

小波变换在载频条纹相位分析法中的应用研究*

翁嘉文^{1,2} 钟金钢^{2**}

(¹ 华南农业大学理学院, 广州 510642)
(² 暨南大学物理系, 广州 510632)

摘要: 为了克服在非平稳信号分析中傅里叶变换的全局性缺陷,以及窗口傅里叶分析的单一分辨率和伸缩窗口傅里叶分析的尺度不确定性问题,采用伽博解析小波变换技术对空间载频光栅条纹进行相位分析,有效地提取出相对于载频条纹基频的完整相位信息,从本质上解决了上述问题。以三维轮廓术为例,与傅里叶分析进行了对比研究,给出了小波分析应用在空间载频条纹相位分析中详细而完整的理论推导证明、计算机模拟以及实验验证结果。

关键词: 傅里叶光学; 相位分析; 三维轮廓术; 小波变换

中图分类号: O439 文献标识码: A

Apply Wavelet Transform to Phase Analysis of Spatial Carrier-Fringe Patterns

Weng Jiawen^{1,2} Zhong Jingang²

(¹ College of Science, South China Agricultural University, Guangzhou 510642)
(² Department of Physics, Jinan University, Guangzhou 510632)

Abstract: In order to overcome the disadvantages of Fourier transform analyzing nonstationary signals, the invariable resolution of Fourier transform, and the uncertainty scale of dilating Fourier transform, the Gabor wavelet transform is applied to analyze the spatial carrier-fringes. By introducing the Gabor wavelet to analyzing the spatial carrier-fringe patterns, the modulated phase distribution relative to the fundamental frequency is obtained finally. The theory, accuracy check using a simulation and an example of 3-D shape measurement are shown.

Key words: Fourier optics; phase analysis; three-dimensional profilometry; wavelet transform

1 引 言

随着数字图像技术的发展,空间载频条纹相位分析技术在众多领域中得到了广泛应用,如数字全息、三维轮廓术。其中应用最为广泛的是傅里叶变换条纹分析,如三维测量中的傅里叶变换轮廓术(FTP)^[1~5]。但在测量复杂面形轮廓时,由于存在着频谱混叠的现象,使得傅里叶变换分析存在一个可测梯度的范围限制。因此,我们提出了窗口傅里叶变换^[6]和伸缩窗口傅里叶变换^[7,8]方法。但从本质上来讲,窗口傅里叶变换是一种单一分辨率的信号分析方

法;伸缩窗口傅里叶变换虽克服了单一分辨率的缺陷,但是该技术中窗函数尺度与局部频率之间的不确定性使得该方法的应用存在着一定的局限性。

被誉为信号分析数学显微镜的小波分析是一种时/空-频局部化分析方法,具有多分辨率分析的特点,在时/空-频两域都具有表征信号局部特征的能力。对于空间载频条纹相位分析,小波分析^[9~12]可以很好地弥补傅里叶变换和窗口、伸缩窗口傅里叶变换所存在的缺陷。本文以三维测量为例,采用伽博解析小波对载频光栅条纹信号进行分析,并给出

* 广东省自然科学基金(010377)资助课题。

作者简介: 翁嘉文(1979~),女,广东汕头人,华南农业大学理学院助教,主要从事应用光学方面的研究工作。

** 通讯联系人。E-mail: zjgju@163.com

收稿日期: 2004-04-21; 收到修改稿日期: 2004-08-24

完整的理论推导,证明通过提取小波变换脊所对应的相位,将得到傅里叶变换轮廓术中定义的相对于基准光栅基频的完整相位调制信息,最终得到物体的三维面形数据。文中给出了小波分析应用在空间载频条纹相位分析法中的详细而完整地理论证明过程,以及计算机模拟、实验验证结果。

2 理 论

2.1 傅里叶变换轮廓术

以相交型光学测量系统为例,其光路原理如图1所示。图1中 $E'_p E_p$ 和 $E'_c E_c$ 分别是投影系统和成像系统的光轴,两光轴与参考平面 R 相交于 O 点。参考平面 R 与 $E'_c E_c$ 相互垂直,是测量物体表面高度变化的参照面。光栅栅线垂直于平面 $E_p E_c O$,由投影系统投影在待测物体表面。由成像系统采集得到的变形光栅图像记为

$$g(x, y) = r(x, y) \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \exp\{j[2\pi n f_0 x + n \phi(x, y)]\}, \quad (1)$$

