

文章编号: 0253-2239(2005)05-589-4

# 变折射率介质中光线追迹通用算法的研究\*

黄战华 程红飞 蔡怀宇 赵海山 张尹馨

(天津大学精密仪器与光电子工程学院光电信息技术科学教育部重点实验室, 天津 300072)

**摘要:** 基于几何光学的光线折射和反射原理提出了变折射率介质中的光线追迹算法, 给出了在光线追迹过程中进行递推的反射光线和折射光线的方向余弦方程; 解决了空间中法线的确定和光线回转等问题。最后通过对多种不同的存在解析解的特殊折射率分布的数值解值和解析解值的比较, 验证了算法的正确性, 并且讨论了应用算法时应该注意的问题和算法中还有待解决的问题。该算法不但具有广泛的适用性, 基本不受折射率分布的制约, 而且其数值解精度达  $10^{-5}$ 。该算法在变折射率介质的光学设计和空间成像补偿等方面有着广阔的应用前景。

**关键词:** 几何光学; 折射率; 通用算法; 光线追迹; 方向余弦

中图分类号: O435.1 文献标识码: A

## A Study on Universal Ray Tracing Algorithm in the Medium of Variable Refractive Index

Huang Zhanhua Cheng Hongfei Cai Huaiyu Zhao Haishan Zhang Yin Xin

(Key Laboratory of Optoelectronic Information Technological Science, Ministry of Education, College of Precision Instrument and Optoelectronic Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072)

**Abstract:** An algorithm of ray tracing based on light ray refraction and reflection in geometrical optics in the medium of variable refractive index is proposed and a recursive direction-cosine equation of reflected light and refractive light for ray tracing in the medium of variable refractive index is carried out. In the algorithm, some problems, confirmation of normal line, light turning etc., are resolved. At last its correctness is validated by comparing numerical value and analytic value of several different special distribution of refractive index of analytic solution, furthermore some problems in the during of applying the algorithm and under solution in the algorithm are discussed. Not only the algorithm has extensive feasibility and is independent of distribution of refractive index, but also its numeric precision is about  $10^{-5}$ . The application of the algorithm is prospective in the many cases, such as optical designing and spatial imaging compensation of variable refractive index.

**Key words:** geometrical optics; refractive index; universal algorithm; ray tracing; direction cosine

## 1 引 言

均匀折射率介质中的光线追迹是光学设计计算的主要手段。对于变折射率介质中的光线追迹研究才开始起步<sup>[1,2]</sup>。主要方法是先简化光线方程,再用数值方法求解。但是这种方法的适用范围狭窄。本文提出了一种光线追迹算法。该算法从几何光学的基本原理——折射和反射规律出发,导出光线的空间折射和反射方程,由此得到空间中光线的轨迹。该算法不受折射率分布的制约,对各种分布均能得到满意的数值解。可以应用在变折射率介质的光学系统设

计上,也可以应用在变折射率空间成像补偿上。由于摄像距离、温度分布和大气成分的变化,空气不再均匀时,会导致成像质量下降。这时可通过本算法计算得到物点和像点的对应关系进行图像补偿。

## 2 算法描述

一束光线在均匀折射率的介质中是沿直线传播的,但在变折射率介质中将沿曲线传播。将变折射率介质分成很多小段,并且认为光线仅在各小段的边界上发生折射、在各小段内部沿直线传播<sup>[3~7]</sup>,如图 1

