

文章编号: 0253-2239(2005)03-419-6

克尔介质中纠缠光与三能级原子作用的光子统计*

郑小虎 曹卓良

(安徽大学物理与材料科学学院, 信息材料与器件省重点实验室, 合肥 230039)

摘要: 采用求解薛定谔方程和数值计算方法, 研究了克尔介质中双模纠缠相干光场与三能级原子相互作用系统的光子统计性质, 分析了双模纠缠相干光场的纠缠程度、克尔介质与光场的耦合强度、双模光的平均光子数和原子基态概率幅对光子统计性质的影响。结果表明: 双模纠缠相干光场的纠缠程度对光子统计性质没有明显的影响; 克尔效应增强使光子统计性质的时间演化曲线的振荡频率变大、振荡幅度变小; 当保持场模 1 的平均光子数不变而场模 2 的平均光子数变小时, 光子统计性质的时间演化曲线的振荡幅度变大。

关键词: 量子光学; 双模纠缠相干光场; V 型三能级原子; 克尔介质; 光子统计性质

中图分类号: O431.2 文献标识码: A

The Statistics of Photon of Entangled Fields Interacting with a Three-Level Atom in Kerr Medium

Zheng Xiaohu Cao Zhuoliang

(Province Key Laboratory of Information Material and Devices, School of Physics and Material Science, Anhui University, Hefei 230039)

Abstract: The statistic properties of photon in the system of a two-mode entangled coherent fields interacting with a V-type three-level atom in Kerr medium are investigated by solving Schrödinger equation and numerical calculations. The effects on the statistic properties of photon induced by the degree of entanglement of the two-mode entangled coherent fields, the coupling degree of the Kerr medium with the light field, the mean photon numbers and the ground state probability amplitude of atomic initial state are analyzed. The results indicate that the influence of the degree of entanglement of the two-mode entangled coherent fields on the statistic properties of photon isn't noticeable. The enhancing of Kerr effect results in the increase of the oscillating frequency of the time evolution curve of statistic properties of photon and the decrease of the oscillating amplitude of the curve. When the mean photon numbers of the mode 1 remain unchanged and the mean photon numbers of the mode 2 decreased, the oscillating amplitude of the curve increases.

Key words: quantum optics; two-mode entangled coherent fields; V-type three-level atom; Kerr medium; statistic properties of photon

1 引 言

自 Jaynes-Cummings 模型提出以来, 人们利用此模型及其拓展形式^[1~3], 对光场和原子相互作用作了广泛的研究, 并揭示了光场和原子的许多非经典特性, 如光子的量子统计性质^[4~6]就是光场典型的非经典特性。由于介质环境为原子与场相互作用系统的真实环境, 研究介质的存在对系统的量子特性的影响具有实际意义, 因此人们对介质环境中光场与原子相互作用系统的光子的量子统计性质进行

了深入的研究^[7,8]。

量子纠缠现象首先被爱因斯坦、波多尔斯基、罗森(Einstein, Podolsky, Rosen)^[9]和薛定谔注意到, 是量子力学不同于经典物理最奇特、最不可思议的特征。量子信息学中, 纠缠态扮演着重要的角色, 它在量子态传输、稠密编码、密钥分配、量子计算加速、量子纠错等方面起关键作用, 因此, 纠缠光场与原子相互作用所呈现的非经典特性尤其具有理论和应用价值。近几年来, 人们的研究大多集中在非纠缠光场

* 安徽省自然科学基金(03042401)、安徽省教育厅重点项目基金(2004kj005zd)、安徽省信息材料与器件重点实验室基金和安徽大学人才队伍建设经费资助课题。

作者简介: 郑小虎(1964~), 男, 安徽宿松人, 安徽大学物理系讲师, 硕士, 主要从事量子光学方面的研究。

E-mail: zhengxh@mail.hf.ah.cn

与原子相互作用所呈现的特性上,而对纠缠光场与原子相互作用所呈现出的特性关注不多。本文研究了克尔介质中双模纠缠相干光场^[10]与 V 型三能级原子相互作用系统的光子统计性质。