式中 f_0 是光栅图像的基频, $r(x, y)$ 是物体表面非均匀的反射率, $\phi(x, y)$ 是变形光栅的相位分布。

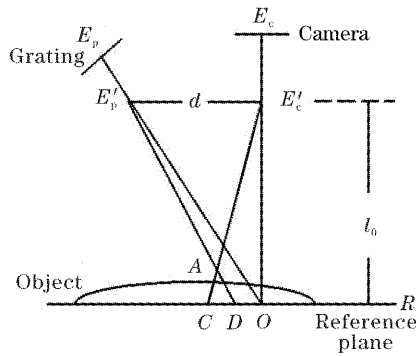


图1 测量的光路原理图

Fig. 1 Schematic diagram of optical path

对光栅图像函数表达式引入相位分布 $\varphi_n(x, y)$ 函数:

$$\varphi_n(x, y) = 2\pi n f_0 x + n \phi(x, y), \quad (2)$$

因而,对变形光栅图像和基准光栅图像进行傅里叶分析提取的基频信息分别为

$$g_1(x, y) = A_1 r(x, y) \exp\{j[\varphi_1(x, y)]\}, \quad (3)$$

$$g_{r1}(x, y) = A_1 \exp\{j[\varphi_{r1}(x, y)]\}, \quad (4)$$

其中,

$$\varphi_1(x, y) = 2\pi f_0 x + \phi(x, y), \quad (5)$$

$$\varphi_{r1}(x, y) = 2\pi f_0 x + \phi_0(x, y), \quad (6)$$

式中 $\phi_0(x, y)$ 是光栅条纹的初相位。将(3)式与

(4)式的共轭式相乘取对数,并消除光强弱引起的干扰,即分离虚部得到纯粹由物体高度所引起的相位调制 $\Delta\phi$:

$$\begin{aligned} \Delta\phi(x, y) &= \text{Im}\{\text{lb}[g_1(x, y) \cdot g_{r1}^*(x, y)]\} = \\ &= \varphi_1(x, y) - \varphi_{r1}(x, y) = \\ &= \phi(x, y) - \phi_0(x, y) = 2\pi f_0 \overline{CD}, \end{aligned} \quad (7)$$

并由图1所示三角形 ACD 与 $AE'_p E'_c$ 的相似关系:

$$\overline{CD} = -\frac{dh(x, y)}{l_0 - h(x, y)}, \quad (8)$$

得到相位与物体表面高度的变换公式

$$h(x, y) = \frac{l_0 \Delta\phi(x, y)}{\Delta\phi(x, y) - 2\pi f_0 d}. \quad (9)$$

2.2 空间载频条纹的小波分析

2.2.1 小波变换

一维信号 $f(x)$ 的连续小波变换定义为

$$W_f(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \psi_{a,b}^*(x) dx = \langle f(x), \psi_{a,b}(x) \rangle, \quad (10)$$

$$\psi_{a,b}(x) = \frac{1}{a} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right), \quad (11)$$

其中“*”表示共轭; $\psi_{a,b}(x)$ 是母小波函数 $\psi(x)$ 经伸缩平移后得到的小波序列; a 为尺度因子,它的作用是将母小波函数 $\psi(x)$ 做伸缩, a 愈大 $\psi(x/a)$ 愈宽,反之亦然; b 为平移因子。对于实信号 $f(x)$,采用解析小波基函数进行连续小波变换,得到 $W_f(a, b)$, 其实部记为 $\text{Re}[W_f(a, b)]$, 虚部记为 $\text{Im}[W_f(a, b)]$, 则幅值 $A(a, b)$ 和相位 $\varphi(a, b)$ 分别为

$$A(a, b) = \sqrt{\{\text{Im}[W_f(a, b)]\}^2 + \{\text{Re}[W_f(a, b)]\}^2}, \quad (12)$$

$$\varphi(a, b) = \arctan\left\{\frac{\text{Im}[W_f(a, b)]}{\text{Re}[W_f(a, b)]}\right\}. \quad (13)$$

