

文章编号: 0253-2239(2005)06-860-5

分析原子干涉仪的矩阵方法*

郑森林 林 强**

(浙江大学物理系光学研究所, 杭州 310027)

摘要: 从原子波包所满足的薛定谔方程出发, 从理论上巧妙地推导出了原子干涉仪在重力的影响下所产生的相位差与重力加速度的关系表达式。提出了一种 3×3 阶的矩阵方法, 以此来分析多个元件情况下原子干涉仪中的相位差, 可以大大简化计算。利用这种方法不但能得到原子束在重力的影响下在自由空间中的传输矩阵, 也可以得到原子束与 $\pi/2$ 和 π 脉冲的相互作用矩阵。作为例子, 用 3×3 阶矩阵方法计算了三脉冲原子干涉仪中的相位差, 得出的结果与 Wolf 等对经典轨迹进行拉格朗日积分所得出的结果完全相符。进一步分析了五脉冲的原子干涉仪中的相位差, 以说明 3×3 阶矩阵方法的简便性。

关键词: 量子光学; 原子光学; 原子干涉仪; 矩阵方法

中图分类号: O431.2 文献标识码: A

The Matrix Method in Treating Atom Interferometer

Zheng Senlin Lin Qiang

(Institute of Optics, Department of Physics, Zhejiang University, Hangzhou 310027)

Abstract: Based on the Schrödinger equation for atomic waves, the relation between the gravity and the phase difference of atom interferometer is derived. A new 3×3 matrix method was introduced to calculate the phase difference for complicated system of the multiloop interferometers, which simplifies the calculation greatly. By use of this method, not only the propagation matrix of atom beam in free space under the influence of gravity can be, but also the interaction matrix of atom beam with $\pi/2$ and π pulse can be obtained. As an example, the phase difference for the three-pulse atom gravimeter by using the 3×3 matrix is derived, and the results obtained coincide precisely with those obtained by Wolf *et al.* through the integration of the Lagrangian over the classical trajectory. Finally, the phase difference of five-pulse atom gravimeter is analyzed to illustrate the convenience of the 3×3 matrix method.

Key words: quantum optics; atom optics; atom interferometer; matrix method

1 引 言

根据德布罗意提出的物质波的概念, 原子具有波的特性, 可以产生干涉现象^[1]。原子干涉仪近年来有了快速的发展, 科学家们实现了多种不同的干涉实验^[2~6]。例如, 观测旋转和重力对原子波包的影响, 更精确地测量了原子和分子的一些常数, 研究了拓扑相位和量子力学的某些基本结论^[2]。在各种类型的原子干涉仪中, 他们有的采用机械的分束器(如微型的光栅)^[3]; 有的采用光束作为分束器。Bordé 在理论上最早提出用激光束作为分束器和反射镜的原子干涉仪^[6], 它的分束原理是基于光子和原子碰撞而相互交换动量, 而且原子的内部状态也同时发生了改变^[5]。最初的原子干涉仪是采用二能

级的原子, 朱棣文等^[7]用三对拉曼脉冲激光实现原子基态的两个子能态之间的跃迁及外部动量的变化, 使原子波包分束、偏转、合束而产生干涉。原子干涉仪具有非常重要的应用, 如用于原子钟、重力梯度仪、陀螺仪等, 对于原子干涉仪中相位差的分析, 原先大多采用拉格朗日积分方法^[8]计算原子的运动轨迹, 无法避免多重积分和微分带来的繁杂。Bordé 等把 2×2 阶矩阵方法引入到原子光学中, 使这些理论计算变得更为方便^[9]。本文在 Bordé 的 2×2 阶矩阵方法基础上, 提出了一种更为方便的 3×3 阶矩阵方法, 这一方法可以方便地用于原子干涉仪在外场(重力场、地球的自转等)作用下的相位差, 从而可以得到需要测量的物理量。

* 国家自然科学基金(10334050)资助课题。

作者简介: 郑森林(1980~), 男, 浙江衢州人, 硕士研究生, 主要从事量子光学方面的研究。E-mail: zslphy@hotmail.com

** 通信联系人。E-mail: qlin@zju.edu.cn

收稿日期: 2004-08-31; 收到修改稿日期: 2004-10-26

2 原子光学中的矩阵定义

原子波包的传输满足薛定谔方程:

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = H |\psi(t)\rangle, \quad (1)$$

其中 $|\psi(t)\rangle$ 为原子波包的波函数; 在忽略原子间相互作用的条件下, 在引力惯性场 (gravito-inertial field) 和 / 或电磁场作用下的原子的经典哈密顿量为^[9]

$$H = \frac{1}{2M} \mathbf{p}_T \boldsymbol{\beta}(t) \mathbf{p} - \boldsymbol{\Omega}_T(t) \mathbf{L} - M \mathbf{g}_T(t) \mathbf{q} - \frac{M}{2} \mathbf{q}_T \boldsymbol{\gamma}(t) \cdot \mathbf{q} + V(t), \quad (2)$$

其中 $\boldsymbol{\beta}(t), \boldsymbol{\gamma}(t)$ 分别为引力波和重力梯度张量, $\boldsymbol{\Omega}_T(t)$ 为地球旋转的角速度矢量, $\mathbf{g}_T(t)$ 为重力矢量, 以上四个量代表着整个引力惯性场; $\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{L}$ 分别为原子的位置、动量和角动量矢量; 下标“T”表示转置。 M 为原子的质量, $V(t)$ 代表其它一些可能存在的外场。哈密顿函数 H 中的最高次项是 \mathbf{p} 和 \mathbf{q} 的两次项, 也是 \mathbf{p}' 和 \mathbf{q}' 的两次项。 \mathbf{p} 和 \mathbf{p}' 分别表示原子所处的两个不同位置。下面我们引入分析力学中的作用量 $S_{cl}[\mathbf{q}(t)]$, 它依赖于粒子所走的轨道 $\mathbf{q}(t)$, 即它是 $\mathbf{q}(t)$ 的函数。经典作用量 S_{cl} 为

$$S_{cl}(\mathbf{q}, t, \mathbf{q}', t') = a + \mathbf{b}_T \mathbf{q} + \mathbf{c}_T \mathbf{q}' + \frac{M}{2} [\mathbf{q}_T \mathbf{D} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{q} - 2 \mathbf{q}_T \mathbf{B}_T^{-1} \mathbf{q}' + \mathbf{q}'_T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{q}'], \quad (3)$$

其中 $a, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 为系数, a 为标量, \mathbf{b}, \mathbf{c} 为矢量, 它们右下角的字母“T”表示转置。 $\mathbf{B}_T^{-1} = \mathbf{D} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} - \mathbf{C}, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ 均为 3×3 阶分块矩阵, 其具体形式将由下面给出。对(3)式求梯度, 得

$$\mathbf{p} = \nabla_{\mathbf{q}} S_{cl} = \mathbf{b} + M \mathbf{D} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{q} - \mathbf{B}_T^{-1} \mathbf{q}', \quad (4a)$$

$$-\mathbf{p}' = \nabla_{\mathbf{q}'} S_{cl} = \mathbf{c} - M \mathbf{B}^{-1} \mathbf{q} + \mathbf{A} \mathbf{B}_T^{-1} \mathbf{A} \mathbf{q}', \quad (4b)$$

可把它们写成下列矩阵的形式, 结果为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}/t_1 \\ \mathbf{C} t_1 & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \sigma_0 \cosh[(n^{-1} \boldsymbol{\gamma})^{1/2} (t - t')] + \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{u} \sinh[(n^{-1} \boldsymbol{\gamma})^{1/2} (t - t')], \quad (12)$$

其中 $\hat{u} = [(\mathbf{n}^{-1/2} \boldsymbol{\gamma}^{-1/2}/t_1 + \boldsymbol{\gamma}^{1/2} \mathbf{n}^{1/2} t_1)/2, i(\mathbf{n}^{-1/2} \boldsymbol{\gamma}^{-1/2}/t_1 - \boldsymbol{\gamma}^{1/2} \mathbf{n}^{1/2} t_1)/2, 0]$, 它满足 $\hat{u}^2 = \mathbf{I}, \mathbf{I}$ 和 σ_0 分别是 (3×3) 和 (2×2) 的单位矩阵; $\boldsymbol{\sigma}$ 为泡利矩阵; t_1 是一个无量纲的任意常数。(5) 式可以转化为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \mathbf{n} \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}' \\ \mathbf{v}' \end{bmatrix}, \quad (13)$$

