

文章编号: 0253-2239(2005)06-781-5

希尔伯特变换条纹分析法及其在非球面镜测量上的应用*

吕捷^{1,2} 王鸣¹ 宦海¹ 张斌³

{ 1 南京师范大学物理科学与技术学院, 南京 210097
2 南京财经大学信息工程学院, 南京 210003
3 南昌大学机电工程学院, 南昌 330029 }

摘要: 提出了利用离散的希尔伯特变换法解调干涉条纹相位的方法,叙述了希尔伯特变换法解调相位的原理,并从单一的干涉图样中提取出条纹信号的正弦和余弦部分,正弦与余弦比值的反正切即为干涉相位;然后利用泽尼克多项式拟合,实现波前重建;最后讨论了条纹相位的算法,误差修正和测量面形的应用,从而实现对非球面镜的检测。实验表明,该方法可获得均方根(RMS)的精度为 $\lambda/10$ 。

关键词: 光学测量;干涉法;条纹分析;希尔伯特变换;非球面;离散信号处理
中图分类号: O436 文献标识码: A

Fringe Analysis with Hilbert Transform and Its Application in the Measurement of Aspheric Mirror

Lü Jie^{1,2} Wang Ming¹ Huan Hai¹ Zhang Bin³

{ 1 Department of Physics, Nanjing Normal University, Nanjing 210097
2 School of Information Engineering, Nanjing Economical University, Nanjing 210003
3 Department of Machine and Electricity, Nanchang University, Nanchang 330029 }

Abstract: A method for interferometric phase's demodulation with a discrete Hilbert transform is proposed. A Hilbert transform demodulated phase principle is represented and the phase information of aspheric surface is evaluated only one interferogram. The sine and cosine components are calculated from a single interference signal. Then wavefront reconstruction is achieved using Zernike polynomial fitting. In addition, the phase-extraction algorithm, error correction and some applications to the measurement of the surface shape are discussed. On-line measurements to aspheric surface are realized. Several experiments showed the accuracy of the measurement to be $\lambda/10$ (RMS).

Key words: optical measurement; interferometry; fringe analysis; Hilbert transform; aspheric surface; discrete signal processing

1 引言

利用光学方法进行三维物体的面形测量已经广泛应用于各种不同的领域。现代高精度的光学干涉测量法是把干涉条纹细分后按相位计算,再从相位中提取面形信息,其采用的方法主要包括:外差干涉法^[1]、相位步进法^[2]和傅里叶变换法^[3]等。

希尔伯特变换法在时间域的信号处理中已经得

到广泛地应用。Hiroto Watanabe等提出了利用一维离散的希尔伯特变换进行干涉相位的调制^[4,5],使干涉信号的相位变化 $\pi/2$ 。在数字信号处理技术的基础上,利用一维离散希尔伯特变换和一维的高通滤波可以从单一的干涉图中获得干涉条纹的相位分布。

非球面镜的一个重要应用是照相机的镜头,它的优点在于有效地提高光学系统的成像质量,同时

* 江苏省光电技术重点实验室开放基金(KJS01040)和江西省科委科技攻关项目(200110201500)资助课题。

作者简介:吕捷(1972~),女,江西人,讲师,硕士,主要从事激光技术与计算机应用的研究。E-mail: lvjie219@163.com

收稿日期:2004-01-17;收到修改稿日期:2004-08-30

减少光学系统的重量,提高稳定性,降低成本。非球面镜的加工已逐渐成熟,但对非球面镜的检测还存在问题。本文提出了一种在空间域内,利用离散的希尔伯特变换法解调干涉条纹相位的方法,即从单一的干涉图样中提取出非球面镜产生的条纹信号的正弦和余弦部分,正弦与余弦比值的反正切即为干涉相位,然后再由泽尼克(Zernike)多项式^[6~8]拟合非球面表面信息,从而实现对非球面镜的检验。

2 原 理

2.1 希尔伯特变换原理

函数 $f(t)$ 的希尔伯特变换可以这样定义

$$F_{\text{Hi}} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t') dt'}{t' - t},$$