(10)式描述了信号与小波序列的内积关系,其物理意义在于:它反映了信号与小波序列函数的相似程度。因此连续小波变换可以理解为将信号和小波函数进行比较的结果,幅值和相位综合反映了它们的相似程度。而当被测信号的局部频率与相应尺度的小波函数振荡频率相同或者相近时,其小波系数,也就是幅值相应较大。其中,在各个位置沿尺度轴方向上,小波变换幅值的最大值位置的连线定义为小波变换的脊 $\text{ridge}(b)$ ^[13,14]:

$$\text{ridge}(b) = \max[A(a_i, b)], \quad (14)$$

其中 i 为尺度参量 a 的序列数, a_i 为各尺度参量的值。在三维轮廓术中,正是通过上式确定小波变换的

脊,进而提取脊所对应的相位值,得到含有物体高度信息的相位信息。

在本文中,我们选取伽博解析小波函数作为母小波,其数学表达式如下:

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} \sqrt{\frac{2\pi}{\gamma}} \exp\left[-\frac{(2\pi/\gamma)^2 x^2}{2} + j2\pi x\right],$$

$$\gamma = \pi \sqrt{2/(\ln 2)}, \quad (15)$$

图 2(a)、图 2(b)分别为伽博解析小波在空域和频域

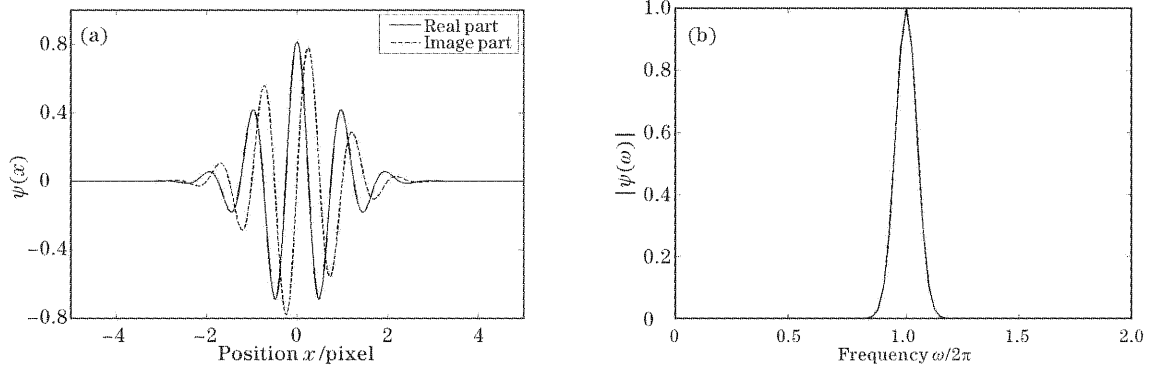


图 2 伽博小波函数空域响应(a)和频域响应(b)

Fig. 2 Gabor wavelet function. (a) Space-domain, (b) frequency-domain

2.2.2 空间载频条纹小波分析

与傅里叶变换相异,小波变换并没有定义全局光栅条纹的基频 f_0 以及与其对应的相位函数 $\phi(x, y)$ 和 $\phi_0(x, y)$,而是通过定义光栅条纹的局部频率 f_x 以及与其对应的相位函数,即小波变换脊对应的相位分布 $\varphi_x(x, y)$ 进行分析处理的。

根据连续小波变换的物理意义,通过计算机自动检测小波变换脊,提取变形光栅以及基准光栅图像的小波变换脊对应的相位函数分别为

$$\varphi_x(x, y) = 2\pi f_x x + \phi_x(x, y), \quad (16)$$

$$\varphi_0(x, y) = 2\pi f_0 x + \phi_0(x, y), \quad (17)$$

为了要提取物体的高度所引起的相位调制 $\Delta\phi(x, y)$,令

$$\varphi_x(x, y) = 2\pi f_0 x + \phi'_x(x, y) + \phi_x(x, y) = 2\pi f_0 x + \phi(x, y), \quad (18)$$

其中 $\phi(x, y) = \phi'_x(x, y) + \phi_x(x, y)$, (19)

是相对于基准光栅条纹基频 f_0 得到的相位分布。结合(16)式~(18)式,可得相位调制 $\Delta\phi(x, y)$ 为

$$\varphi_x(x, y) - \varphi_0(x, y) = [2\pi f_0 x + \phi(x, y)] - [2\pi f_0 x + \phi_0(x, y)] = \phi(x, y) - \phi_0(x, y) = \Delta\phi(x, y), \quad (20)$$

