

文章编号: 0253-2239(2005)08-1062-5

基于泽尼克多项式进行面形误差拟合的频域分析

刘剑峰 龙夫年 张 伟 王治乐

(哈尔滨工业大学空间光学工程研究中心, 哈尔滨 150001)

摘要: 获得泽尼克多项式的频谱信息是正确利用该多项式进行误差拟合的关键。推导出了泽尼克多项式的傅里叶变换公式,在频域中分析了不同阶数该多项式的径向频谱信息和幅角频谱信息,得到了有限项泽尼克多项式能够有效表达面形误差的最大径向空间频率和角频率。基于频域分析理论,利用泽尼克多项式对不同口径局部误差进行了拟合,并利用齐戈(Zygo)干涉仪对带有不同面形误差的光学元件进行了试验分析。结果表明,当误差的径向空间频率或角频率超出泽尼克多项式所能表达的频谱范围时,拟合误差迅速变大。

关键词: 应用光学; 面形拟合; 傅里叶变换; 泽尼克多项式

中图分类号: O438 文献标识码: A

Frequency Domain Analysis of Surface Figure Fitting Based on Zernike Polynomials

Liu Jianfeng Long Funian Zhang Wei Wang Zhile

(Research Centre for Space Optical Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001)

Abstract: Obtaining the spectrum of Zernike polynomials is the key to fit the surface errors by Zernike polynomials correctly. The Fourier transform equation of Zernike polynomials is derived to analyze both the radial spectrum and the angular spectrum information of Zernike polynomials with different orders. The maximum radial spatial frequency and angular spatial frequency of the surface errors that can be effectively generated by finite-term Zernike polynomials is obtained. Based on frequency domain theory, local errors with different apertures are fitted using Zernike polynomials and experiments on optical elements are made using Zygo interferometer. The results show that the fitting errors would increase drastically when the radial spatial frequency or the angular frequency of the error exceeds the spectrum range which could be described by Zernike polynomials.

Key words: applied optics; surface errors fitting; Fourier transform; Zernike polynomials

1 引 言

光学元件加工表面总是光滑和连续的,因此可以表示成一个完备基底函数的线性组合。在实际测量中,常使用泽尼克(Zernike)多项式来表达光学元件面形误差^[1~4],但并不是说它是最好的拟合工具。由于实际所用的泽尼克多项式项数是有限的和其本身所具有的特性,使得它在拟合实际面形误差时会遇到一定的局限性,如果盲目地利用它去拟合面形误差,也许会得到极差的结果。

如何正确地使用泽尼克多项式进行误差拟合是我们所关心的问题。本文基于频域分析理论,以傅

里叶变换为工具分析了泽尼克多项式代表面形信息的能力和其在表达面形误差方面的局限性,并通过数值模拟和实验证实了该分析方法的有效性。

2 泽尼克多项式

泽尼克多项式间互为正交、线性无关,而且可以唯一、归一化地描述系统圆形孔径的面形。

泽尼克多项式的具体表达式为

$$\begin{aligned} Z_n^m(\rho) &= R_n^m(\rho) \exp(im\theta) \quad (n \geq 0, |m| \leq n) \\ &= R_n^m(\rho) \begin{cases} \cos m\theta & m \geq 0 \\ \sin m\theta & m < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

作者简介: 孙剑峰(1975~),男,辽宁沈阳人,博士研究生,主要从事空间光学系统设计、检测和装调。

E-mail: jfliu1@163.com

收稿日期: 2004-08-13; 收到修改稿日期: 2004-12-27

式中 $R_n^m(\rho)$ 是仅与径向有关的项; n 是多项式的阶数, m 为任意正或负的整数, 其值恒与 n 同奇偶性。令 $m = n - 2l, R_n^m(\rho)$ 的表达式为

$$R_n^m(\rho) = \begin{cases} \sum_{s=0}^m \frac{(-1)^s (n-s)! \rho^{n-2l}}{s!(l-s)!(n-l-s)!}, & (n-2l \geq 0) \\ R_n^{|m|}(\rho) = R_n^{n-2l}(\rho), & (n-2l < 0) \end{cases} \quad (2)$$

根据(1)式、(2)式, 可以写出每一项泽尼克多项式的具体表达式。取不同项的组合形式, 构成不同类型的泽尼克多项式。常用的有两种形式: 标准泽尼克多项式和条纹泽尼克多项式^[6]。在干涉仪分析软件中多采用条纹泽尼克多项式[如齐戈(Zygo)干涉