\* 国家自然科学基金(60377001)资助课题。

作者简介: 黄战华(1965~),男,天津大学教授,主要从事光学图像处理 and 模式识别、光电技术等方面的研究。

E-mail: zhanhua@tju.edu.cn

收稿日期: 2004-08-19; 收到修改稿日期: 2004-11-09

所示。当把变折射率介质分成足够多的小段时,就能得到光线的近似轨迹,这就是本算法的基本思想。

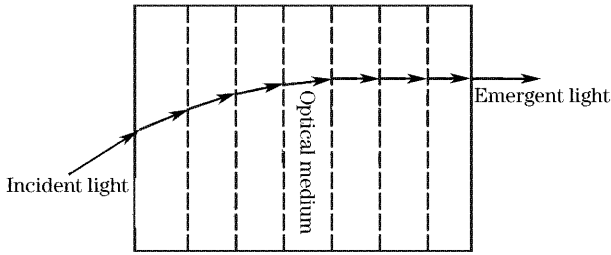


图 1 光线追迹原理示意图

Fig. 1 Schematic sketch for ray tracing

变折射率介质中光线路径是通过多次折射得到的,必须先确定各条折射光线空间位置<sup>[8~10]</sup>。如果把光线看作空间中的矢量,那么就可以用其起点的直角坐标和方向余弦表示光线的空间位置。根据折射规律,只要知道入射光线的空间坐标、法线的空间坐标以及分界面两边的折射率就可以得到折射光线的空间坐标。光线在三维空间中的折射情况如图 2 所示<sup>[3]</sup>。其中 $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ 、 $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ 、 $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ 和 $(\alpha_4, \beta_4, \gamma_4)$ 分别为入射光线、折射光线、法线和反

射光线的方向角, $\theta_1$ 为入射角, $\theta_2$ 为折射角, $n_1$ 和 $n_2$ 为界面两边的折射率。

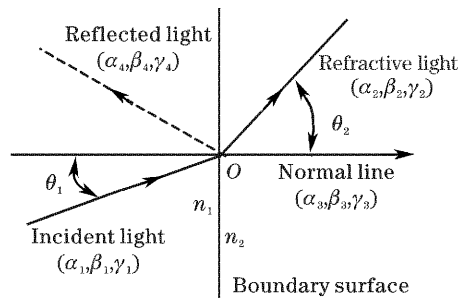


图 2 光线折射示意图

Fig. 2 Sketch for light ray refraction

入射光线的空间坐标在计算前给定,分界面两边的折射率可由折射率分布计算得到。但是法线的空间坐标却无法直接确定。在变折射率的介质中,一般情况下并不存在明显的界面,所以界面的法线也就不存在。由于空间折射总是向着折射率变化最大的方向,所以取介质折射率梯度方向为法线方向。这样计算折射光线的条件都已满足。根据入射光线和折射光线所成的角度,以及折射定律,可列出以下方程:

$$\cos \alpha_3 \cos \alpha_1 + \cos \beta_3 \cos \beta_1 + \cos \gamma_3 \cos \gamma_1 = \cos(\theta_1^* - \theta_2^*), \tag{1}$$

$$\cos \alpha_2 \cos \beta_3 - \cos \beta_2 \cos \alpha_3 = \sin \theta_2^* / \sin \theta_1^* (\cos \alpha_1 \cos \beta_3 - \cos \beta_1 \cos \alpha_3), \tag{2a}$$

$$\cos \beta_2 \cos \gamma_3 - \cos \gamma_2 \cos \beta_3 = \sin \theta_2^* / \sin \theta_1^* (\cos \beta_1 \cos \gamma_3 - \cos \beta_1 \cos \beta_3), \tag{2b}$$

$$\cos \gamma_2 \cos \alpha_3 - \cos \alpha_2 \cos \gamma_3 = \sin \theta_2^* / \sin \theta_1^* (\cos \gamma_1 \cos \alpha_3 - \cos \alpha_1 \cos \gamma_3), \tag{2c}$$

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2, \tag{3}$$

式中 $\theta_1^*$ 是入射光线与法线所成的角, $\theta_2^*$ 是折射光线与法线所成的角。

$$\cos \alpha_2 = (n_1/n_2)(\cos \alpha_1 - \cos \theta_1^* \cos \alpha_3) \pm \cos \alpha_3 \sqrt{1 - (n_1^2/n_2^2)\sin^2 \theta_1^*}, \tag{4a}$$

$$\cos \beta_2 = (n_1/n_2)(\cos \beta_1 - \cos \theta_1^* \cos \beta_3) \pm \cos \beta_3 \sqrt{1 - (n_1^2/n_2^2)\sin^2 \theta_1^*}, \tag{4b}$$

$$\cos \gamma_2 = (n_1/n_2)(\cos \gamma_1 - \cos \theta_1^* \cos \gamma_3) \pm \cos \gamma_3 \sqrt{1 - (n_1^2/n_2^2)\sin^2 \theta_1^*}, \tag{4c}$$