它可以看作 $f(t)$ 和 $1/\pi t$ 的卷积,即:

$$F_{\text{Hi}} = \frac{-1}{\pi t} * f(t), \quad (1)$$

其中 $*$ 表示为卷积。对(1)式进行傅里叶变换,可得到 $F_{\text{Hi}}(t)$ 的频谱为

$$\mathcal{F}[F_{\text{Hi}}(t)] = [j \operatorname{sgn}(\omega)] \cdot \mathcal{F}[f(t)], \quad (2)$$

其中 ω 为角频率, $\operatorname{sgn}(\omega)$ 为一个符号函数。

假设干涉信号 $f(t)$ 为 $f(t) = A + B\cos(\omega_0 t)$, 根据(1)式和(2)式可以得到干涉信号 $f(t)$ 的希尔伯特变换为

$$\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}[F_{\text{Hi}}(t)]\} = -B\sin(\omega_0 t), \quad (3)$$

(3)式表明希尔伯特变换使干涉信号的相位偏移了 $\pi/2$, 并且滤去了直流偏移成分。图1给出了用Matlab软件模拟的图像,其中实线表示 $f(t) = 2 + 5\cos(2\pi \times 60 \times t)$ 图像,虚线表示经过希尔伯特变换后的图像。

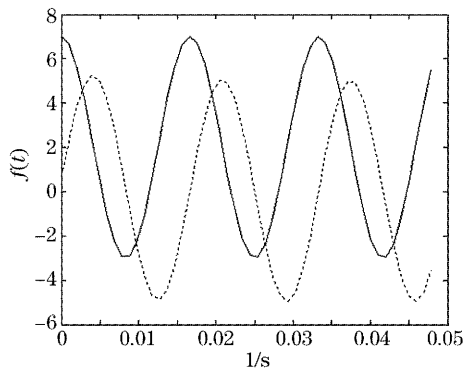


图1 $f(t)$ 函数的希尔伯特变换前后的图像

Fig. 1 A portion of data (solid line) function $f(t)$ and its Hilbert transform (dotted line)

2.2 希尔伯特变换用于离散的信号处理

考虑一个稳定的冲激响应为 $h[n]$ 的线性时不变系统。令 $x[n]$ 为一个实值序列(即干涉信号),那么在取样周期 T 内,该线性系统输出与输入过程可以用如下线性变换式联系起来:

$$s[n] = \sum_{k=(N-1)/2}^{-(N-1)/2} h_k \cdot x[n-k],$$

其中 h_k 为采样脉冲,即为希尔伯特变换的系数; N 为计算所用的数据点的个数; n 为计算 $s[n]$ 分布状态时在所有数据点中移动时的值。 $s[n]$ 为 $x[n]$ 的采样间隔为 k 时的采样波形。由频谱卷积定理可以得出采样波形的傅里叶变换为

$$S(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega),$$

其中 $S(\omega)$ 和 $X(\omega)$ 分别表示希尔伯特变换信号和干涉信号的频谱, $H(\omega)$ 为传递函数,可以写为

$$H(\omega) = \sum_{k=(N-1)/2}^{-(N-1)/2} h_k \cdot \exp(-jk\omega T), \quad (4)$$

根据(4)式,可以把希尔伯特变换的系数 h_k 写为

$$h_k = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} H(\omega) \cdot \exp(-jk\omega T) d\omega, \quad (5)$$

为了实现离散的希尔伯特变换,现在可以通过(5)式得到变换系数 h_k 。通过上面的分析,可以认为传递函数 $H(\omega)$ 为 $j \operatorname{sgn}(\omega)$, 那么把 $j \operatorname{sgn}(\omega)$ 代入(5)式中,可得

$$h_k = \frac{T}{2\pi} \left[\int_{-\pi/T}^0 -j \cdot \exp(-jk\omega T) d\omega + \int_0^{\pi/T} j \cdot \exp(-jk\omega T) d\omega \right] = \begin{cases} 0, & k \text{ 为奇数} \\ -\frac{2}{k\pi}, & k \text{ 为偶数} \end{cases} \quad -\infty < k < \infty, \quad (6)$$

