

文章编号: 0253-2239(2005)08-1148-5

# X 射线成像的一种点扩展函数模型

邵军明 路宏年 蔡 慧

(北京航空航天大学机械制造及自动化学院, 北京 100083)

**摘要:** X 射线成像系统可以通过其点扩展函数来表征, 其点扩展函数分为一次射线点扩展函数和散射点扩展函数两部分。在分析点扩展函数各个影响因素的基础上, 建立了以物体厚度、物体到探测器距离以及成像几何设置为参量的解析模型。利用该模型推导出了特定入射射线能谱和射线源到探测器距离情况下散射比的计算公式。它是物体厚度和物体到探测器距离为变量的函数。在利用实验数据对模型参量进行最优估计的基础上, 利用散射比实验验证了模型的正确性。为散射和几何不清晰度的消除提供了一种实用的模型依据。

**关键词:** X 射线光学; X 射线成像; 点扩展函数模型; 散射

中图分类号: TP911.23 文献标识码: A

## A Point Spread Function Model for X-Ray Imaging

Shao Junming Lu Hongnian Cai Hui

(School of Mechanical and Automation, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083)

**Abstract:** The functioning of an X-ray imaging system is well characterized by its point spread function (PSF). The point spread function consists of prime point spread function and scatter point spread function. A point spread function model is developed for X-ray imaging system. Parameters in the model include part thickness, source to detector distance and geometric parameters. Based on the model, an analytical expression for the scatter fraction is derived and it is a function of part thickness and source to detector distance. Experiment result proves correctness of the model by comparing calculated scatter fraction and the one measured from experiment. The model gives an estimation of scatter and geometric blur for their removal and is an effective model for X-ray imaging.

**Key words:** X-ray optics; X-ray imaging; point spread function model; scatter

## 1 引 言

在 X 射线成像中<sup>[1,2]</sup>, 缺陷作为一种细节特征, 往往是低衬比度的, 其可检出性受到 X 射线成像信噪比的制约。影响信噪比的两个重要因素是光电噪声和散射。散射表现为低通特性, 严重影响细节衬比度<sup>[3]</sup>。光电噪声可以通过累积曝光大大衰减, 而散射则不能。用以消除散射的图像处理技术主要有两种: 一是从原始图像中减去估计的散射图像<sup>[4]</sup>, 二是利用反卷积的方法消除散射<sup>[5]</sup>。这两种方法都需要估计散射分布和散射比。不少文献提出了各自散射理论模型并通过实验对散射进行参量估计<sup>[6~10]</sup>, 但大多数模型要么可给出较好的散射比估计但在散射分布上是粗糙近似; 要么虽可给出基于实验测量

的散射分布, 但模型不是成像设置的参量模型, 需要每次实验都要测量。因此需要一种模型, 能够很好估计散射比和散射分布的同时又是成像设置的参量模型, 具有实用性。

## 2 模型推导

X 射线成像系统由其对一无穷小质点成像所形成的点扩展函数来表征, 如图 1 所示。X 射线与物质相互作用除了穿透的一次射线外还有二次散射射线, 在入射射线能量一定时二者叠加形成一个互斥集合<sup>[4]</sup>。X 射线成像点扩展函数 (Point spread function, PSF) 由一次射线  $f_{\text{PSF}}^{\text{P}}(\mathbf{r})$  和散射  $f_{\text{PSF}}^{\text{S}}(\mathbf{r})$  两部分组成。在如图 2 所示的坐标系下, X 射线成像点扩