仪], 本文在进行分析模拟时采用该多项式, 共 37 项。它的径向 ρ 最大阶数为 12, 幅角 θ 最大阶数为 5, 各项表达式参见文献[5]。

3 泽尼克多项式的傅里叶变换

对泽尼克多项式进行傅里叶变换, 分析它的频谱, 可以得到有限项泽尼克多项式径向 ρ 和幅角 θ 的频谱信息。推导泽尼克多项式傅里叶变换公式的过程如下。

根据傅里叶变换定义, 可以直接写出泽尼克多项式的傅里叶变换公式:

$$\tilde{Z}(f_x, f_y) = \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} Z(x, y) \exp[-2\pi i(f_x x + f_y y)] dx dy, \quad (3)$$

采用极坐标形式: $f_x = f_r \cos f_\theta, \quad x = \rho \cos \theta, \quad f_y = f_r \sin f_\theta, \quad y = \rho \sin \theta,$

则(3)式可以写为:
$$\tilde{Z}(f_x, f_y) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 Z(\rho, \theta) \exp[-2\pi i f_r \rho \cos(\theta - f_\theta)] \rho d\rho d\theta, \quad (4)$$

将(1)式代入(4)式得:
$$\tilde{Z}(f_r, f_\theta) = \int_0^1 R_n^m(\rho) \left\{ \int_0^{2\pi} \exp(im\theta) \exp[-2\pi i f_r \rho \cos(\theta - f_\theta)] d\theta \right\} \rho d\rho, \quad (5)$$

利用文献[6]中的贝塞尔函数公式:

$$\frac{i^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(ix \cos \alpha) \exp(in\alpha) d\alpha = J_n(x), \quad (6)$$

则(5)式大括号中的式子可以表达为

$$\{ \} = \exp(imf_\theta) 2\pi i^m J_m(-2\pi f_r \rho), \quad (7)$$

利用贝塞尔函数性质, 当 x 为实数时:

$$J_n(-x) = (-1)^n J_n(x), \quad (8)$$

则(7)式得

$$\{ \} = \exp(imf_\theta) 2\pi (-i)^m J_m(2\pi f_r \rho), \quad (9)$$

将(9)式代入到(5)式得

$$\tilde{Z}(f_r, f_\theta) = 2\pi (-i)^m \times \exp(imf_\theta) \left[\int_0^1 R_n^m(\rho) J_m(2\pi f_r \rho) \rho d\rho \right], \quad (10)$$

利用文献[7]中的公式:

$$\int_0^1 R_n^m(\rho) J_m(\nu \rho) \rho d\rho = (-1)^{(n-m)/2} \frac{J_{n+1}(\nu)}{\nu}, \quad (11)$$

将(11)式代入到(10)式中, 得到

$$\tilde{Z}(f_r, f_\theta) = 2\pi (-i)^m \times \exp(imf_\theta) \left[(-1)^{(n-m)/2} \frac{J_{n+1}(2\pi f_r)}{2\pi f_r} \right], \quad (12)$$

将(12)式整理后得

$$\tilde{Z}(f_r, f_\theta) = 2\pi (-1)^n \frac{J_{n+1}(2\pi f_r)}{2\pi f_r} \exp(imf_\theta), \quad (13)$$

这是泽尼克多项式傅里叶变换的最终公式。 f_r 为径向频率, J_{n+1} 为 $n+1$ 阶贝塞尔函数。图 1 给出了 6 个不同阶数泽尼克多项式的径向频谱。

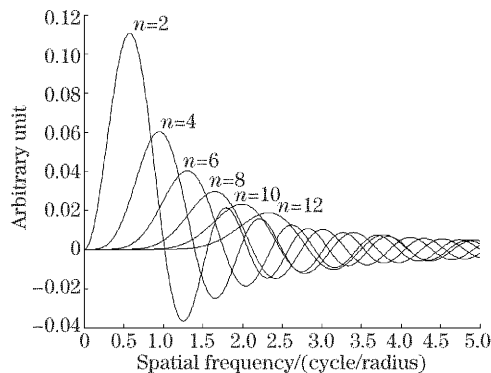


图 1 不同阶数泽尼克多项式的径向频谱

Fig. 1 The radial spectrum of Zernike with different orders

由于孔径的限制, 泽尼克各阶数频谱延伸到无穷大, 但是每一项的峰值频率代表这项主要频率内容。

当 $n=12$ 时,也就是 37 项条纹泽尼克多项式的最高阶数,它的峰值频率在 2.3(周期/半径)附近,这是它能够表达径向面形误差的最大径向空间频率。若要扩展频率范围,则必须再增加泽尼克多项式阶数。例如,为了使径向空间频率扩展到 5(周期/半径),泽尼克多项式的阶数应该增加到 28 次。由于阶数增大和采样频率提高,使得泽尼克多项式在拟合中频或高频面形误差时会遇到很大的困难。