需要注意的是,采样间隔 T 不能选的太大,否则会导致采样波形在傅里叶变换后会产生混叠效应,因此采样频率必须满足等于或高于尼奎斯特采样频率。

2.3 离散的高通滤波

下面采用离散的高通滤波方法移去直流偏流成分抽取余弦成分。离散高通滤波的处理过程与离散希尔伯特变换方法相同,仅仅是系数不同。把通过高通滤波器的信号 $c[n]$ 记为

$$c[n] = \sum_{k=(N-1)/2}^{-(N-1)/2} p_k \cdot x[n-k],$$

其中 p_k 为离散高通滤波系数。与(4)式同理,可以得到

$$P(\omega) = \sum_{k=(N-1)/2}^{-(N-1)/2} p_k \cdot \exp(-jk\omega T), \quad (7)$$

最后可以从测得的 $s[n]$ 和 $c[n]$ 得到干涉相位, 即

$$\varphi = \arctan(-s[n]/c[n]). \quad (8)$$

3 数据分析和模拟

调制的条纹图像光强表达式为

$$I(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos[\varphi(x, y) + \varphi_r(x, y)],$$

式中 $a(x, y)$ 为背景光强, $b(x, y)$ 为振幅, $\varphi(x, y)$ 为所求相位信息, φ_r 是光载频引入的辅助相位。当载频条纹沿 y 方向有最简形式 $\varphi_r(x, y) = 2\pi fx$ 时, 式中 f 为光载频条纹在 x 方向的空间频率, 由条纹光强频谱分析可知, $a(x, y)$, $b(x, y)$ 和 $\varphi(x, y)$ 的空间变化率比空间频率 f 变化率小得多。因此, 在采样周期 T_j 内, 背景光强、振幅和相位可看成不变, 即 $a(x, y) = a_j$, $b(x, y) = b_j$, $\varphi(x, y) = \varphi_j$, 则对应一个周期 T_j 内的干涉条纹强度分布可以写为

$$I_j = a_j + b_j \cos[2\pi fx + \varphi_j], \quad (9)$$

所以以纯载频条纹信号作基准, 测量被面形调制后的条纹信号, 就可算出被测面形的相位分布。

为验证算法, 下面用计算机来模拟相位的抽取。设纯载频条纹信号为余弦形式, 其强度分布函数为

$$I(x) = 20 + 20 \cos(2\pi \times 120 \times x/512),$$

附加相位为

$$\varphi_j(x) = x(x-125)(x-250)(x-500) \times 10^{-8},$$

则对应一个周期 T_j 内的干涉条纹强度分布可写为

$$I_j(x) = 20 + 20 \cos[2\pi \times 120 \times x/512 + \varphi_j(x)].$$

采用上述方法对调制后的信号进行处理。第一步对调制信号作希尔伯特变换; 第二步对调制信号作高

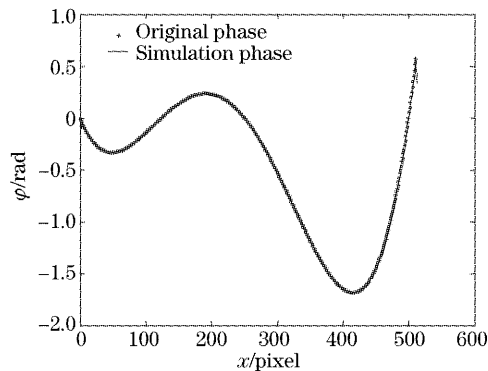


图2 附加相位原图与对调制条纹处理后得到的附加相位图

Fig. 2 Comparison between the simulation phase and the original phase

通滤波; 第三步利用(8)式计算相位; 第四步相位展开; 第五步把载频条纹信号的相位分布和调制后的条纹信号比较, 从而得到附加相位。图2中虚线表示原有的附加相位波形图, 实线表示对调制后的条纹图按上述方法处理后得到的附加相位波形图。解调得到的附加相位与标准相位的误差在 $9.4932 \times 10^{-3} \sim 1.6469 \times 10^{-6}$ rad 之间, 其误差均方根为 5.234×10^{-3} rad。

4 误差分析和修正

4.1 截断误差

在上面的描述中, 我们是假设一个有限带宽信号的希尔伯特变换样本, 因而处理采样波形的无穷多个样本值的方法是进行截断, 使之仅有有限的样本点 (N 点)。虽然截断的傅里叶级数就其误差平方积分最小而言属于最优, 但它往往在频率响应 $G^*(\omega)$ 呈现陡变的各点附近有过的波纹, 因此我们采用加宽滤波带来减小波纹。一种良好且易于采用的窗就是汉明窗 (Hamming Window)。我们用修正的系数 h_{km} 来代替(6)式中的系数 h_k :

$$h_{km} = \frac{1}{2} \left[1.08 + 0.92 \cdot \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \right] \cdot h_k, \quad (10)$$

