 θ 都单调地随光束波差 $\Delta\omega_m$ 变化,并且,衍射效应愈强,其发散度变化愈快,比如 $\omega_0 = 4 \text{ mm}$ 时对应曲线所表示的发散度就比 $\omega_0 = 100 \text{ mm}$ 所对应的变化快。在实际工程

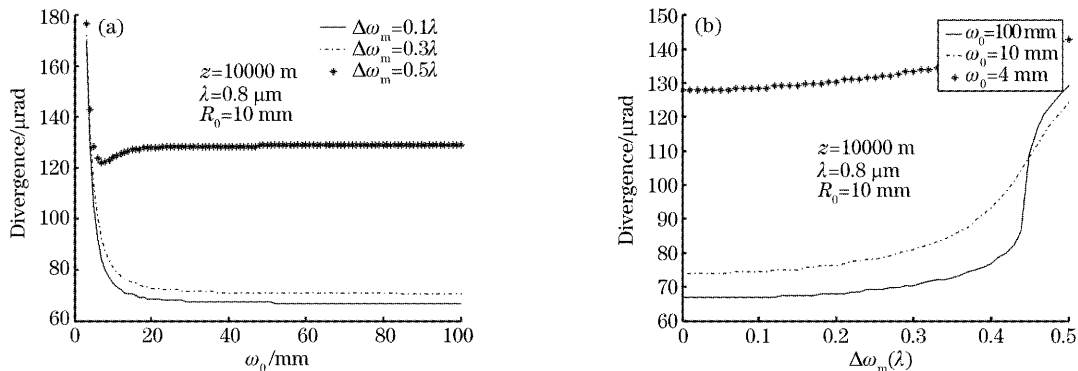


图3 光束发散度随束腰 ω_0 或波差 $\Delta\omega_m$ 的变化曲线

Fig. 3 Curve of the divergence changing with the beam-waist ω_0 or the phase aberrations $\Delta\omega_m$

中,对光束的波面质量要求不尽相同,光束的波差也各异,但是,为了提高光束质量、减小光束的发散性,光束的波差应当尽量地小。我们所研究的星间通信系统,更是要求光束能以衍射极限状态发射^[7]。

4 结 论

本文对圆孔受限下具有波差的高斯光束的远场特性以及光束的发散度进行了理论研究。通过引入圆孔函数的复高斯分解,把远场繁琐的衍射积分转化为求有限项高斯函数的和,得到了远场衍射的近似解析式。在各种参量条件下,与严格的远场衍射积分相对照,它们的衍射曲线完全重合,这表明此近似解析式是合理、正确的。基于此,结合工程计算的需要,研究了波差高斯光束的发散度。数值计算结果表明,确定参量的光束其发散度不随传播距离的改变而改变,其最大变化率也不超过1%,这间接证明了远场近似解析式的正确性。另外,研究表明,随着光束自身参量的改变,光束发散度将发生相应的变化,其中,高斯光束的束腰、波差是影响发散度的主要参量。当 $R_0/\omega_0 \ll 1/2$ 时,通过圆孔的光束相当于具有波差的平面波,对应于不同波差的光束其发散度都达到最小值,此时发散度 θ 就是波差平面波的发散度。当只有光束的波差发生改变而其他参量不变时,光束的发散度 θ 随波差的增大单调递增。总之,所得的远场近似解析式(8),有足够的准确度,在工程计算中有一定的应用价值,不足之处是它仍然是有限项的级数和。

参 考 文 献

- 1 J. F. Kauffman. The calculated radiation patterns of a truncated Gaussian aperture distribution [C]. *IEEE Trans. Antennas Propag.*, 1965, **AP-13**: 473~474
- 2 Peng Wang, Yuguang Xu, Wei Wang *et al.*. Analytic expression for Fresnel diffraction [J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1998, **15**: 684~688
- 3 J. P. Campbell, L. G. DeShazer. Near fields of truncated Gaussian apertures [J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1969, **59** (11): 1427~1429
- 4 Zhou Guoqiang, Zhao daomu, Wang shaomin. Characteristics of axial light intensity of planar wave diffracted by small circular aperture [J]. *Acta Optical Sinica*, 2003, **23** (1): 22~25 (in Chinese)
周国泉,赵道木,王绍民. 平面波经小圆孔衍射的轴上光强特性 [J]. *光学学报*, 2003, **23** (1): 22~25
- 5 Zhou Guoquan, Ni Yongzhou, Wang Shaomin. Axial light intensity characteristics of Gaussian beam diffracted by a wavelength-order circular aperture [J]. *Chin. J. Lasers*, 2004, **31** (4): 437~440 (in Chinese)
周国泉,倪涌舟,王绍民. 高斯光束经波长级圆孔衍射的轴上光强特性 [J]. *中国激光*, 2004, **31** (4): 437~440
- 6 G. O. Olaofe. Diffraction by Gaussian apertures [J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1970, **60** (12): 1654~1657
- 7 R. G. Schell, G. Tyras. Irradiance from an aperture with a truncated Gaussian field distribution [J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1971, **61** (1): 31~35
- 8 G. Lenz. Far-field diffraction of truncated higher-order Laguerre-Gaussian beams [J]. *Opt. Commun.*, 1996, **123**: 423~429
- 9 Liu Hongzhan, Liu Liren, Xu Rongwei *et al.*. Measuring near the diffraction-limited wavefront of semiconductor laser beam [J]. *Chin. J. Lasers*, 2005, **32** (4): 519~522 (in Chinese)
刘宏展,刘立人,徐荣伟等. 近衍射极限半导体激光束波面检测 [J]. *中国激光*, 2005, **32** (4): 519~522
- 10 J. J. Wen, M. A. Breazeale. A diffraction beam field expressed as the superposition of Gaussian beams [J]. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1988, **83** (5): 1752~1756
- 11 Hongzhan Liu, Liren Liu, Rongwei Xu *et al.*. Measurement of the wavefront of a laser diode system for intersatellite communication by a Jamin double-shearing interferometer [J]. *J. Opt. A: Pure and Appl. Opt.*, 2005, **7**: 142~146