其中 $\mathbf{v} = \mathbf{p}/M, \mathbf{v}' = \mathbf{p}'/M$ 为原子波包的中心速度, \mathbf{q} 和 \mathbf{q}' 为中心位置。从以上表述, 可写出作用量的表达式:

$$S_{cl}(\mathbf{q}, \mathbf{q}', t') = M \boldsymbol{\xi}_T \mathbf{n} (\mathbf{q} - \boldsymbol{\xi}) + \int_{t'}^t L(t_1) dt_1 - \int V dt + \frac{M}{2} [(\mathbf{q}_T - \boldsymbol{\xi}_T) \mathbf{D} \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{q} - \boldsymbol{\xi}) - 2(\mathbf{q}_T - \boldsymbol{\xi}_T) \mathbf{B}_T^{-1} \mathbf{q}' + \mathbf{q}'_T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{q}'], \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p}/M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \mathbf{c}/M \\ (\mathbf{b} + \mathbf{D} \mathbf{c})/M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}' \\ \mathbf{p}'/M \end{bmatrix}. \quad (5)$$

由哈密顿-雅可比方程

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(\mathbf{q}, \nabla_{\mathbf{q}} S, t) = 0, \quad (6)$$

可得

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{a}} + \frac{1}{2M} \mathbf{b}_T \mathbf{n}^{-1} \mathbf{b} + V &= 0, \\ \dot{\mathbf{b}} + \mathbf{D} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{n}^{-1} \mathbf{b} - M \mathbf{g} + i(\mathbf{J} \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{b} &= 0, \\ \dot{\mathbf{c}} - \mathbf{B}^{-1} \mathbf{n}^{-1} \mathbf{b} &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{n}^{-1} \\ \boldsymbol{\gamma} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

其中 $\mathbf{n}^{-1}, \boldsymbol{\gamma}$ 和 $\boldsymbol{\Omega}$ 分别是张量 $\boldsymbol{\beta}(t), \boldsymbol{\gamma}(t)$ 及矢量 $\boldsymbol{\Omega}(t)$ 所对应的矩阵, \mathbf{J} 是旋转矩阵, $\dot{\mathbf{a}}, \dot{\mathbf{b}}, \dot{\mathbf{c}}$ 表示对时间的一次求导, 以下同。

然后通过坐标变换消去哈密顿量中的 $\boldsymbol{\Omega}$ 因子, 求出(7)式中的系数 $a, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 为:

$$\begin{aligned} a &= -M \boldsymbol{\xi}_T \mathbf{n} \boldsymbol{\xi} + \frac{M}{2} \boldsymbol{\xi}_T \mathbf{D} \mathbf{B}^{-1} \boldsymbol{\xi} + \\ &\quad \frac{M}{2} \int_{t'}^t (\boldsymbol{\xi}_T \mathbf{n} \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\xi}_T \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{\xi}_T + 2 \mathbf{g}_T \boldsymbol{\xi}) dt_1 - \int V dt_1, \\ \mathbf{b} &= M(\mathbf{n} \boldsymbol{\xi} - \mathbf{D} \mathbf{B}^{-1} \boldsymbol{\xi}), \\ \mathbf{c} &= M \mathbf{B}^{-1} \boldsymbol{\xi}, \end{aligned} \quad (9)$$

其中 $\boldsymbol{\xi}$ 满足以下方程:

$$\boldsymbol{\xi} + \mathbf{n}^{-1} \mathbf{n} \boldsymbol{\xi} - \mathbf{n}^{-1} \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{\xi} - \mathbf{n}^{-1} \mathbf{g} = 0, \quad (10)$$

在 $\mathbf{n}^{-1}, \boldsymbol{\gamma}$ 和 \mathbf{g} 都不含时间的情况下, 可解得

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\gamma}^{-1} \{1 - \cosh[(\boldsymbol{\gamma} \mathbf{n}^{-1})^{1/2} (t - t')]\} \mathbf{g}. \quad (11)$$