2 模型和系统的态矢量

克尔介质与双模光场的耦合在绝热近似和忽略相位自调制效应近似下,相互作用哈密顿量可表示为

$$V_1 = xa_1^\dagger a_1 a_2^\dagger a_2, \quad (1)$$

其中 x 表示克尔介质与光场相互作用的耦合强度, a_i^\dagger 和 a_i ($i = 1, 2$) 分别是频率为 ν_i 的光场的产生和湮没算符。

V 型三能级原子与双模场在具有 $\Delta_1 = \omega_2 - \omega_0 - \nu_1$, $\Delta_2 = \omega_1 - \omega_0 - \nu_2$ 单光子失谐量的情况下,相互作用如图 1 所示,其哈密顿量在旋波近似下为^[11,12]

$$V_2 = \Delta_1 \sigma_{22} + \Delta_2 \sigma_{11} + g_1 (a_1 \sigma_{20} + a_1^\dagger \sigma_{02}) + g_2 (a_2 \sigma_{10} + a_2^\dagger \sigma_{01}), \quad (2)$$

g_1, g_2 为光场与原子相互作用的耦合常数, $\sigma_{i,j} = |i\rangle\langle j|$ ($i, j = 0, 1, 2$) 为原子算符。

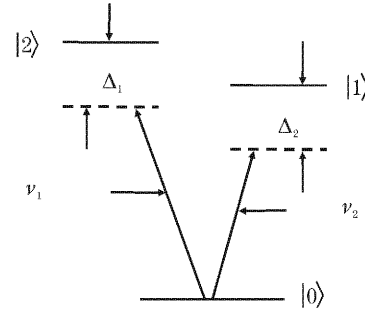


图 1 V 型三能级原子与双模光场相互作用系统
Fig. 1 The system of a V-type three-level atom interacting with the two-mode field

考虑一个 V 型三能级原子处在充满克尔介质腔中与双模光场相互作用的系统,描述该系统总相互作用哈密顿量 H_I 为(设 $\hbar=1$)

$$H_I = V_1 + V_2, \quad (3)$$

在相互作用绘景下,设任意时刻 t 系统的态矢为

$$|\Psi_I(t)\rangle = \sum_{n_1, n_2} \exp[-in_2(n_1+1)xt] [B_2(n_1, n_2, t) |2, n_1, n_2\rangle + B_1(n_1+1, n_2-1, t) |1, n_1+1, n_2-1\rangle + B_0(n_1+1, n_2, t) |0, n_1+1, n_2\rangle], \quad (4)$$

并设初始时刻($t=0$),原子处于如下的相干叠加态:

$$|\Psi_A(0)\rangle = \cos\theta |0\rangle + \sin\theta \exp(-i\varphi) |2\rangle, \quad (5)$$

光场处于任意态,即

$$|\Psi_F(0)\rangle = \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} F_{n_1, n_2} |n_1, n_2\rangle, \quad (6)$$

根据相互作用绘景下态矢运动方程以及初始条件,可解得式中的有关系数分别为

$$B_1(n_1, n_2, t) = \sum_{i=1}^3 \{ \lambda_i^2 F_{n_1, n_2} \exp(-i\varphi) \sin\theta - \lambda_i [F_{n_1, n_2} \exp(-i\varphi) (xn_1 + x - \Delta_2) \sin\theta + g_1 \sqrt{n_1+1} F_{n_1+1, n_2} \cos\theta] - g_2^2 n_2 F_{n_1, n_2} \exp(-i\varphi) \sin\theta + g_1 \sqrt{n_1+1} F_{n_1+1, n_2} (xn_1 + x - \Delta_2) \cos\theta \} A_i \exp(i\lambda_i t), \quad (7a)$$

$$B_1(n_1+1, n_2-1, t) = \sum_{i=1}^3 [-\lambda_i g_2 \sqrt{n_2} F_{n_1+1, n_2} \cos\theta + g_1 g_2 \sqrt{(n_1+1)n_2} F_{n_1, n_2} \exp(-i\varphi) \sin\theta + g_2 \sqrt{n_2} (xn_2 - \Delta_1) F_{n_1+1, n_2} \cos\theta] A_i \exp(i\lambda_i t), \quad (7b)$$

$$B_0(n_1+1, n_2, t) = \sum_{i=1}^3 \{ \lambda_i^2 F_{n_1+1, n_2} \cos\theta - \lambda_i [F_{n_1+1, n_2} \cos\theta (xn_1 + x - \Delta_2 + xn_2 - \Delta_1) + F_{n_1, n_2} \exp(-i\varphi) g_1 \sqrt{n_1+1} \sin\theta] + F_{n_1, n_2} \exp(-i\varphi) g_1 \sqrt{n_1+1} [x(n_1+1) - \Delta_2] \sin\theta + F_{n_1+1, n_2} (xn_2 - \Delta_1) (xn_1 + x - \Delta_2) \cos\theta \} A_i \exp(i\lambda_i t), \quad (7c)$$