作者简介: 邵军明(1978~), 山东人, 北京航空航天大学博士研究生, 主要从事 X 射线成像及图像处理方面的研究。

E-mail: bearbuaa@163.com

收稿日期: 2004-07-21; 收到修改稿日期: 2004-11-22

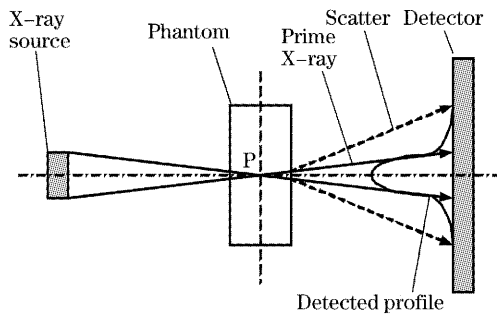


图 1 X 射线成像示意图

Fig. 1 Schematic diagram of X-ray imaging system

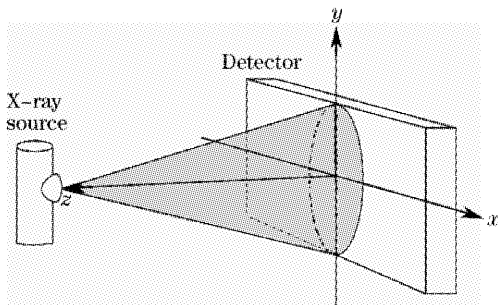


图 2 解析模型所在坐标系

Fig. 2 Coordinates of the analytical model

展函数和线扩展函数 (Line spread function, LSF) 分别由(1)式和(2)式表达:

$$f_{\text{PSF}}(x, y) = f_{\text{PSF}}^{\text{prim}}(x, y) + f_{\text{PSF}}^{\text{sc}}(x, y), \quad (1)$$

$$f_{\text{LSF}}(x) = f_{\text{LSF}}^{\text{prim}}(x) + f_{\text{LSF}}^{\text{sc}}(x), \quad (2)$$

$f_{\text{PSF}}$  函数和  $f_{\text{LSF}}$  函数之间存在如下积分关系:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\text{PSF}}^{\text{prim}}(x, y) dy = f_{\text{LSF}}^{\text{prim}}(x), \quad (3)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\text{PSF}}^{\text{sc}}(x, y) dy = f_{\text{LSF}}^{\text{sc}}(x), \quad (4)$$

### 2.1 一次射线点扩展函数和线扩展函数

一次射线点扩展函数是 X 射线源和探测器固有模糊度形成的成像几何不清晰度,其分布可用一高斯函数很好地表达,极坐标的形式表达如下:

$$f_{\text{PSF}}^{\text{prim}} = A'(t) \exp(-\tau r^2), \quad (5)$$

$$\tau = 4 \ln 2 / B^2, \quad (6)$$

$$B = \sqrt{a^2 (M-1) + d^2}, \quad (7)$$

式中  $t$  为物体厚度,  $A'(t)$  表示函数幅值, 尺度参量  $\tau$  可以通过射束有效宽度  $B$  计算, (7) 式中  $a$  为射线源尺寸(半峰全宽),  $d$  为探测器固有模糊度尺寸(半峰全宽)。

固定入射射线能谱和射线源到探测器的距离, 入射到探测器上的一次射线的能量在没有透照物体时为一常数, 下式成立:

$$\begin{aligned} \phi^{\text{prim}} &= A'(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-\tau(x^2 + y^2)] dx dy = \\ &= \frac{A'(0) \times \pi}{\tau} = \text{const} \Rightarrow A'(0) \propto \tau, \end{aligned} \quad (8)$$

在有透照物体时一次射线受到物体衰减作用, 其能量为物体厚度的函数, 可得出

$$A'(t) = A'(0) \exp(-c_1 t) \propto \tau \exp(-c_1 t), \quad (9)$$

其中  $c_1$  为一次射线的有效衰减系数。

一次射线的线扩展函数可由上述点扩展函数在一维方向上积分获得:

$$f_{\text{LSF}}^{\text{prim}}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\text{PSF}}^{\text{prim}}(x, y) dy =$$

$$A'(t) \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\tau}} \exp(-\tau x^2) = A \exp(-\tau x^2), \quad (10)$$

将(6)式和(9)式代入(10)式得到

$$\begin{aligned} A &= C \sqrt{\tau} \exp(-c_1 t) = \\ &= C \times 2 \sqrt{\ln 2} \exp(-c_1 t) / B = \\ &= c_2 \exp(-c_1 t) / B, \end{aligned} \quad (11)$$

式中  $C$  为常数, 参量  $(c_1, c_2)$  同  $f_{\text{PSF}}^{\text{sc}}$  中的参量一起通过递归程序利用实验数据进行最优估计。