当 \mathbf{n}^{-1} 和 $\boldsymbol{\gamma}$ 可对易 (互相交换位置) 时, 可对(8)式进行积分, 在 \mathbf{n}^{-1} 和 $\boldsymbol{\gamma}$ 都不含时间的情况下, 可得

其中 $L = M(\xi_T n \xi + \xi_T \gamma \xi + 2g_T \xi)/2$, 为部分拉格朗日值。另外由(12)式得矩阵元($T = t - t'$)为

$$\begin{cases} \mathbf{A} = \cosh(\sqrt{\gamma}T), & \mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\sinh(\sqrt{\gamma}T), \\ \mathbf{C} = \sqrt{\gamma}\sinh(\sqrt{\gamma}T), & \mathbf{D} = \cosh(\sqrt{\gamma}T). \end{cases} \quad (15)$$

其中 n^{-1} 已省略, 因为在不考虑引力波的情况下, n 为单位矩阵。上面均在三维情况下讨论, 矩阵元 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 、 \mathbf{C} 、 \mathbf{D} 中的 γ 为 3×3 阶矩阵。

对于一维情况, 矩阵元 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 、 \mathbf{C} 、 \mathbf{D} 中的 γ 将为标量。(13)式所表示的矩阵传输公式也简化为

$$\begin{bmatrix} q \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q' \\ v' \end{bmatrix}, \quad (16)$$

其中 A 、 B 、 C 、 D 均为标量, 具体形式由(15)式给出(把其中的矩阵改为标量)。为了提高原子干涉仪的测量精度, 往往需要在两个 $\pi/2$ 脉冲之间多加几个 π 脉冲, 或者以多个脉宽更短、等间隔的 $\pi/2$ 脉冲来代替一个 $\pi/2$ 脉冲^[10]。这样必定会遇到多个矩阵相乘的复杂情况。由于(16)式带有一个附加项, 不能直接连乘, 可将(16)式改写为下列阶矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} q \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & \xi \\ C & D & \dot{\xi} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q' \\ v' \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (17)$$

其中 ξ 、 $\dot{\xi}$ 由(11)式给出(标量形式), ξ 、 $\dot{\xi}$ 分别表示由重力引起的原子的附加位移和附加速度。(17)式的计算结果与(16)式完成相同, 但可直接用于矩阵的连乘, 因而简化了运算。(17)式中给出了原子束在重力的影响下在自由空间中的传输矩阵。

光脉冲与原子束相互作用时, 原子吸收光子后速度要改变 $\pm \hbar k/M$, 其中 \hbar 是普朗克常量, k 是光的波矢, M 是原子的质量。±号取决于原子的速度变大或变小。因此光脉冲的矩阵为

$$\begin{bmatrix} q \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \pm \hbar k/M \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q' \\ v' \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (18)$$