f_θ 为角频率,取值范围为 $0\sim 2\pi$,泽尼克多项式角频率的内容由幅角 θ 的最高阶数决定,取决于(1)式中的 m 值。在 37 项条纹泽尼克多项式中, m 的最大值为 5,因此它能够表达的最大角频率为 5(周期/圆周)。

4 数值模拟

由泽尼克多项式的频谱信息可知,在利用有限项泽尼克多项式进行面形误差拟合时,要受到最大径向频率和最大角频率的限制,以局部误差为例,通过计算机仿真,进一步研究泽尼克多项式拟合面形误差的能力。

在极坐标中,任何的面形误差可以分解为沿着径向变化和沿幅角变化,这样可以把局部误差分成两种:一是共心局部误差,沿径向变化;另一种是离心局部误差,沿着径向和幅角两个方向变化,如图 2 所示。通过改变误差口径的大小模拟径向频率和角频率的变化,图 2 中箭头的指向是径向频率和角频率的变化方向。

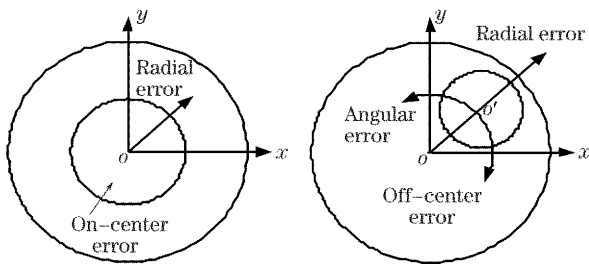


图 2 共心局部误差和离心局部误差

Fig. 2 On-center local error and off-center local error

利用泽尼克多项式进行面形拟合算法有多种^[8~12],本文采用 Householder 变换法计算泽尼克多项式系数,然后求得拟合误差的均方根值(RMS)。

4.1 共心局部误差模拟

共心局部误差只沿着径向变化,利用不同阶数泽尼克多项式对带有局部误差的圆形平面进行拟合,用数学函数表达局部误差理想模型,圆形平面的半径为 1,局部误差的最大值为 0.2λ 。

经模拟计算,得到不同阶数不同口径的拟合误差,图 3 给出了拟合后剩余误差的均方根值, a 为局部误差口径与平面口径的比值。

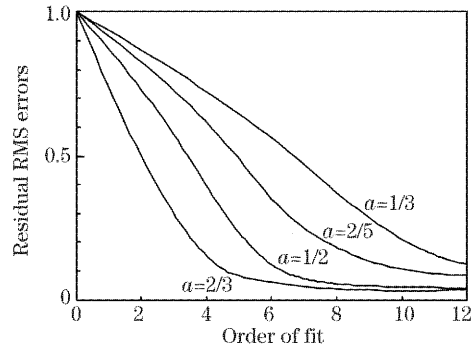


图 3 带有共心局部误差平面的拟合误差

Fig. 3 Fit errors of a flat surface with on-center local error

图 4 给出了最高阶数为 12 次的局部误差拟合三维图形,口径比分别为 2/3、1/2、2/5、1/3。

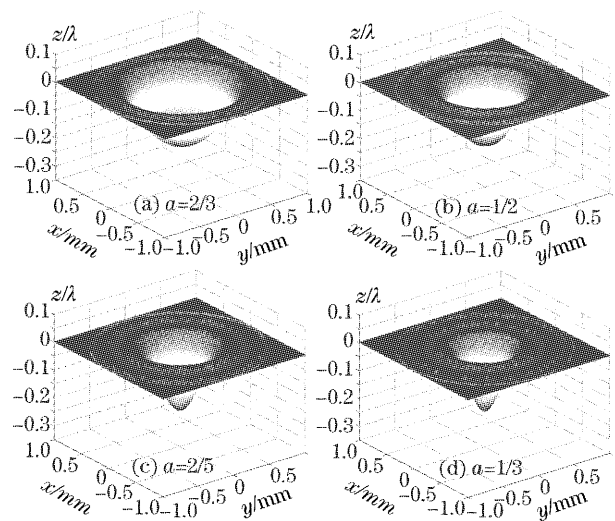


图 4 共心局部误差拟合轮廓图

Fig. 4 Fit maps of on-center local errors

可以看到,利用泽尼克多项式拟合共心局部误差时,拟合误差大小取决于径向的 ρ 阶次(或项数),阶次增大,拟合误差变小,同时在其他位置会产生额外的波动。随着局部误差口径的减小,局部误差最底部或产生的波动变化逐渐变大。这是因为局部误差口径缩小,径向空间频率增大,超出了有限项泽尼克多项式的最大径向空间频率,使得拟合精度迅速下降。