式中 λ_i 和 A_i ($i = 1, 2, 3$) 分别为(λ_i 为实数)

$$\begin{cases} \lambda_1 = R \cos u - b/3, & \lambda_2 = R \cos(u + 2\pi/3) - b/3, & \lambda_3 = R \cos(u + 4\pi/3) - b/3, \\ A_1 = 1/(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1) & A_2 = 1/(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2), & A_3 = 1/(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_3), \end{cases} \quad (8)$$

式中 b, u 和 R 可由下列方程决定:

$$\begin{cases} b = -x(n_1 + n_2 + 1) + \Delta_1 + \Delta_2, \\ d = g_2^2 n_2 (x n_2 - \Delta_1) + g_1^2 (n_1 + 1) [x(n_1 + 1) - \Delta_2], \\ c = -g_2^2 n_2 - g_1^2 (n_1 + 1) + (x n_2 - \Delta_1) [x(n_1 + 1) - \Delta_2], \\ P = c - b^2/3, \quad Q = d - \frac{bc}{3} + \frac{2b^3}{27}, \quad u = \frac{1}{3} \arccos \left[-\frac{Q}{2} \left(-\frac{P}{3} \right)^{-3/2} \right], \quad R = \left(-\frac{4}{3} P \right)^{1/2}, \end{cases} \quad (9)$$

本文假设初始时光场为双模纠缠相干光场, 即

$$\begin{aligned} |\Psi_F(0)\rangle &= \alpha |\alpha_1\rangle |\alpha_2\rangle + \beta |-\alpha_1\rangle |-\alpha_2\rangle = \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} F_{n_1, n_2} |n_1, n_2\rangle = \\ &= \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} \exp \left[-\frac{1}{2} (n^2 + m^2) \right] \frac{\alpha n^{n_1} m^{n_2} + \beta (-n)^{n_1} (-m)^{n_2}}{\sqrt{n_1!} \sqrt{n_2!}} |n_1, n_2\rangle, \end{aligned} \quad (10)$$

式中 $\alpha^2 + \beta^2 = 1, \alpha \in [1, 0], \alpha, \beta$ 为描述纠缠程度的参量; $\alpha_1 = n \exp(i\psi_1), \alpha_2 = m \exp(i\psi_2), n, m$ 分别为双模光的平均光子数的平方根, ψ_1, ψ_2 分别为双模光的相位因子(上式中已设 $\psi_1, \psi_2 = 0$)。将(10)式中的 F_{n_1, n_2} 代入(7)式可得到态矢量系数的具体值, 据此可进行下面的各种计算。为简单起见, 本文已设 $g_1 = g_2 = g, \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta, \varphi = 0$ 。

数来描述, 定义为

$$g_i^{(2)}(t) = \frac{\langle a_i^{\dagger 2} a_i^2 \rangle}{\langle a_i^{\dagger} a_i \rangle^2} = \frac{\langle (a_i^{\dagger} a_i)^2 \rangle - \langle a_i^{\dagger} a_i \rangle}{\langle a_i^{\dagger} a_i \rangle^2}, \quad (i = 1, 2) \quad (11)$$

令 $G_i(t) = g_i^{(2)}(t) - 1, (i = 1, 2)$ (12)

若 $G_i(t) > 0$, 则称光子呈现聚束效应; 若 $G_i(t) = 0$, 则光场是二阶相干的; 若 $G_i(t) < 0$, 则称光子呈现反聚束效应。