当 $\pi/2 < \theta_1^* < \pi$ 时(4)式取“+”,当 $\pi/2 < \theta_1^* < \pi$ 时(4)式取“-”。

(4)式就是折射光线的方向余弦,而折射光线又是下一次折射的入射光线,这样只要一步一步折射下去,就能得到变折射率介质中的光线轨迹。但是此算法中还存在一个未能处理的问题,就是空间中光线的回转,如图 3 所示。此现象在光线传播过程中普遍存在,如海市蜃楼和梯度光纤中的光波导。用全反射方式处理光线回转。反射光线的方向余弦可应用计算折射光线的方向余弦的方法得到:

$$\cos \alpha_4 = \cos \alpha_1 - 2\cos \theta_1^* \cos \alpha_3, \tag{5a}$$

$$\cos \beta_4 = \cos \beta_1 - 2\cos \theta_1^* \cos \beta_3, \tag{5b}$$

$$\cos \gamma_4 = \cos \gamma_1 - 2\cos \theta_1^* \cos \gamma_3. \tag{5c}$$

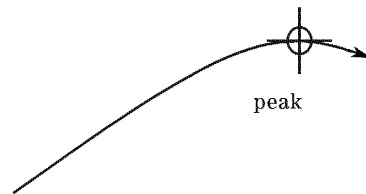


图 3 光线回转示意图

Fig. 3 Sketch for ray turning

图 3 是空间中光线的轨迹,其中十字叉丝所在位置就是光线轨迹的峰值点。如果在此峰值点附近应用折射公式进行计算,(4)式中的根号下会出现负值,导致计算出错。由此推断在峰值点应该应用反射公

式计算。通过对光线方程采用特殊折射率分布进行分析计算,计算中出现峰值点与光线方程计算出的极值点恰好吻合,在这些点附近应用反射公式进行计算后所得路径与从光线方程得到的也完全吻合。

### 3 算法验证与讨论

#### 3.1 正常实例

一般的折射率分布不能从光线方程推导出光线轨迹的解析解。但对一些特殊的折射率分布却是可

以的。以下是两种有代表性的的折射率分布的解析解,与本算法得到的数值解的比较。一是轴向变化的  $n(z) = n(0) \sqrt{1 - \alpha^2 z^2}$ , 由于玻璃和光纤的折射率一般在 1.5 左右,故取  $n(0) = 1.5$ ; 二是径向变化的  $n(x, y) = n(0) \sqrt{1 + \alpha^2 (x^2 + y^2)}$ , 由于空气的折射率大小基本在 1 附近,所以取  $n(0) = 1$ 。以下简称轴向分布和径向分布。轴向分布和径向分布的解析解分别是:

轴向分布:

$$x = x_0 + \frac{p_0}{n(0)\alpha} \left\{ \arcsin \left[ \frac{n(0)\alpha}{L_0} z \right] - \arcsin \left[ \frac{n(0)\alpha}{L_0} z_0 \right] \right\}, \quad (6a)$$

$$y = y_0 + \frac{q_0}{n(0)\alpha} \left\{ \arcsin \left[ \frac{n(0)\alpha}{L_0} z \right] - \arcsin \left[ \frac{n(0)\alpha}{L_0} z_0 \right] \right\}, \quad (6b)$$

径向分布:

$$x = x_0 \operatorname{ch} \left[ \frac{n(0)\alpha}{L_0} z \right] + \frac{p_0}{n(0)\alpha} \operatorname{sh} \left[ \frac{n(0)\alpha}{L_0} z \right], \quad (7a)$$

$$y = y_0 \operatorname{ch} \left[ \frac{n(0)\alpha}{L_0} z \right] + \frac{p_0}{n(0)\alpha} \operatorname{sh} \left[ \frac{n(0)\alpha}{L_0} z \right], \quad (7b)$$

其中  $x_0, y_0, z_0$  均为  $x, y, z$  坐标的初始值,  $p_0, q_0, L_0$  为初始的对应  $x, y, z$  轴的光学方向余弦, 即该点

$(x, y, z)$  的折射率与该点处方向余弦的乘积。

图 4 和图 5 描述的是轴向分布和径向分布在不同步长(将物距等分,每一等份的长度就是计算步长,在图 4、图 5 中用  $L$  表示)和不同折射率变化幅度时,光线的实际轨迹和理想轨迹的偏差情况,其中 (a) 步长不变而折射率变化幅度变化时的情况、(b) 计算步长变化而折射率变化幅度不变时的情况。

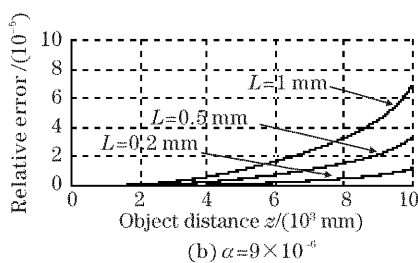
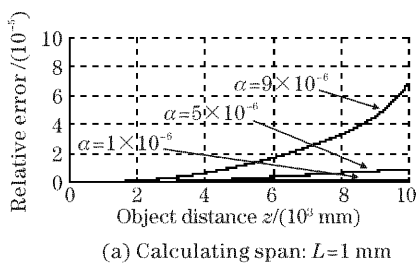