从上式可见,经过小波变换后,通过提取小波变换脊对应的相位值,最终得到与傅里叶变换轮廓术同样的相位分布信息,即相对于基准光栅图像基频 f_0 的

的图形。其中应用伽博解析小波进行分析的原因主要有:该小波在空、频两域中存在最小的展开,即在空域和频域都具有很好的局部化性能;另外该解析小波中的 $\exp(j2\pi x)$ 代表了一个复正弦函数,可以很好地表征光栅图像中的正弦信号特征,以及相位信息。另外采用具有因子 $\exp(j2\pi x)$ 的 Morlet 小波也基本上可满足要求。

相位调制分布 $\Delta\phi$,并将其代入(9)式中得到物体的三维面形数据。

3 计算机模拟

通过计算机生成空间周期为 16 pixel,大小为 1 pixel×2048 pixel像素的一维基准正弦光栅图像,如图 3(a),并加入一连续相位调制 $u(x)$ 得到一变形光栅图像,如图 3(b)所示。

$$u(x) = 2\pi \left[\frac{x}{13 + (8/12)x} - \frac{x}{16} \right], \quad (21)$$

$$(x = 1, 2, \dots, 2048)$$

该变形光栅梯度变化最大值为 0.3523,远大于傅里叶变换轮廓术的限制条件值 $2\pi f_0/3 = 0.1309^{[1]}$ 。其正频谱分布如图 4(b)所示,存在着严重的频谱混叠现象。分别应用傅里叶变换和小波变换对基准光栅和变形光栅进行分析。由于无法完整提取基频分量信息,因此傅里叶变换轮廓术分析出现了严重的

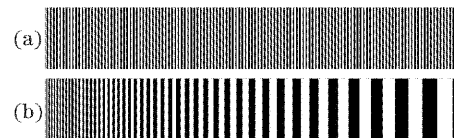


图 3 (a)基准光栅图像,(b)变形光栅图像

Fig. 3 (a) Original Ronchi grating pattern, (b) deformed Ronchi grating pattern

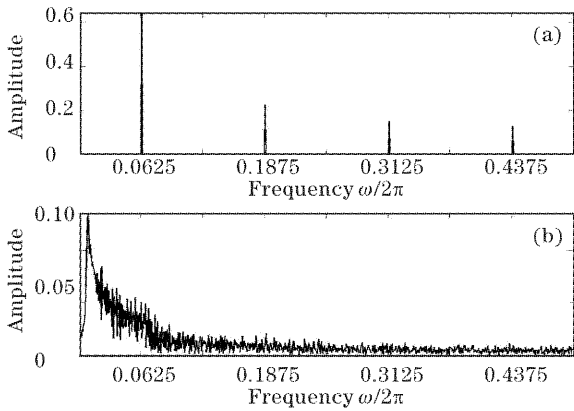


图 4 (a)基准光栅和(b)变形光栅正频谱分布图

Fig. 4 Positive spectrum distribution of original (a) and deformed Ronchi grating pattern (b)

错误,结果如图 5 所示。图 6(a)、图 6(b)分别为变形光栅图像小波变换的幅值分布和相位分布,并分别以黑线及白线标记了根据(14)式定义的小波变换脊曲线。通过计算机自动检测基准光栅和变形光栅的小波变换脊,提取其对应的相位值相减后进行解包裹,最终得到相位调制分布,如图 7 所示。其相应

的误差分布如图 8 所示,范围为 $0\sim 0.3$ rad。可见,小波分析可以很好地提取傅里叶变换轮廓术中相对于基准光栅图像基频 f_0 的相位调制分布 $\Delta\phi$,并得到令人满意的结果,体现了该方法的优越性。但必须指出一点,文中提出的小波变换分析方法是对图像的每一个点(Position)均应用一系列不同尺度(Scale)的小波基进行小波变换,以及相位信息提取操作,因此该方法是以计算时间作为代价来获取精度的。

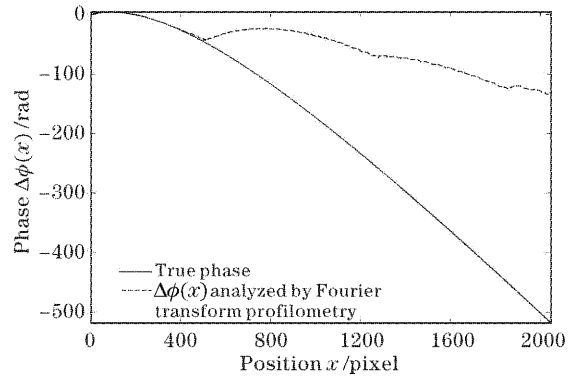


图 5 傅里叶变换分析得到的相位调制分布

Fig. 5 The modulated phase distribution analyzed by Fourier transform profilometry