据(4)式, (12)式对 $G_1(t)$ 做数值计算, 所得结果如图 2 所示。

双模光处于非纠缠($\alpha=1$)状态且光场与原子发

3 光子的统计性质

3.1 光子的聚束效应与反聚束效应

双模光场第 i 模的二阶相干度应由二阶关联函

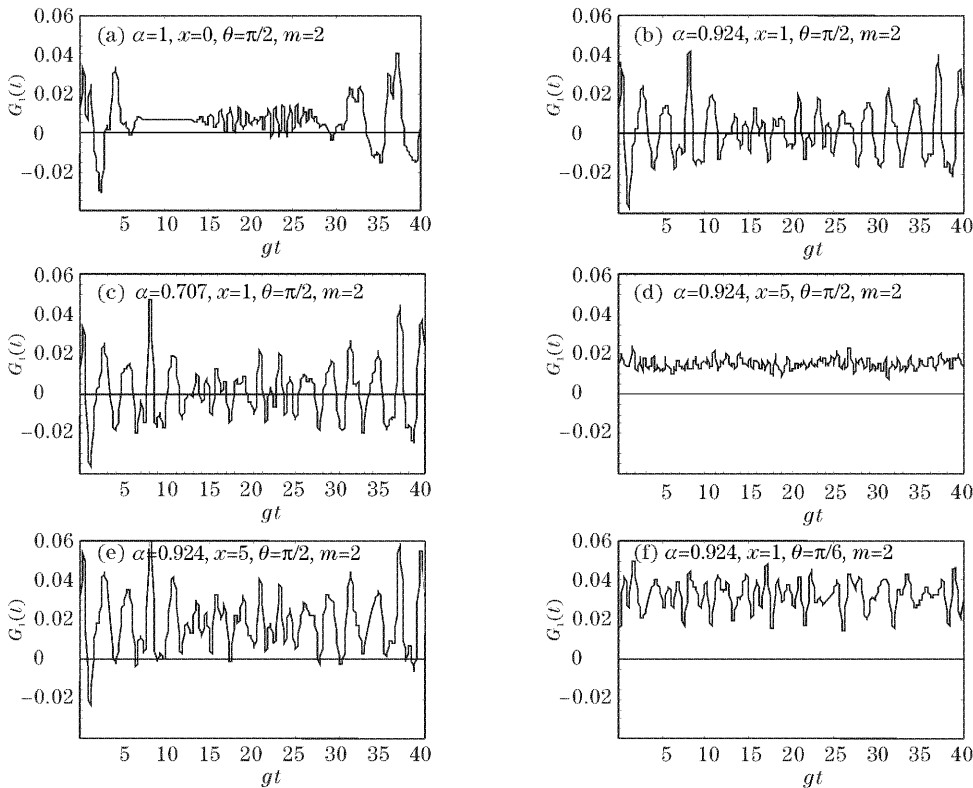


图 2 $G_1(t)$ 的时间演化曲线 ($n=2, \Delta/g=3$)

Fig. 2 Time evolution of $G_1(t)$ ($n=2, \Delta/g=3$)

生非共振作用时,光子的聚束效应与反聚束效应交替出现,聚束效应出现的时间比反聚束效应出现的时间长,如图 2(a)所示。纠缠的强弱对 $G_1(t)$ 的随时演化曲线的影响不大,如图 2(b),图 2(c)所示。克尔效应增强使得光子的反聚束效应消失,随时演化曲线的振幅变小,如图 2(b),图 2(d)所示。当保持场模 1 的光子数不变,而使场模 2 的光子数减少时可使 $G_1(t)$ 曲线的中心上移,振荡幅度略微变大,绝大部分时间呈现聚束效应,如图 2(b),图 2(e)所示。当 $\cos \theta$ 较小时,光子的聚束效应与反聚束效应交替出现;当 $\cos \theta$ 较大时,可使 $G_1(t)$ 曲线的中心上移、光子的反聚束效应消失,如图 2(b),图 2(f)所示。

3.2 模间相干性

双模光场模间相干度定义为

$$g_{12}^{(2)} = \frac{\langle a_1^+ a_2^+ a_1 a_2 \rangle}{\langle a_1^+ a_1 \rangle \langle a_2^+ a_2 \rangle}, \quad (13)$$

令 $G_{12}(t) = g_{12}^{(2)}(t) - 1, \quad (14)$

若 $G_{12}(t) > 0$, 则光场两模间呈现正相关;若 $G_{12}(t) < 0$, 则光场两模间呈现负相关。

据(4)式,(14)式对 $G_{12}(t)$ 做数值计算,所得结果如图 3 所示。

双模光处于非纠缠($\alpha = 1$)状态且光场与原子发生非共振作用时,光场两模间呈现正相关, $G_{12}(t)$ 的随时演化呈现周期性的崩塌与回复现象,如图 3(a)所示。纠缠的强弱对 $G_{12}(t)$ 的随时演化曲线的影响不大,如图 3(b)、图 3(c)所示。克尔效应增强使得 $G_{12}(t)$ 的随时演化曲线的振幅变小,也没有改变光场两模间呈现的正相关特性,如图 3(b)、图 3(d)所示。当保持场模 1 的光子数不变,而使场模 2 的光子数减少时使 $G_{12}(t)$ 曲线的中心上移,振荡幅度变大,如图 3(b)、图 3(e)所示。原子初态时基态的概率幅 $\cos \theta$ 变大使得 $G_{12}(t)$ 曲线上移、振荡幅度没有明显的变化,如图 3(b)、图 3(f)所示。