### 2.2 散射点扩展函数和线扩展函数

影响散射分布和散射比的因素众多。固定入射射线能谱和视场大小, 散射点扩展函数参量会受到物体厚度、物体到探测器的距离以及物体组成的影响<sup>[5,9]</sup>。本文对等厚的均匀介质物体产生的散射分析建模, 物体厚度变化(物体形状)对散射的影响可采用文献[11]中的类似方法对散射点扩展函数模型进行调节。此处采用的散射线扩展函数模型为一洛伦兹函数分布模型, 其表达式如下:

$$\begin{aligned} f_{\text{LSF}}^{\text{sc}} &= S \frac{1}{1 + [sx/(c_3 z)]^2} = \\ &= S \frac{1}{1 + (sx/z')^2}, \end{aligned} \quad (12)$$

其中  $C_3 z = z'$ ,  $s$  为受物体厚度影响的尺度参量, 物体越厚时因散射几何放大和多次散射使得散射分布尺寸变大<sup>[7]</sup>, 该尺度参量与厚度的关系用下式表示:

$$s = \frac{1}{c_4 + c_5 t + c_6 t^2}, \quad (13)$$

关系式中参量  $(c_4, c_5, c_6)$  也将通过程序利用实验数据进行最优估计,  $s$  为散射值,  $c_3$  为一调节参量。

同时散射分布的尺度参量还会受到物体到探测器距离  $z$  的影响。因为  $z$  的存在使得散射线到达探测器时会分布更广。参考文献[9] 固定物体厚度, 利用以  $z$  为参量的洛伦兹函数模型对散射点扩展函

数进行建模得到了很好的实验验证。

对(12)式积分得到散射线扩展函数的能量表达式:

$$\phi^{sc} = \pi S(z'/s), \quad (14)$$

散射射线的能量与物体的厚度  $t$  及其衰减因子  $\exp(-c_7 t)$  成比例<sup>[11]</sup>, 即

$$\phi^{sc} \propto t \exp(-c_7 t), \quad (15)$$

另外, 物体到探测器距离  $z$  对散射具有衰减作用, Muntz 等<sup>[12]</sup>提出了如图 3 所示的有效散射源经验模型, 所有的散射射线可以看作是从距离物体射线射出平面为  $z_s$  的一个有效散射源发出, 根据距离平方衰减原则, 一次射线和散射射线都要在物体到探测器距离上衰减。Muntz 证明大多数情况下, 这个有效散射源位于射线源和物体射线射出平面之间, 因此物体到探测器距离  $z$  对散射的衰减要大于对一次射线的衰减, 起到抑止散射的作用。

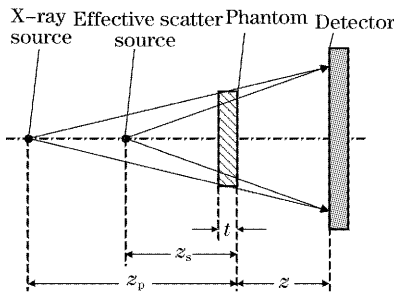


图 3 有效散射源示意图

Fig. 3 Schematic diagram of effective scatter source

在一次射线点扩展函数模型中固定射线源到探测器距离, 探测器检测到的入射 X 射线衰减后的能量为常数, 它只与物体厚度有关。因此模型避免了引入包含物体到探测器距离  $z$  的衰减因子。

在散射线扩展函数模型建立时, 根据有效散射源模型, 散射线扩展函数的能量还与物体到探测器距离  $z$  有关:

$$\phi^{sc} \propto c_8^2 / (c_8 + z)^2, \quad (16)$$

其中  $c_8$  为一调节参量。最后推出散射线扩展函数能量表达为

$$\phi^{sc} = c'_9 t \exp(-c_7 t) \frac{c_8^2}{(c_8 + z)^2}, \quad (17)$$

由(14)式和(17)式得到

$$S = c'_9 \pi \frac{s}{z} t \exp(-c_7 t) \frac{c_8^2}{(c_8 + z)^2} = c_9 \frac{s}{z} t \exp(-c_7 t) \frac{c_8^2}{(c_8 + z)^2}, \quad (18)$$

与散射线扩展函数对应的散射点扩展函数为

$$f_{PSF}^{sc} = \frac{1}{2} \frac{Ss}{z'} \frac{1}{[1 + (sr/z')^2]^{3/2}}, \quad (19)$$