图 4 轴向分布的数值解值与解析解值之差。

Fig. 4 Difference between numerical value and analytic value of axial distribution

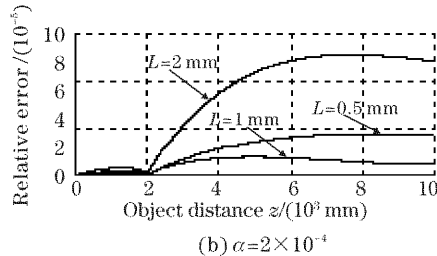
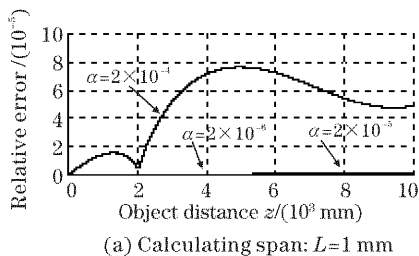


图 5 径向分布的数值解值与解析解值之差

Fig. 5 Difference between numerical value and analytic value of radial distribution

在从图 4 和图 5 中可以看出,在不同折射率分布的情况下,计算精度均能达到  $10^{-5}$  量级,完全满足光线追迹的精度要求。而且一般情况下折射率变化幅度越小计算误差就越小,计算步长越小误差就

越小,但是由于本算法计算步骤多、计算量大,在满足精度要求的情况下应增大步长减少计算步骤、提高计算速度。在图 5(b)中显示,减小步长,计算精度反而下降。原因在于受到计算机精度的限制,减

小步长进行计算在原理上肯定会提高精度,但是步长减小导致计算过程变长、步骤增加,每次递推时计算机舍入误差的都会不断积累,最后导致整体精度下降。计算步长和计算机精度共同左右着轨迹计算的精度,要进一步提高精度需采用长整形算法或高位数的计算机以减小舍入误差对计算精度的影响。

### 3.2 异常实例

图 6 描述的是折射率分布:  $n(x, y) = n(0) \sqrt{1 - \alpha^2(x^2 + y^2)}$ ,  $n(0) = 1.5, \alpha = 0.01$ 。初始条件为  $p_0 = 0, x_0 = \frac{q_0}{n(0)\alpha}$  ( $p_0, q_0$  为初始时对应  $x, y$  轴的光学方向余弦,  $x_0$  为  $x$  坐标的初始值) 时的理想和实际光线轨迹。从图中看出, 计算得出的轨迹与理想轨迹存在很大差异。原因在于, 此轨迹为螺旋型的。从光轴方向 ( $z$  轴) 取点计算时, 计算步长过大导致精度损失严重, 另一个原因是在计算中应用反射公式的点寻找不够精确, 从而在光线回转时造成较大误差, 经过多次积累后, 致使光线轨迹计算错误。根据以上分析, 可以适当的减小步长来提高计算精度, 而且在需应用反射公式时, 应进一步减小步长, 多次搜索寻找更精确的出错点, 这样可以大幅提高精度。虽然这种特殊的螺旋型光线会导致很大误差, 但是从此例可看出出现这种光线的条件比较苛刻, 而且不是所有的折射率分布中都存在螺旋型的光线, 也不是某种折射率分布中光线都是螺旋型的, 仅仅在少数折射率分布中存在极少数的这种光线。在一般情况下, 是不会出现这种特殊光线的, 计算结果受到该光线影响的机会很小。