同样我们采用汉宁窗 (Hanning Window) 对离散高通滤波系数 p_k 进行修正, 即

$$p_{km} = \frac{1}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \right] \cdot p_k. \quad (11)$$

4.2 频漂误差

在离散情况下, 条纹数据的取样和离散傅里叶变换都是通过快速傅里叶变换方法获得, 因此采样频率依赖于空间频率, 但不可能始终等于空间频率 f , 所以频漂也会引起误差。

通常采样频率 n/N 为尼奎斯特基频的 $1/N$ 的整数倍, 而条纹信号的空间频率 f 不等于采样频率, 因此可以把频率 f 写为

$$f = (n_f + \Delta n)/N,$$

其中 n_f 为整数, 且近似为 n , $-1/2 < \Delta n < 1/2$ 。把该式代入光强表达式(9)得到

$$I_j = a_j + b_j \cos[2\pi(n_f + \Delta n)x + \varphi_j], \quad (12)$$

希尔伯特变换器的单位抽样响应为 $h(n)$, 离散时间信号的希尔伯特变换是

$$I_j(n) = I_j(n) * h(n) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{I(n-2k-1)}{2k-1},$$

离散时间信号的傅里叶变换可以写为

$$H\left(\frac{n}{NT}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} h(kT) \exp(-2\pi i kn) / N,$$

则频率漂移 Δn 产生的相位误差 $\Delta\phi$ 为:

$$\Delta\phi = \arctan \frac{\sin(\pi\Delta n + \phi_j) \cdot \sin(\pi\Delta n)}{\cos(\pi\Delta n + \phi_j) \cdot \sin(\pi\Delta n)} - \arctan \frac{\sin(\phi_j)}{\cos(\phi_j)} = \pi\Delta n, \quad (13)$$

当 $\Delta n = 0.05$ 时,产生最大相位误差为 $\pi/20$ 。

5 实验与结果

希尔伯特变换条纹分析法的实验装置如 3 所示。其中干涉图由双波带板发生剪切干涉产生, CCD 摄像机摄取条纹图像信号,由微机和图像采集

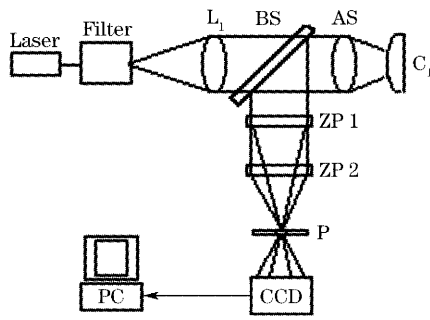


图 3 检测非球面镜光路图

Fig. 3 Optical setup to measure aspheric surface

卡组成图像系统处理图像信号。用希尔伯特变换分析法,算出条纹相位。

作为测量实例,我们用希尔伯特变换法,测量了一个非球面镜的面形。图 4 是一个非球面镜的光载频调制信号的干涉条纹图。首先对干涉图像进行中值滤波,图 5(a)是干涉条纹图中的一行图像,图 5(b)是该行条纹图经过希尔伯特变换后的图像,图 5(c)是该行条纹经过高通滤波后得到的图像,图 5(d)该行条纹相位解调和去包裹后获得相位分布图,图 5(e)该行条纹所在非球面表面的线形。再利用逐行扫描方法,得到非球面镜表面的相位分布图,然后经过波面拟合得到被测面形分布。

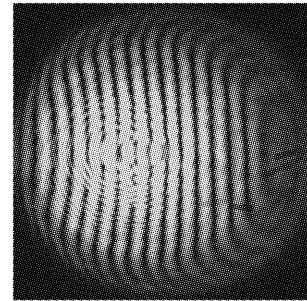


图 4 非球面镜的光载频调制干涉条纹图

Fig. 4 Optical carrier and modulated. Interference fringe pattern of aspheric surface