需要指出的是, 只有发生跃迁的那部分原子在传输过程中要使用(18)式, 不发生跃迁的那部分原子则不需使用(18)式。

3 原子干涉仪中的相位差

本节我们用(17)式、(18)式所定义的矩阵来分析原子干涉仪中的相位差。考虑一个二能级原子, 能级图如图 1 所示。

其中 $|1\rangle$ 态和 $|3\rangle$ 态分别对应于原子基态超精

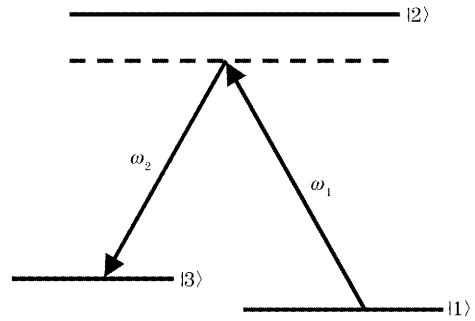


图 1 双光子受激拉曼跃迁图

Fig. 1 Diagram of simultaneous two-photon Raman transition
 细结构两个子能级态, $|2\rangle$ 态对应于激发态。 ω_1 和 ω_2 分别是拉曼脉冲的两个频率, 他们之间非常接近。当第一个 $\pi/2$ 脉冲与原子作用时, 将初始处于 $|1\rangle$ 态的原子分为数目相等的两部分 $|1\rangle$ 态和 $|3\rangle$ 态。处于 $|3\rangle$ 态的原子由于接收了一个 $\hbar k_g$ 的动量而加速, 其中 $k_g = k_1 - k_2$, 而 k_1, k_2 是光的波矢, 分别对应于图 1 中的 ω_1 和 ω_2 。由于原子动量扩散, 原子的运动速度不再在竖直方向, 而吸收的光子速度是竖直方向的, 处于 $|3\rangle$ 态的原子波包将会保持其特性而与 $|1\rangle$ 态的原子分开。两束原子经过自由空间传播后, 分别与第二束光脉冲(π 脉冲)作用, 结果使原子的能态发生反转, 即 $|3\rangle$ 态的原子通过受激辐射而跃迁到 $|1\rangle$ 态, 并获得一个 $-\hbar k_g$ 的动量而减速; 而 $|1\rangle$ 态的原子通过受激吸收而跃迁到 $|3\rangle$ 态, 并获得一个 $\hbar k_g$ 的动量而加速, 从而在空间上实现了原子束的偏转。被偏转的原子束再一次在自由空间中传输, 经过一个脉冲间隔后, 两个 $|1\rangle$ 和 $|3\rangle$ 态的波包同时与第三束光脉冲($\pi/2$ 脉冲)作用, 结果再一次发生相干分裂, 使得在空间两两对应重叠, 因而产生干涉效应。如图 2 所示。

在原子干涉仪中, 事先用磁光俘获法在真空室

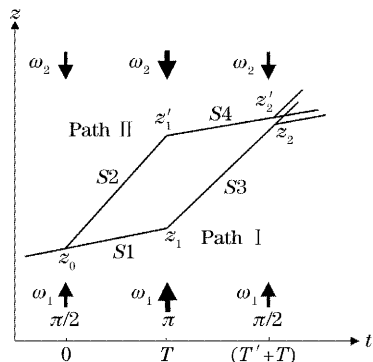


图 2 三脉冲原子重力仪原理示意图

Fig. 2 Space-time configuration of a three-pulse atom gravimeter

中冷却原子,形成冷原子团。将这个原子团垂直向上喷,并在这个过程中与三束相互时间间隔为 T 和 T' 的拉曼脉冲相互作用后,会相互交换动量 $\pm \hbar k/M$ 。把作用点的坐标和相应的速度标在原子干涉仪的两

条经典轨迹上,各原子初始位置为 z_0 ,原子受到 $\pi/2$ 脉冲后,分为两束,在路径 I 上的原子速度仍为 v_0 ,而在路径 II 上的原子速度为 $v' = v_0 + \hbar k/M$ 。则(z 即为上文中的 q)

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ v_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \hbar k/M \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(T) & B(T) & \xi(T) \\ C(T) & D(T) & \dot{\xi}(T) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_0 \\ v_0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (19)$$

$$\begin{bmatrix} z_2 \\ v_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\hbar k/M \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(T') & B(T') & \xi(T') \\ C(T') & D(T') & \dot{\xi}(T') \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ v_1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (20)$$

$$\begin{bmatrix} z'_1 \\ v'_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(T) & B(T) & \xi(T) \\ C(T) & D(T) & \dot{\xi}(T) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \hbar k/M \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_0 \\ v_0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (21)$$

$$\begin{bmatrix} z'_2 \\ v'_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(T') & B(T') & \xi(T') \\ C(T') & D(T') & \dot{\xi}(T') \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\hbar k/M \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z'_1 \\ v'_1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (22)$$

由上述矩阵,可以很快解得 z_1, z_2, z'_1 和 z'_2 。由(14)式(标量形式)可求得

$$\Delta S = S_1 + S_3 - S_2 - S_4 = \frac{\hbar k}{\sqrt{\gamma}} \{2 \sinh(\sqrt{\gamma} T') - \sinh[\sqrt{\gamma}(T + T')]\} \times \left\{ \left(v_0 + \frac{\hbar k}{2M} \right) \cosh[\sqrt{\gamma}(T + T')] + \sqrt{\gamma} \left(z_0 - \frac{g}{\gamma} \right) \sinh[\sqrt{\gamma}(T + T')] \right\}, \quad (23)$$