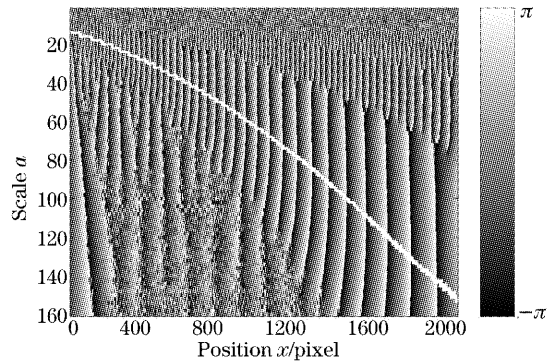
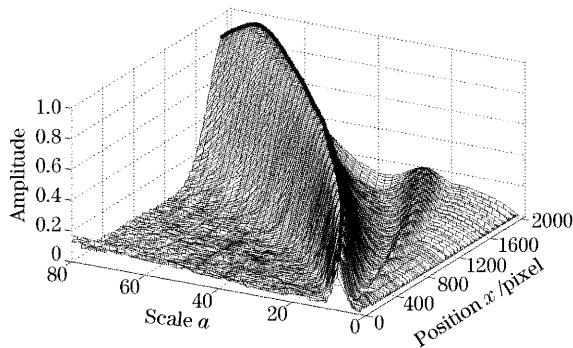


图 6 变形光栅图像小波变换幅分布(a)和相位图(b)

Fig. 6 The amplitude (a) and the phase (b) distribution of the wavelet transform components of the deformed grating pattern

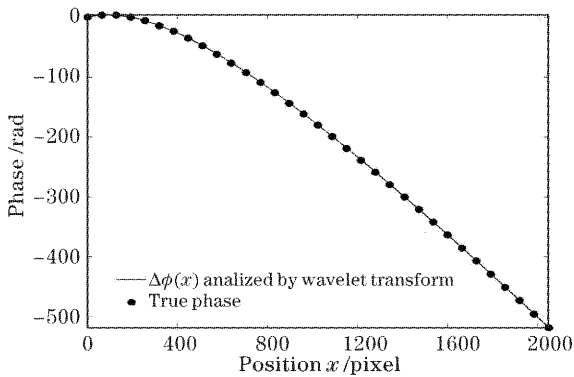


图 7 小波变换分析得到的相位调制分布

Fig. 7 The modulated phase analyzed by wavelet transform

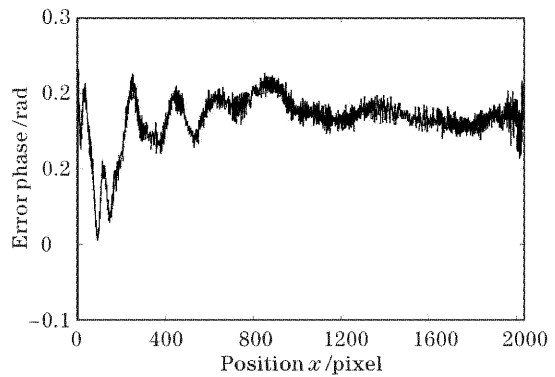


图 8 小波变换术分析误差

Fig. 8 Error phase analyzed by wavelet transform

4 实 验

本文采用的是相交型几何光学系统,实验装置如图 9 所示。实验装置所使用的是一个功率为 400 W 的数字投影仪。正弦电子光栅图像由计算机系统生成,传送到数字投影仪中,并投影在待测物体表面。变形光栅图像由 CCD 摄像头进行采集,然后送到计算机系统进行处理,其中 $l_0 = 1250.0 \text{ mm}$, $d = 250.0 \text{ mm}$ 。

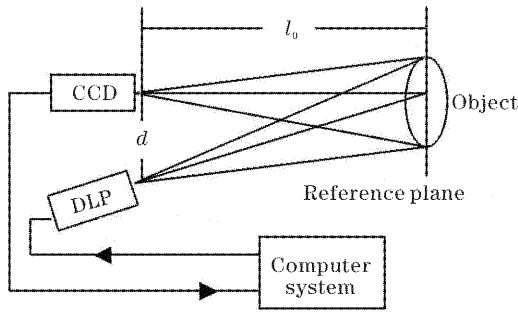


图 9 实验装置

Fig. 9 Experimental setup

图 10 为经四面体调制的变形光栅条纹图像,尺寸为 $300 \text{ pixel} \times 512 \text{ pixel}$ 。应用小波分析,以及相位解包得到其高度数据分布如图 11 所示。