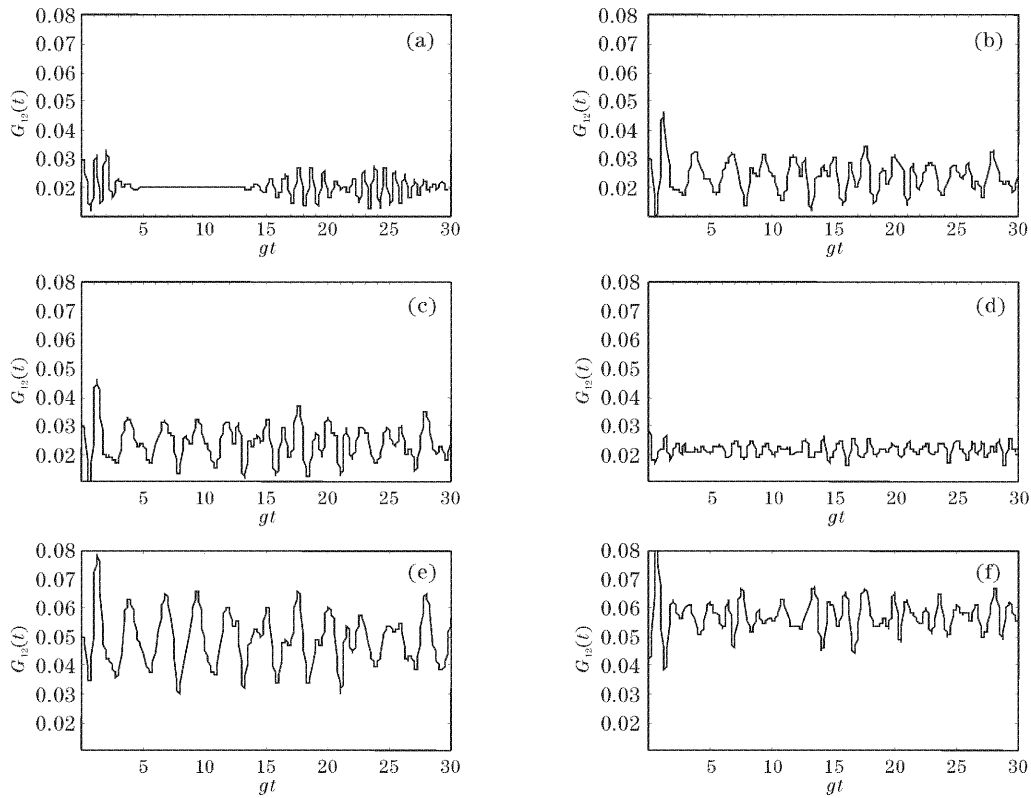


图 3 $G_{12}(t)$ 的时间演化曲线 $G_{12}(t)(n=2, \Delta/g=3)$, 图 3 设置的参量与图 2 相同

Fig. 3 Time evolution of $G_{12}(t)(n=2, \Delta/g=3)$. The parameter of Fig. 3 is the same as in Fig. 2

3.3 柯西-施瓦茨不等式

对双模光场,柯西-施瓦茨(Cauchy-Schwartz)不等式定义为

$$\langle a_1^+ a_2^+ a_1 a_2 \rangle^2 \leq \langle a_1^+ a_1 \rangle \langle a_2^+ a_2 \rangle, \quad (15)$$

令 $I(t) = \frac{|\langle a_1^+ a_1 \rangle \langle a_2^+ a_2 \rangle|^{1/2}}{\langle a_1^+ a_2^+ a_1 a_2 \rangle} - 1 = \frac{|[\langle (a_1^+ a_1)^2 \rangle - \langle a_1^+ a_1 \rangle^2] \cdot [\langle (a_2^+ a_2)^2 \rangle - \langle a_2^+ a_2 \rangle^2]}{\langle a_1^+ a_2^+ a_1 a_2 \rangle} - 1, \quad (16)$