其中  $r^2 = x^2 + y^2$ 。

### 2.3 总的 X 射线成像线扩展函数和点扩展函数

如上所述, 可以得出 X 射线成像总的线扩展函数为

$$f_{LSF}^{total} = f_{LSF}^{prim} + f_{LSF}^{sc} = A \exp(-\tau x^2) + S \frac{1}{1 + (sx/z')^2}, \quad (20)$$

其中  $A, \tau, S, s$  分别按照(11)式、(6)式、(18)式、(13)式计算。

通过上式可求出散射射线与一次射线能量比 (Scatter to prime ratio, SPR) 的计算公式:

$$R_{SP} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{LSF}^{sc}(x) dx / \int_{-\infty}^{+\infty} f_{LSF}^{prim}(x) dx = 2 \sqrt{\pi \ln 2} \frac{c_9}{c_2} t \exp[(c_1 - c_7)t] \frac{c_8^2}{(c_8 + z)^2}, \quad (21)$$

由散射能量比计算散射射线与总射线能量比值即散射比 (Scatter fraction, SF) 的转换公式为

$$F_s = R_{SP} / (1 + R_{SP}), \quad (22)$$

与(20)式表达的线扩展函数对应的 X 射线成像总点扩展函数为

$$f_{PSF}^{total} = f_{PSF}^{prim} = f_{PSF}^{sc} = A \sqrt{\frac{\tau}{\pi}} \exp(-\tau r^2) + \frac{1}{2} \frac{Ss}{z'} \frac{1}{[1 + (sr/z')^2]^{3/2}}. \quad (23)$$

这一点扩展函数模型参量包括了 X 射线成像几何设置、物体厚度以及物体到探测器距离, 在固定入射 X 射线能谱和射线源到探测器距离的情况下, 通过实验数据来对模型参量进行最优估计。

## 3 实验测量和参量估计

采用类似于参考文献[6]的方法采集几组不同物体厚度和不同射线源到探测器距离设置的数据, 实验设置示意图如图 4 所示。一次射线透过的板总厚度不变, 靠近射线源出口的板产生的散射因其到探测器距离的衰减而忽略不记, 散射由靠近探测器的板产生。探测器所采集的边扩展函数  $f_{ESF}$  (Edge spread function) 为探测器平面上铅缝与总线扩展函数卷积所成的像, 见(24)式。实验中铅缝的宽度为 2 cm, 厚度为 2 cm, 考虑到放大因子 1.29, 在无点扩展函数影响情况下探测器上得到的缝图像宽度  $D$  为 2.58 cm。

$$f_{\text{ESF}}^{\text{sc}}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x-v) f_{\text{LSF}}^{\text{total}}(v) dv, \quad (24)$$

$$h(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq D/2 \\ 0, & |x| > D/2 \end{cases} \quad (25)$$

坐标系原点设定在主射线投影视场中心  $O$ , 如图 2 中所示, 其中  $D$  为缝在  $(x, y)$  面上的宽度。通过公式可以计算出铅缝的理论响应曲线  $f_{\text{ESF}}^{\text{sc}}$ 。

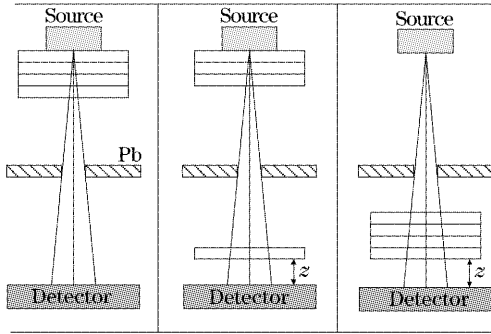


图 4 实验数据采集设置示意图

Fig. 4 Experimental setup to measure scatter

实验用铝板材料, 设置管电压为 180 kV, 管电流为 5 mA, X 射线出口有 1 mm 铜滤波板, 分别设置  $z$ : 55 mm, 100 mm, 120 mm 和板厚  $t$ : 9 mm, 18 mm, 27 mm, 36 mm 采集图像, 共测得出 12 组铅缝的实际响应曲线, 图 5 为其中采集的  $z = 55$  mm 四种板厚的铅缝响应曲线。