S_1 和 S_3 在路径 I 上, S_2 和 S_4 在路径 II 上,如图 2 所示。也可写成

$$\Delta S = [(z_2 - z'_2)/2](Mv_2 + \hbar k + Mv'_2). \quad (24)$$

所以原子束与最后一束拉曼激光作用后,会产生一个余项: $\pm k[(z_2 - z'_2)/2]$,把这个余项加上激光束的相位,可得到两路原子的相位差:

$$\begin{aligned} \delta\varphi = & -k(z_2 - z_1 - z'_1 + z_0) + k(z_2 - z'_2)/2 = -k[(z_2 + z'_2)/2 - (z_1 + z'_1) + z_0] = \\ & -\frac{k}{\sqrt{\gamma}} \left\{ \sinh[\sqrt{\gamma}(T + T')] - 2 \sinh(\sqrt{\gamma} T) \right\} (v_0 + \hbar k/2M) + \\ & \sqrt{\gamma} \{1 + \cosh[\sqrt{\gamma}(T + T')] - 2 \cosh(\sqrt{\gamma} T)\} (z_0 - g/\gamma), \end{aligned} \quad (25)$$

取 γ 的一阶展开式,并在 $T' = T$ 的情况下,(25)式可以简化为

$$\delta\varphi = kgT^2 + k\gamma T^2 \left[\frac{7}{12} gT^2 - \left(v_0 + \frac{\hbar k}{2M} \right) T - z_0 \right]. \quad (26)$$

此结果与朱棣文等^[3]所得到的完全相符,也和 Wolf 等^[8]对经典轨迹进行拉格朗日积分所得出的结果一致。

对于更为复杂的原子干涉仪,同样可以用上述方法加以分析。如图 3 所示,是一个五脉冲式原子干涉仪^[10]。

如前所述,这种干涉仪具有更高的灵敏度。利用同样的方法,可以列出两条路径上的各个传输不等式,如下所示:

$$\begin{bmatrix} z_3 \\ v_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \hbar k/M \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(T') & B(T') & \xi(T') \\ C(T') & D(T') & \dot{\xi}(T') \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_2 \\ v_2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (27)$$

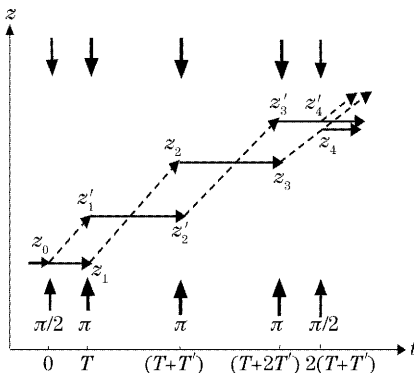


图 3 五脉冲原子重力仪原理示意图
Fig. 3 Space-time configuration of a five-pulse atom gravimeter

$$\begin{bmatrix} z_4 \\ v_4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\hbar k/M \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(T) & B(T) & \xi(T) \\ C(T) & D(T) & \dot{\xi}(T) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_3 \\ v_3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (28)$$

其中 z_2 的表达式与前面的(20)式是一样的,且(20)式中出现的 z_1 用(19)式来表示,同样可以列出另外一条路径的传输等式,如下所示:

$$\begin{bmatrix} z'_3 \\ v'_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(T') & B(T') & \xi(T') \\ C(T') & D(T') & \dot{\xi}(T') \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \hbar k/M \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z'_2 \\ v'_2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (29)$$

$$\begin{bmatrix} z'_4 \\ v'_4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(T) & B(T) & \xi(T) \\ C(T) & D(T) & \dot{\xi}(T) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\hbar k/M \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z'_3 \\ v'_3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (30)$$