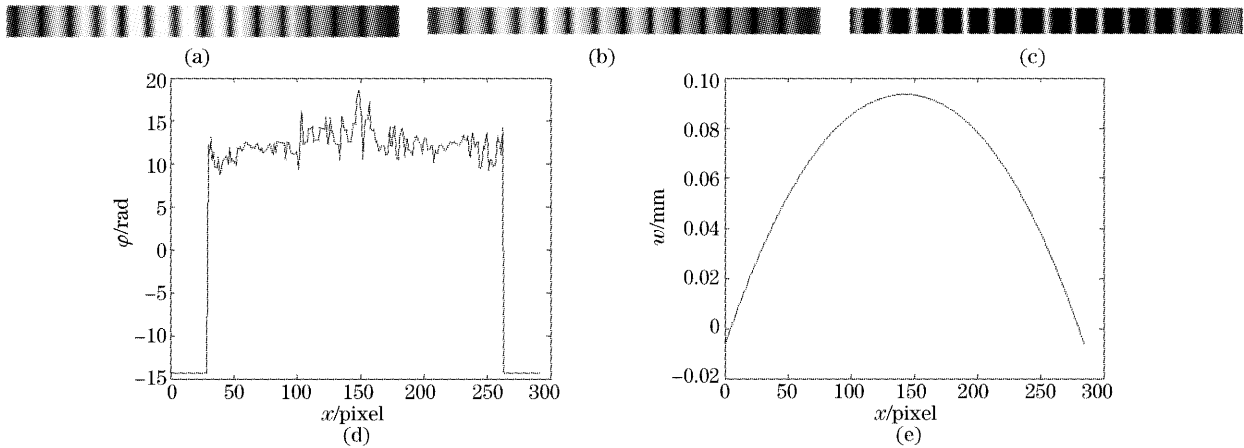


图 5 (a)一行干涉条纹图,(b)希尔伯特变换后的条纹图,(c)高通滤波后的条纹图, (d)非球面镜表面的波面相位分布图,(e)表面的面形图

Fig. 5 (a) One fringe of interference fringes pattern, (b) fringe pattern of Hilbert transform, (c) fringe pattern of high-pass filtering, (d) phase distribution of the fringe corresponding aspheric surface, (e) profile of the fringe corresponding aspheric surface

由于我们采用的是径向剪切干涉方法,所以由干涉特征分析获得的干涉相位不是待测相位,只是待测相位差分,须基于获得的干涉相位作相位重建才能得到待测波前,因此我们采用泽尼克多项式拟合,实现波前重建。图 6(a)和图 6(b)分别给出了被

测物体非球面镜表面的波面相位分布图和非球面镜表面的面形图。

待测镜面为塑料非球面镜,它的标准方程为

$$z = \frac{cr^2}{1 + \sqrt{1 - (1+k)c^2r^2}},$$

其中 $k = CC = -0.6$, C 为锥度, $C = 1/R$, 非球面镜的曲率半径 $R = 51.6398$ mm, 非球面镜的直径为 19.6 mm, $r^2 = x^2 + y^2$ 。我们在水平方向改变两波带板的相对位置, 得到调制后 X 方向的干涉条纹, 在 y 取某一定值时, 我们抽取了 X 方向的一条曲线与标准方程进行比较, 如图 7 所示。图中横坐标的单位为像素, 该图共有 286 点像素, 第 286 点对应非球面镜

的直径 19.6 mm。两条曲线之间的差距在 $0 \sim 1.6505 \times 10^{-3}$ mm 之间, 其误差均方根为 $0.45033 \mu\text{m}$ 。由于波带板的制作过程, 使得波带板的边缘存在一些问题, 因而我们得到的图像的的边缘不理想, 这就造成解调后得到的面形的边缘的误差较大。我们把边缘略去部分后, 可以得到其误差均方根为 $\lambda/10$ 。