若 $I(t) > 0$, 则光场两模间的相关为经典相关; 若 $I(t) < 0$, 则光场两模间的相关为非经典相关。

根据(4)式, (16)式对 $I(t)$ 做数值计算, 所得结果如图 4 所示。

当双模光处于非纠缠($\alpha = 1$) 状态且光场与原子发生非共振作用时, 在相互作用初期光场两模间经典相关与非经典相关交替出现, 在此之后为经典相关, 如图 4(a)所示。纠缠的强弱对 $I(t)$ 的随时演

化曲线的影响不大, 如图 4(b), 图 4(c)所示。克尔效应增强使得光场两模间经典相关消失, $I(t)$ 曲线的振荡幅度变小, 如图 4(b), 图 4(d)所示。当保持场模 1 的光子数不变, 而使场模 2 的光子数减少时可使光场两模间绝大部分时间出现非经典相关, 如图 4(b), 图 4(e)所示。原子初态时基态的概率幅 $\cos \theta$ 变大使得 $I(t)$ 曲线下移、光场两模间相关为非经典相关, 如图 4(b), 图 4(f)所示。

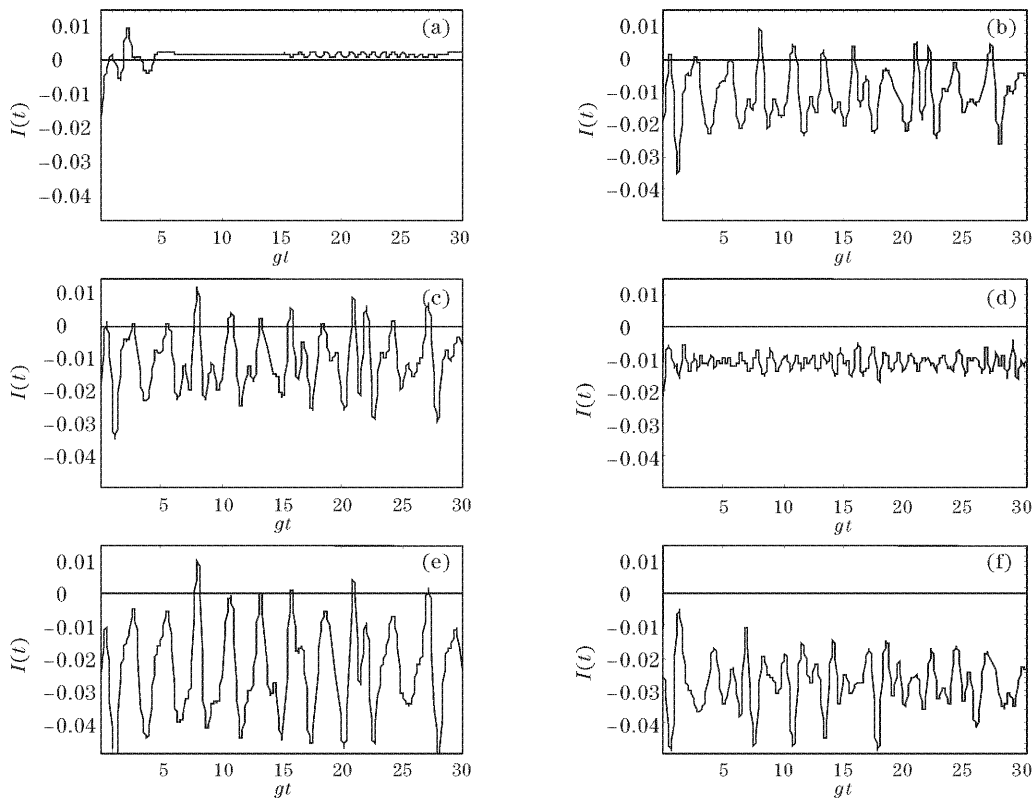


图 4 $I(t)$ 的时间演化曲线 $I(t)$ ($n=2, \Delta/g=3$), 图 4 设置的参量与图 2 相同

Fig. 4 Time evolution of $I(t)$ ($n=2, \Delta/g=3$). The parameter of Fig. 4 is the same as in Fig. 2