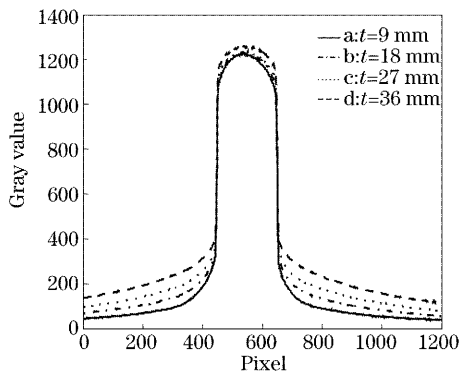


图 5 四种厚度情况下测量曲线 ( $z = 55$  mm)

Fig. 5 Measured scatter profiles with different phantom thickness ( $z = 55$  mm)

利用(24)式表达的函数对所有测量曲线进行最小二乘法拟合获取最优估计的模型参量。拟合时使用理论数据和实际测量数据之间的总平方误差  $\chi^2$  最小:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{12} \frac{|E_i^c - E_i^m|^2}{|E_i^c|^2}, \quad (26)$$

式中  $E_i^c$  与  $E_i^m$  分别表示理论数据和实际测量数据, 下标  $i$  表示第  $i$  组曲线。表 1 给出了参量的优化结

果, 最终优化误差为  $\chi^2 = 0.0026$ , 图 6 是其中  $z = 55$  mm 四种厚度最终优化获得的模型曲线和实验测量的曲线拟合情况, 图 6 中实线表示实际测量测量结果, 虚线表示理论拟合结果。

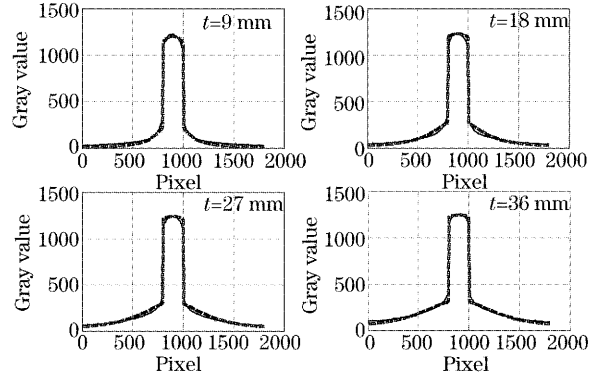


图 6 最终优化模型曲线 ( $z = 55$  mm)

Fig. 6 Nonlinear-least-square fit result of measured profile with this model ( $z = 55$  mm)

表 1 参量优化结果

Table 1 Optimized model parameters

Parameters	Optimized results	unit
$c_1$	0.0316	1 / mm
$c_2$	321.3933	
$c_3$	0.0102	1 / mm
$c_4$	0.0010	mm
$c_5$	1.4900	
$c_6$	-0.0167	1 / mm
$c_7$	0.0360	1 / mm
$c_8$	255.0551	mm
$c_9$	5.7359	

## 4 散射比实验验证

通过实际测量散射比与利用(21)式、(22)式计算散射比进行比较来验证该模型。实验条件与上述用以优化模型参量所做实验条件相同, 实验设置见图 4 所示。将厚度  $t$  为 36 mm 的铝板放置在距探测器平面  $z$  为 55 mm 的位置; 采取常用的不同直径铅盘成像测量散射的方法, 铅盘厚度为 4.2 mm, 直径分别为 0.8 mm, 1.2 mm 与 2.2 mm。铅盘放置在成像面相同位置。铅盘图像中心处的灰度值为该直径铅盘测得的散射值。利用外推法求出直径为 0 mm 的铅盘对应的散射灰度值即为所求散射值  $S$ , 并且在不加铅盘情况下在相同位置取一幅图像, 对应位置处的灰度值作为总射线 ( $P + S$ , 一次射线加散射射线) 灰度值, 这两者的比值为实验求得散射比值, 铅盘直径与铅盘图像中心处灰度值关系如图 7 所示, 求出散射比为 0.471, 利用本文模型推导的散射比计算公式计算出的散射比为 0.469, 二者