4.2 离心局部误差的模拟

离心误差沿着两个方向变化,如图 2 所示。在这里所模拟的离心局部误差数学模型与共心局部误差相同,只是沿着径向有一个 0.4 的偏心,模拟结果如图 5 所示,四条曲线代表口径比分别为 2/3、1/2、

2/5、1/3 离心局部误差的拟合误差均方根值(归一化值)。

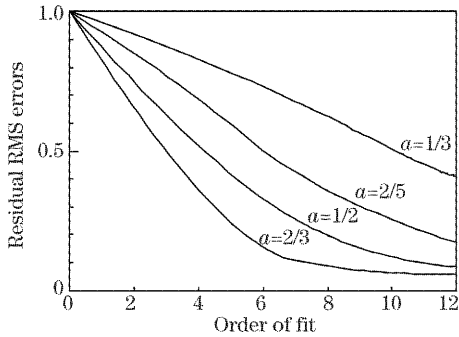


图 5 带有离心局部误差平面的拟合误差

Fig. 5 Fit errors of a flat surface with off-center local error

图 6 给出不同口径比离心局部误差拟合图形。

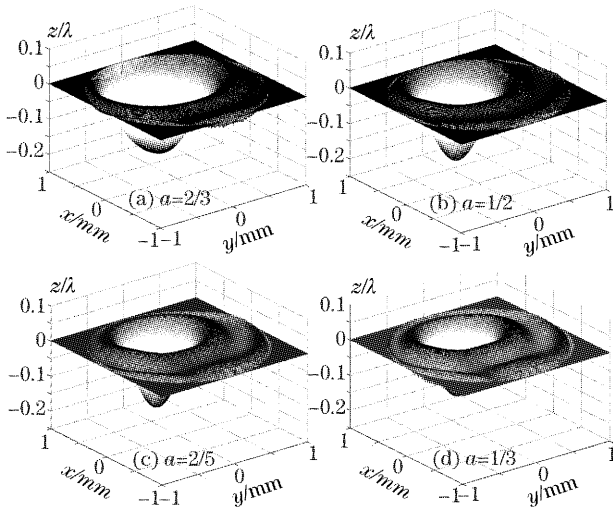


图 6 离心局部误差拟合轮廓图

Fig. 6 Fit maps of on-center local errors

从图 5 和图 6 可以看到,随着口径的减小,离心局部误差的拟合误差要比共心局部误差大,当口径比为 1/3 时,拟合误差迅速增加。离心局部误差与共心局部误差的径向频率相同,拟合误差值的变大是由于角频率引起的,37 项条纹泽尼克多项式幅角 θ 的最大阶数为 5,相对于 1/3 口径的离心局部误差来说太低了。为了避免沿幅角方向变化的误差引起的拟合精度的下降,幅角频谱宽度与径向频谱宽度要匹配,它们的比值应该大于 $2\pi r/r$,即 2π 。

5 实验分析

利用齐戈激光干涉仪对带有不同空间频率面形误差的光学元件进行测量,然后干涉仪分别给出 2 次(4 项)、4 次(9 项)、6 次(16 项)、8 次(25 项)和 10 次(36 项)泽尼克多项式系数和拟合误差。这里采