4 结 论

本文研究了克尔介质中双模纠缠相干光场与 V 型三能级原子相互作用系统的光子统计性质, 分析了光子的聚束与反聚束效应、模间相干性、柯西-施瓦茨不等式与双模纠缠相干光场的纠缠程度、克尔介质与光场的耦合强度、双模光的平均光子数和原子基态概率幅之间的依赖关系。结果表明: 双模纠缠相干光场的纠缠程度对光子统计性质没有明显的影响; 克尔效应增强使演化曲线向上或向下作显著移动, 曲线的振荡频率变大、振荡幅度变小; 当保持场模 1 的光子数不变而场模 2 的光子数变小时, 也使演化曲线向上或向下显著移动、曲线的振荡幅度

变大; 原子初态的基态概率幅变大使演化曲线向上或向下显著移动。

参 考 文 献

- 1 D. F. Walls, P. Zoller. Reduced quantum fluctuations in resonance fluorescence [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1981, **47**(10): 709~711
- 2 W. K. Lai, V. Buek. P. L. Knight. Dynamics of a three-level atom in a two-mode squeezed vacuum [J]. *Phys. Rev. (A)*, 1991, **44**(10): 6043~6056
- 3 Zhou Peng, Peng Jingsheng. Evolution of the multiphoton Jaynes-Comings model [J]. *Acta Optica Sinica*, 1990, **10**(9): 837~844 (in Chinese)
周 鹏, 彭金生. 多光子 Jaynes-Comings 模型的演化 [J]. *光学学报*, 1990, **10**(9): 837~844
- 4 Wang Jisuo, Sun Changyong, Zhao Mingjian. Nonclassical properties of even and odd qs-coherent states [J]. *Acta Optica*

- Sinica*, 1997, **17**(3): 291~297 (in Chinese)
王继锁,孙长勇,赵铭健. 偶奇 qs 相干态的非经典特性[J]. *光学学报*, 1997, **17**(3): 291~297
- 5 Lai Yunzhong, Zhou Wei. Dynamics of two-mode SU(1,1) coherent state interacting with a three-level cascade atom[J]. *Acta Optica Sinica*, 1997, **17**(10): 1323~1326 (in Chinese)
赖云忠,周 伟. 双模 SU(1,1)相干态场与级联三能级原子相互作用的动力学[J]. *光学学报*, 1997, **17**(10): 1323~1326
- 6 Liu Youwen, Chen Changyuan. Quantum statistic properties of the superposition of the q-coherent states[J]. *Acta Optica Sinica*, 1999, **19**(11): 1459~1463 (in Chinese)
刘友文,陈昌远. 叠加 q 相干态的量子统计性质[J]. *光学学报*, 1999, **19**(11): 1459~1463
- 7 Liu Huien, Fang Maofa, Jia Zhaoping. Antibunching of the field of the multiphoton J-C model in a Kerr-like medium[J]. *Acta Optica Sinica*, 1994, **14**(7): 709~713 (in Chinese)
刘惠恩,方卯发,贾兆平. 类克尔媒质中多光子 J-C 模型场的反聚束效应[J]. *光学学报*, 1994, **14**(7): 709~713
- 8 Fang Jiayuan, Huang Chunjia, Huang Zuhong *et al.*. Statistic properties of photon in the system of two coupling atom interaction with two-mode squeezed vacuum field in Kerr medium[J]. *Acta Physica Sinica*, 2004, **53**(4): 1082~1087 (in Chinese)
方家元,黄春佳,黄祖洪 等. Kerr 介质中耦合双原子与双模压缩真空场相互作用系统的光子统计性质[J]. *物理学报*, 2004, **53**(4): 1082~1087
- 9 A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen *et al.*. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete [J]. *Phys. Rev.*, 1935, **47**(10): 777~780
- 10 B. C. Sanders. The entangled coherent states[J]. *Phys. Rev. (A)*, 1992, **45**(9): 6811~6815
- 11 Yang Xiaoxue, Wu Ying. Effective Raman theory for a three-level atom in the V-configuration[J]. *Commun. Theor. Phys.*, 1999, **32**(2): 189~194
- 12 Guo Guangcan. *Quantum Optics* [M]. Beijing: Higher Education Press, 1990. 281~282 (in Chinese)
郭光灿. *量子光学* [M]. 北京:高等教育出版社, 1990. 281~282