相对误差小于 0.5%。

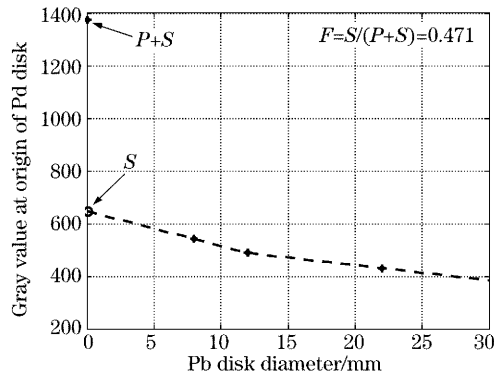


图 7 外推法求散射比

Fig. 7 Scatter fraction calculation by extraction of gray value at origin of different lead disks

## 5 结 论

该模型考虑了几何设置、物体厚度以及物体到探测器距离这三个影响 X 射线成像点扩展函数的主要因素,与其相关的模型参量通过实验数据进行优化估计;可以用于 X 射线成像散射分布的初步估计及散射比的定量分析,从而为消除散射提供依据。本模型主要考虑了康普顿散射且对高阶散射没有考虑,有高阶散射影响的点扩展函数需要更复杂的分析。同时在分析一次射线与散射射线随物体厚度衰减时采用的有效衰减系数为一常数,在对入射射线滤波情况下忽略了 X 射线能谱随物体厚度的变化。鉴于上述原因,该模型可能达不到蒙特卡罗模拟精度,但该模型的训练只需十几分钟,在效率上要远远高于蒙特卡罗的方法,因此更具有实用性。

## 参 考 文 献

- Zhu Peiping, Gao Hongyi, Jiang Shiping *et al.*. X-ray image holography[J]. *Acta Optica Sinica*, 2001, **21**(7): 850~852 (in Chinese)  
朱佩平,高鸿奕,蒋诗平等. X 射线像面全息术[J]. *光学学报*, 2001, **21**(7): 850~852
- Xie Honglan, Chen Jianwen, Gao Hongyi *et al.*. Influence of incident energy on reconstructed atomic images in X-ray fluorescence holography[J]. *Acta Optica Sinica*, 2004, **24**(7): 1004~1008 (in Chinese)  
谢红兰,陈建文,高鸿奕等. X 射线荧光全息术中入射能量对原子像的影响[J]. *光学学报*, 2004, **24**(7): 1004~1008
- Hidetaka Arimura, Takuji Date, Kaoru Morikawa *et al.*. Effect of scattered X-rays on image signal of radiograph[C]. *Proc. 80<sup>th</sup> Conference of Japan Society of Medical Physics*, 2000. 33~41
- Dinko, E. Gonzalez Trotter, J. Eric. Tkaczyk, John Kaufhold *et al.*. Thickness-dependent scatter correction algorithm for digital mammography[C]. *Proc. SPIE*, 2002, **4682**: 469~478
- J. A. Seibert, J. M. Boone. X-ray scatter removal by deconvolution[J]. *Med. Phys.*, 1988, **15**(4): 567~575
- John M. Boone, J. Anthony Seibert. An analytical model of the scattered radiation distribution in diagnostic radiology[J]. *Med. Phys.*, 1988, **15**(5): 721~725
- John M. Boone, Ben A. Arnold, J. Anthony Seibert. Characterization of the point spread function and modulation transfer function of scattered radiation using a digital imaging system[J]. *Med. Phys.*, 1986, **13**(2): 254~256
- A. Krol, D. A. Bassano, C. C. Chamberlain *et al.*. Scatter reduction in mammography with air gap[J]. *Med. Phys.*, 1996, **23**(7): 1263~1270
- Steven W. Smith, Robert A. Kruger. A signal processing model of diagnostic X-ray scatter[J]. *Med. Phys.*, 1986, **13**(6): 831~835
- Frederick C. Wagner, Albert Macovski, Dwight G. Nishimura. A characterization of the scatter point-spread-function in terms of air gaps[J]. *IEEE Trans. Med. Im.*, 1988, **7**(4): 337~344
- Freek J. Beekman, Eg G. J. Eijkman, Max A. Viergever *et al.*. Object shape dependent PSF model for SPECT imaging[J]. *IEEE Trans. on Nuclear Science*, 1993, **40**(1): 31~39
- James A. Sorenson, Jacqueline Floch. Scatter rejection by air gap: An empirical model[J]. *Med. Phys.*, 1985, **12**(3): 308~316