用拟合误差均方根值与面形误差均方根的比值大小来判断拟合结果的好坏,决定泽尼克多项式能否正确地表达实际面形误差。

图 7 为 4 个光学元件面形误差三维图,图 8 给出了泽尼克多项式拟合结果。

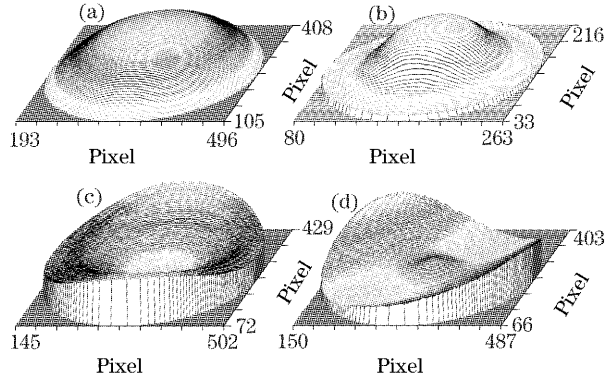


图 7 面形误差轮廓图

Fig. 7 Surface errors map

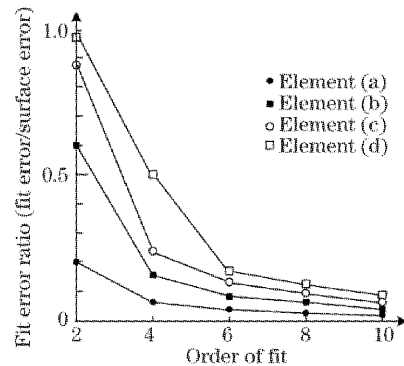


图 8 不同光学零件拟合误差

Fig. 8 Fit errors of different elements

从图 7、8 可以看出,光学元件(a)的面形误差分布近似一个二次曲面,利用 4 次泽尼克多项式来拟合就足够了;光学元件(b)和(c)为中心带有局部误差的光学元件,局部误差口径约为整个口径的 1/2,利用 8 次泽尼克多项式拟合可以满足要求;光学元件(d)两个方向的曲率半径不一样,用 10 次泽尼克多项式拟合能够满足要求。

以上 4 个元件的面形误差变化比较缓慢,面形误差的径向频率和角频率都不会超过 2 个周期/半径,利用泽尼克多项式拟合会得到很好的结果。

图 9 给出了干涉仪测得的另外 4 个光学元件面形误差三维图,图 10 给出了拟合误差。

从图 9、图 10 可以看出,光学元件(a)和(b)的面形误差沿一个方向周期性变化,径向频率和角频率都比较大,超出有限项泽尼克多项式的最大频率,且误差变化率较大,容易引起附加的波动,使得拟合

误差较大;光学元件(c)和(d)为高频误差,随机变化,没有规律性,利用泽尼克多项式无法正确地表达出实际的面形误差。

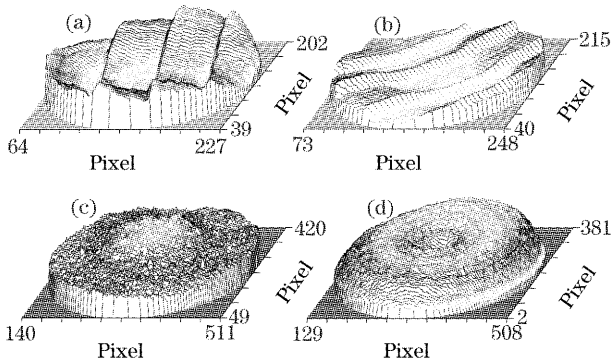


图 9 面形误差轮廓图

Fig. 9 Surface errors map

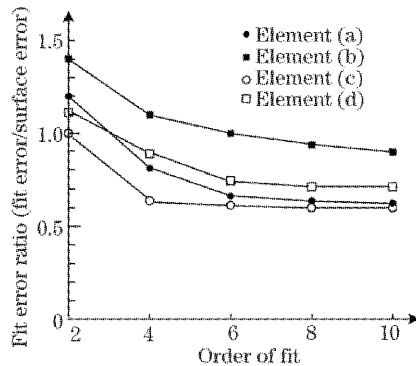


图 10 不同光学零件拟合误差

Fig. 10 Fit errors of different elements

6 结 论

通过对泽尼克进行频域分析、数值模拟和试验分析,可以得到如下结论:

1) 泽尼克多项式能够表达的面形误差受最大径向空间频率和最大幅角频率的限制,因此利用泽尼克多项式表达频率较高面形误差时会有一定的局限性,如利用其表达金刚石单点切削元件时,很难准确地表达出实际的面形。