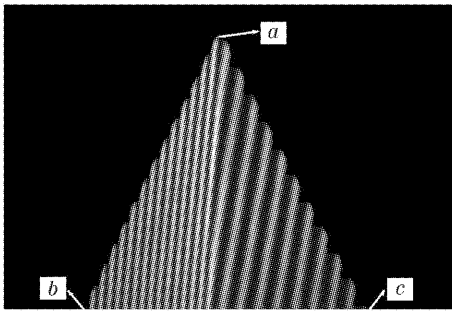


图 10 变形光栅图像

Fig. 10 Deformed grating pattern

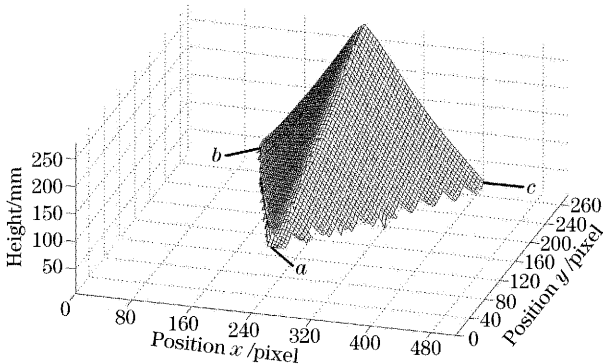


图 11 小波变换分析得到的高度数据分布

Fig. 11 The height distribution analyzed by wavelet transform

图 12 为第 300 行高度数据分布,从中我们分析得到其高度变化梯度约为 1.78,超出了傅里叶变换轮廓术分析的高度变化范围限制 $l_0/(3d) = 1.67^{[1]}$ 。结果表明小波分析仍然可以给出令人较为满意的结果。

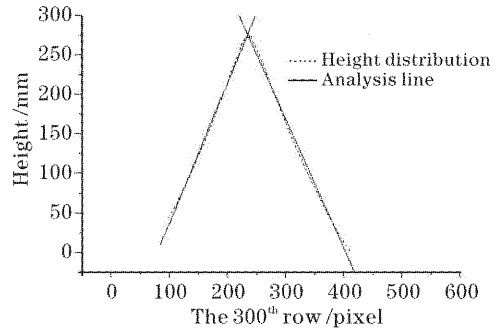


图 12 第 300 行高度数据结果

Fig. 12 The height distribution of the 300th row

为了进一步将小波分析应用于实际测量中,我们对真实人体进行了测量,并得到真人头像的大体面部轮廓。图 13 是 CCD 采集得到的经待测真人头像调制的变形光栅图像,大小为 $480 \text{ pixel} \times 512 \text{ pixel}$ 。图 14 为真人头像的展开相位分布,可见,小波分析可以较好地解调出真实人体头像轮廓。

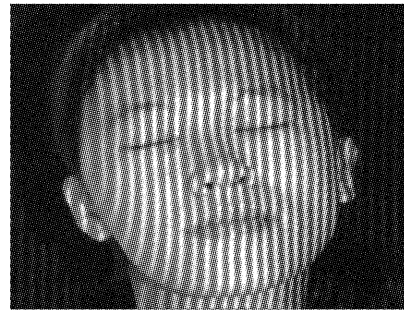


图 13 变形光栅图像

Fig. 13 Deformed grating pattern

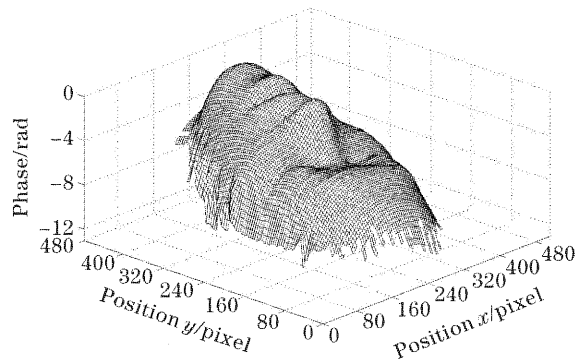


图 14 小波变换分析得到的相位调制分布

Fig. 14 The modulated phase analyzed by wavelet transform

5 结 论

本文给出了小波分析应用在空间载频条纹相位法技术中的详细而完整的理论分析证明,以三维轮廓术为例,指出通过确定小波变换脊,提取其对应相位值,最终将得到与傅里叶变换轮廓术同样的相位分布信息,即相对于基准光栅图像基频 f_0 的相位调制分布 $\Delta\phi$,并给出了计算机模拟以及实验结果。小波分析可以很好地解决傅里叶变换的全局性问题。及窗口傅里叶变换的分辨率单一性问题以及伸缩窗口傅里叶变换中的尺度与局部频率之间的不确定性问题,并得到令人较为满意的结果。