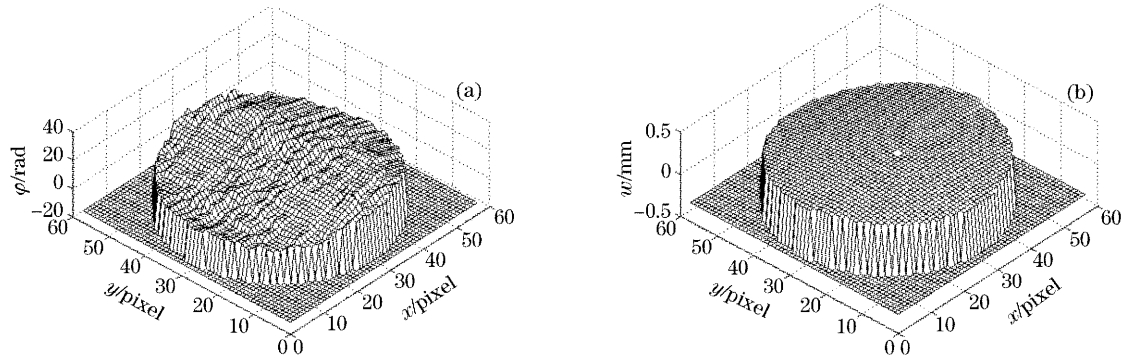


图 6 非球面镜表面的波面相位分布图(a)和面形图(b)

Fig. 6 Phase distribution (a) and 3-D profile (b) of aspheric mirror surface

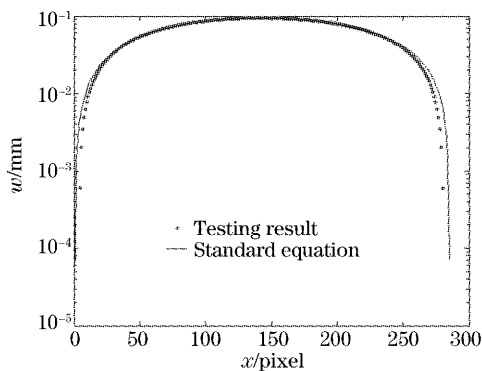


图 7 $y=0.6$ mm, 沿 x 方向的截面方向测量结果与标准方程的比较

Fig. 7 $y=0.6$ mm, comparison between measured result and standard equation

6 结 论

提出了一种利用希尔伯特变换进行条纹相位处理的新方法, 并用这种方法对非球面镜进行面形的测量。这种检测非球面镜的实验装置简单, 操作容易, 只需从一幅条纹图像中提取全部信息。由计算可知, 这种方法可获得精度为 $\lambda/10$ 的测量结果。

参 考 文 献

- 1 N. A. Massie, R. D. Nelson, S. Holly. High-performance real-time heterodyne interferometry[J]. *Appl. Opt.*, 1979, **18**(11): 1797~1803
- 2 Y. Ishii, J. Chen, K. Murata. Digital phase-measuring interferometry with a tunable laser diode[J]. *Opt. Lett.*, 1987, **12**(4): 233~235
- 3 M. Takeda, H. Ina, S. Kobayashu. Fourier-transform method of fring-pattern analysis for computer-based topography and interferometry[J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1982, **72**(1): 156~160
- 4 M. Sticker, C. K. Hitzengerger, R. Leitgeb *et al.*. Quantitative differential phase measurement and imaging in transparent and turbid media by optical coherence tomography[J]. *Opt. Lett.*, 2001, **26**(8): 518~520
- 5 Hiroto Watanabe, Ribun Onodera, Yukihiri Ishii. Demodulation technique for interferometric phase with a one-dimensional discrete Hilbert transform[C]. *Proc. SPIE*, 2002, **4919**: 376~383
- 6 Wei Chunlong, Chen Mingyi, Wang Zhijiang. Phase unwrapping algorithm with Zernike polynomials[J]. *Acta Optica Sinica*, 1998, **18**(7): 912~917 (in Chinese)
- 7 韦春龙, 陈明仪, 王之江. 运用泽尼克多项式的相位去包裹算法[J]. *光学学报*, 1998, **18**(7): 912~917
- 8 Hui Mei, Niu Hanben. A method of wavefront data fitting using Zernike polynomials[J]. *Acta Photonica Sinica*, 1999, **28**(12): 1113~1116 (in Chinese)
- 9 惠梅, 牛憨笨. 运用泽尼克多项式进行物面波前数据拟合[J]. *光子学报*, 1999, **28**(12): 1113~1116
- 10 Chang Jun, Li Fengyou, Weng Zhicheng *et al.*. Testing large convex aspherical surface with computer-generated holography[J]. *Acta Optica Sinica*, 2003, **23**(10): 1266~1268 (in Chinese)
- 11 常军, 李凤友, 翁志成等. 用计算全息法检测大口径凸非球面的研究[J]. *光学学报*, 2003, **23**(10): 1266~1268