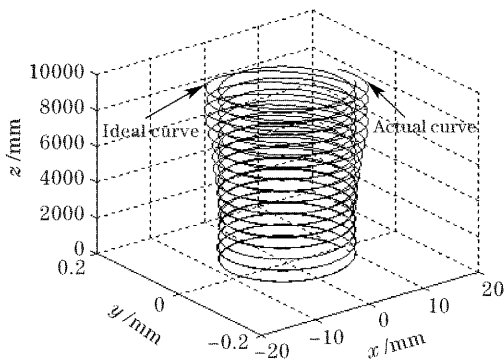


图 6 理想和实际光线轨迹图

Fig. 6 Diagram of ideal and actual ray track

## 4 结 论

本算法基本不受折射率分布的限制, 一般情况下均能得到满意的数值解, 介质的折射率变化幅度越小, 越能得到较高精度的数值解; 算法的精度受到

计算步长和计算机位数的限制, 一般情况下可以通过减小步长来提高计算精度, 如果需要进一步提高精度需要采用长整形算法或者高位数计算机; 但是算法中计算步骤太多, 舍入误差的积累会导致精度下降。所以一般在满足精度要求的情况下要尽量增大计算步长减小计算量。对于极少数特殊分布的特殊光线, 通过特殊处理, 也可以保证计算精度。光线追迹算法, 适应性较强, 但是对于折射率变化较大的介质中的光线追迹问题也有待进一步研究, 而且在计算速度、介质梯度计算和反射点精确搜索等方面仍有待进一步改善。

## 参 考 文 献

- 1 Qiao Yafu. *GRIN Optics* [M]. Beijing: Science Press, 1991 (in Chinese)  
乔亚夫. 梯度折射率光学[M]. 北京: 科学出版社, 1991
- 2 Liu Desen, Gao Yingjun. *Physical Base of Variable-Refractive-Index Medium* [M]. Beijing: National Defense industry Press, 1991 (in Chinese)  
刘德森, 高应俊. 变折射率介质的物理基础[M]. 北京: 国防工业出版社, 1991
- 3 Zhang Yimo. *Applied Optics* [M]. Beijing: China Machine Press, 1982 (in Chinese)  
张以谟. 应用光学[M]. 北京: 机械工业出版社, 1982
- 4 Huang Zhanhua, Cai Huaiyu, Li Heqiao *et al.*. Influence of laser beam bending on thickness measurement of hot steel plate[J]. *J. Opto-Electronic Engineering*, 2001, **28**(6): 40~43 (in Chinese)  
黄战华, 蔡怀宇, 李贺桥 等. 光线弯曲对热钢板激光厚度测量的影响及消除方法[J]. 光电工程, 2001, **28**(6): 40~43
- 5 Yuan Remin, Zeng Zongyong, Xiao Liming *et al.*. Comparison of some methods of measuring refractive index structure parameter [J]. *Acta Optica Sinica*, 2000, **20**(6): 755~761 (in Chinese)  
袁仁民, 曾宗泳, 肖黎明 等. 不同方法测量折射率结构常数的比较[J]. 光学学报, 2000, **20**(6): 755~761
- 6 Li Xianqin, Cheng Zhaogu, Jiang Jinbo *et al.*. Focus characteristic of laser beam for long distance propagation in atmosphere[J]. *Acta Optica Sinica*, 2001, **21**(3): 324~329 (in Chinese)  
李现勤, 程兆谷, 蒋金波 等. 激光束在大气中远距离传输聚焦特性的研究[J]. 光学学报, 2001, **21**(3): 324~329
- 7 Yuan Remin, Zeng Zongyong, Ma Chengsheng *et al.*. Laboratory simulation of light propagation in atmospheric convective boundary layer[J]. *Acta Optica Sinica*, 2001, **21**(5): 518~521 (in Chinese)  
袁仁民, 曾宗泳, 马成胜 等. 大气对流边界层光传输的实验室模拟[J]. 光学学报, 2001, **21**(5): 518~521
- 8 Chen Xiyuan. Matrix analysis and numeric simulation of holographic mirrors [J]. *Chin. J. Lasers*, 2004, **31**(1): 85~88 (in Chinese)  
陈西园. 全息反射镜的矩阵分析方法和数值模拟 [J]. 中国激光, 2004, **31**(1): 85~88
- 9 Zhu Daqing. A way of adjacent crosstalk reduction for AWGs [J]. *Chin. J. Lasers*, 2004, **31**(3): 313~317 (in Chinese)  
朱大庆. 一种降低阵列波导光栅相邻信道串扰的方法 [J]. 中国激光, 2004, **31**(3): 313~317
- 10 Wei Hui, Xu SHizhong, Zhang Shengjia *et al.*. A novel method for compensating deflection in temporal-spatial transform plus shaping system [J]. *Chin. J. Lasers*, 2004, **31**(2): 149~152 (in Chinese)  
韦 辉, 许世忠, 张生佳 等. 时空变换脉冲整形系统中实现光束复原的一种新方法 [J]. 中国激光, 2004, **31**(2): 149~152