参 考 文 献

- 1 Mitsuo Takeda, Kazuhiro Mutoh. Fourier transform profilometry for the automatic measurement of 3-D object shapes[J]. *Appl. Opt.*, 1983, **22**(24): 3977~3982
- 2 Su Xianyu, Tan Songxin, Xiang Liqun *et al.*. Complex object shape measurement using FTP method[J]. *Acta Optica Sinica*, 1998, **18**(9): 1228~1233 (in Chinese)
苏显渝,谭松新,向立群等. 基于傅里叶变换轮廓术方法的复杂物体三维面形测量[J]. *光学学报*, 1998, **18**(9): 1228~1233
- 3 Chen Wenjin, Su Xianyu, Tan Songxin. Discussion on phase errors caused by frequency leakage in FTP [J]. *Acta Optica Sinica*, 2000, **20**(10): 1429~1434 (in Chinese)
陈文静,苏显渝,谭松新. 傅里叶变换轮廓术中频谱泄漏的讨论[J]. *光学学报*, 2000, **20**(10): 1429~1434
- 4 Zhang Qican, Su Xianyu. Dynamic liquid surface shape measurement[J]. *Acta Optica Sinica*, 2001, **21**(12): 1506~1508 (in Chinese)
张启灿,苏显渝. 动态液面面形测量[J]. *光学学报*, 2001, **21**(12): 1506~1508
- 5 Chen Xiaorong, Cai Ping, Shi Wenkang. The latest development of optical non-contact 3D profile [J]. *Optics and Precision Engineering*, 2002, **10**(5): 528~532 (in Chinese)
陈晓荣,蔡萍,施文康. 光学非接触三维形貌测量技术新进展[J]. *光学精密工程*, 2002, **10**(5): 528~532
- 6 Weng Jiawen, Zhong Jingang. Application of Gabor transform to 3-D shape analysis[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2003, **32**(8): 993~996 (in Chinese)
翁嘉文,钟金钢. 加窗傅里叶变换在三维形貌测量中的应用[J]. *光子学报*, 2003, **32**(8): 993~996
- 7 Weng Jiawen, Zhong Jingang. Application of dilating Gabor transform to 3-D shape analysis[J]. *Acta Optica Sinica*, 2004, **24**(6): 925~929 (in Chinese)
翁嘉文,钟金钢. 伸缩窗口傅里叶变换在三维形貌测量中的应用[J]. *光学学报*, 2004, **24**(6): 925~929
- 8 Zhong Jingang, Weng Jiawen. Dilating Gabor transform for the fringe analysis of 3-D shape measurement [J]. *Opt. Engng.*, 2004, **43**(4): 895~899
- 9 David P. Casasent, John-Scott Smokelin, Anqi Ye. Wavelet and Gabor transforms for detection[J]. *Opt. Engng.*, 1992, **31**(9): 1893~1898
- 10 Rong-Seng Chang, Jin-Yi Sheu, Ching-Huang Lin *et al.*. Analysis of CCD Moiré pattern for micro-range measurements using the wavelet transform[J]. *Opt. and Laser Technol.*, 2002, **35**(1): 43~47
- 11 H. Jeong. Analysis of plate wave propagation in anisotropic laminates using a wavelet transform[J]. *NDT&E International*, 2001, **34**(1): 185~190
- 12 Brian Telfer, Harold H. Szu. New wavelet transform normalization to remove frequency bias[J]. *Opt. Engng.*, 1992, **31**(9): 1830~1834
- 13 René A. Carmona, Wen L. Hwang, Brun Torrèsani. Characterization of signals by the ridges of their wavelet transforms[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1997, **45**(10): 2586~2590
- 14 Cesar A. Sciammarella, Tae-eui Kim. Determination of strains from fringe patterns using space-frequency representations[J]. *Opt. Engng.*, 2003, **42**(11): 3182~3193