2) 泽尼克多项式表达局部特征时会受到局部区域口径大小的限制,同时会引起附加的波动,因此不会准确地表达出实际局部特征。

总之,在使用泽尼克多项式拟合面形误差时应满足两个条件:1)泽尼克多项式能够表达面形的所有特征;2)超出泽尼克多项式表达范围的径向频率和角频率误差可忽略。

参 考 文 献

- Mo Weidong. Error and precision of a system for inspecting surface of optical plane [J]. *Acta Optica Sinica*, 2003, **23**(7): 879~883 (in Chinese)
莫卫东. 数字平面检测系统误差和精度评价方法的研究[J]. 光学学报, 2003, **23**(7): 879~883
- Li Xinyang, Jiang Wenhan. Zernike modal wavefront reconstruction error of Hartmann Shack wavefront sensor [J]. *Acta Optica Sinica*, 2002, **22**(10): 1236~1240 (in Chinese)
李新阳, 姜文汉. 哈特曼-夏克传感器的泽尼克模式波前复原误差[J]. 光学学报, 2002, **22**(10): 1236~1240
- Duan Haifeng, Yang Zeping, Wang Shuqing. Model wavefront reconstruction of Shack-Hartmann sensor on arbitrary area and wavefront expression by Zernike polynomials [J]. *Chin. J. Lasers*, 2002, **A29**(6): 517~520 (in Chinese)
段海峰, 杨泽平, 王淑青. 夏克-哈特曼传感器任意形状孔径波前的模式重构及 Zernike 多项式描述[J]. 中国激光, 2002, **A29**(6): 517~520
- Hou Jing, Ling Ning. Third harmonic conversion of aberrated laser beam [J]. *Chin. J. Lasers*, 2002, **A29**(6): 525~529 (in Chinese)
侯静, 凌宁. 位相畸变三次谐波转换[J]. 中国激光, 2002, **A29**(6): 525~529
- Cheo J-Jung Kim. *Polynomial Fit of Interferograms* [D]. Ph. D. Dissertation, University of Arizona, 1982. 15~30
- Liang Kunmiao. *Mathematics and Physics Method* [M]. Beijing: Higher Education Press, 2003. 342 (in Chinese)
梁昆森. 数学物理方法[M]. 北京: 北京高等教育出版社, 2003. 342
- Born M, Wolf E. *Principles of Optics* [M]. Yang Jiasun transl. Beijing: Science Press, 1978. 1026~1207 (in Chinese)
M. 波恩, E. 沃而夫. 光学原理[M]. 杨葭孙译. 北京: 科学出版社, 1978. 1026~1207
- Yan Jingzhou, Sun Houhuan, Gao Zhiqiang *et al.*. A new algorithm for wavefront fitting using Zernike polynomial [J]. *Acta Mathematica Scientia*, 2000, **20**(3): 378~385 (in Chinese)
颜静舟, 孙厚环, 高志强等. 用 Zernike 多项式进行波面拟合的一种新算法 [J]. 数学物理学报, 2000, **20**(3): 378~385
- Yan Jingzhou, Lei Fan, Zhou Bifang *et al.*. Algorithms for wavefront fitting using Zernike polynomial [J]. *Optics and Precision Engineering*, 1999, **7**(5): 119~128 (in Chinese)
颜静舟, 雷凡, 周必方等. 用 Zernike 多项式进行波面拟合的几种算法[J]. 光学精密工程, 1999, **7**(5): 119~128
- Shan Baozhong, Wang Shuyan, Niu Hanben *et al.*. Zernike polynomial fitting method and its application [J]. *Optics and Precision Engineering*, 2002, **10**(3): 318~323 (in Chinese)
单宝忠, 王淑岩, 牛憨笨等. Zernike 多项式拟合方法及应用 [J]. 光学精密工程, 2002, **10**(3): 318~323
- Wei Xueye, Yu Xin. An Optical wavefront sensing and reconstruction method based on Zernike polynomials [J]. *Acta Optica Sinica*, 1994, **14**(7): 719~723 (in Chinese)
魏学业, 俞信. 一种基于 Zernike 多项式的波前探测和重构方法[J]. 光学学报, 1994, **14**(7): 719~723
- Sun Weimin, Zhang Jianzhong, Yu Lei *et al.*. Fitting method of fluorescence lifetime based on fast Fourier transform arithmetic [J]. *Acta Optica Sinica*, 2004, **24**(6): 838~841 (in Chinese)
孙伟民, 张建中, 于蕾等. 荧光寿命的快速傅里叶变换拟合方法[J]. 光学学报, 2004, **24**(6): 838~841
- Kan Shanshan, Huang Yu, Wang Shurong. Methodological disquisition of spherical fine metrical precision [J]. *Acta Optica Sinica*, 2005, **25**(2): 195~198 (in Chinese)
阚珊珊, 黄煜, 王淑荣. 高精度检测球面面形的方法研究[J]. 光学学报, 2005, **25**(2): 195~198