其中 z'_2 的表达式与前面的(22)式是一样的,且(20)式中出现的 z'_1 用(21)式来表示,由上面四个式子可以看出,对于多脉冲原子干涉仪,我们所要做的只是多乘几个矩阵,而矩阵的相乘是很容易计算的。这正是 3×3 阶矩阵方法的优越性。经过矩阵的运算,最后可以得到原子的相位差为

$$\begin{aligned} \delta\varphi = & -k[(z_4 + z'_4)/2 - z_3 - z'_3 + z_2 + z'_2 - z_1 - z'_1 + z_0] = \\ & \frac{k}{M\gamma} [1 - 2\cosh(T'\sqrt{\gamma}) + \cosh(T + T')\sqrt{\gamma}] \times \\ & \{2M(g - z_0\gamma)\cosh[(T + T')\sqrt{\gamma}] - \sqrt{\gamma}(\hbar k + 2Mv_0)\sinh[(T + T')\sqrt{\gamma}]\}. \end{aligned} \quad (31)$$

取 γ 的一阶展开式,并在 $T' = 2T$ 的情况下,(31)式可以简化为

$$\delta\varphi = 7kgT^2 + k\gamma T^2 \left[\frac{457}{12}gT^2 - 7\left(v_0 + \frac{\hbar k}{2M}\right)T - 7z_0 \right], \quad (32)$$

(32)式就是五脉冲的原子干涉仪在 $T' = 2T$ 的情况下的相位差。若取 $T' = T$ 的情况,可以得出的相位差为

$$\delta\varphi' = 2kgT^2 + k\gamma T^2 \left[\frac{31}{6}gT^2 - \left(2v_0 + \frac{\hbar k}{M}\right)T - 2z_0 \right]. \quad (33)$$

从(33)式可以看出与三脉冲的原子干涉仪的相位差(26)式相比,五脉冲的相位差更大,说明五脉冲的原子干涉仪灵敏度更高。

4 结 论

原子干涉仪的用途日趋广泛,其精度和灵敏度越来越高,实验系统也越来越复杂。这就需要新的、简便的理论方法来分析。本文引进的 3×3 阶矩阵方法可以方便地用来求解原子光学中的一些问题,尤其对处理多个脉冲的原子干涉仪将更能显示出它的简便。此方法除了可以用于本文所分析的原子干涉仪外,还可用于原子钟、陀螺仪等。本文所分析的是二能级的原子,但可以推广到多能级的原子干涉仪。

参 考 文 献

- 1 R. M. Godun, M. B. D'Arcy, G. S. Summy *et al.*. Prospects for atom interferometry[J]. *Contemporary Physics*, 2001, **42**(2): 77~95
- 2 P. R. Berman. *Atom Interferometry* [M]. San Diego: Academic Press, 1997. 1~487
- 3 O. Carnal, J. Mlynek. Young's double-slit experiment with atoms: A simple atom interferometer[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1991, **66**(21): 2689~2692
- 4 Ch J. Borde. Atomic interferometry with internal state labelling [J]. *Phys. Lett. (A)*, 1989, **140**(1): 10~12
- 5 Xu Xinye, Wang Yuzhu. Theoretical analyses of a Doppler-type atomic interferometer[J]. *Acta Physica Sinica*, 1997, **46**(6): 1062~1072 (in Chinese)
- 徐信业,王育竹. 多普勒型原子干涉仪的理论探讨[J]. *物理学报*, 1997, **46**(6): 1062~1072
- 6 Guo Hong, Peng Jinsheng. Influence of atomic coherence on Rydberg-atom stabilization [J]. *Acta Optica Sinica*, 2001, **21**(4): 410~413 (in Chinese)
- 郭红,彭金生. 原子相干对里德堡原子稳定性的影响[J]. *光学学报*, 2001, **21**(4): 410~413
- 7 A. Peters, K. Y. Chung, S. Chu. Measurement of gravitational acceleration by dropping atoms[J]. *Nature*, 1999, **400**(6747): 849~852
- 8 P. Wolf, Ph Tournenc. Gravimetry using atom interferometers; some systematic effects[J]. *Phys. Lett. (A)*, 1999, **251**(4): 241~246
- 9 Ch J. Borde. Theoretical tools for atom optics and interferometry [J]. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 2001, **2**(4): 509~530
- 10 J. M. McGuirk, G. T. Foster, J. B. Fixler *et al.*. Sensitive absolute-gravity gradiometry using atom interferometry [J]. *Phys. Rev. (A)*, 2002, **65**(3): 033608