

文章编号: 0253-2239(2005)03-377-5

平稳状态下匹配介质三层漫射方程的 空间分辨漫反射*

王喜昌¹ 官彦军^{1,2} 宋东草¹ 王仲训¹
(¹ 烟台大学光电信息技术学院, 烟台 264005)
(² 西安电子工业大学物理系, 西安 710071)

摘要: 如果应用漫射方程分析和确定生物表面组织的光学特性, 就能够确定生物活体是否发生病变, 实现生物活体的无损探测。目前, 光在生物体内传播常用的基本模型是半无限厚模型和两层介质模型。而实际上, 人体组织为多层介质。根据漫射方程理论, 在平稳状态条件下, 使用外推边界条件, 精确给出了匹配介质中平稳状态下三层体系光的漫射方程格林函数的解。通过此解, 可以算出空间分辨漫反射。使用蒙特卡罗方法来验证三层体系的漫射方程, 发现我们给出的理论解, 不仅可以包括与 Kienle 的结论一致的两层体系模型的空间分辨漫反射的解, 而且三层体系漫射方程的空间分辨漫反射解和蒙特卡罗方法基本一致。

关键词: 生物光学; 匹配介质; 漫射方程; 平稳状态; 空间分辨漫反射

中图分类号: Q63 文献标识码: A

The Spatially Resolved Scattered Reflection of Three-Layered Matched Media Diffusion Equation in the Steady-State

Wang Xichang¹ Gong Yanjun² Song Dongcao¹ Wang Zhongxun¹
(¹ Department of Physics, Yantai University, Yantai 264005)
(² Department of Science, Xidian University, Xian 710071)

Abstract: If we can apply the diffuse equation to analyze and decide optical properties of superficial biological tissue, we can determine if the pathological changes occur in vivo, thus we can realize the noninvasive in vivo measurement. Currently, a semi-infinite media photon migration model and a two-layered turbid medium model are utilized widely. But actually, there is a multi-layered turbid medium in tissue. According to the diffusion equation, employing the extrapolated boundary condition, we analyze the diffusion of photons of a three-layered matched medium and deduce the solution of Green's function. Through comparing the spatially resolved reflectance between the solution of three-layered matched media diffusion equation and Monte-Carlo simulation, we find our solution of a three layered matched media theory not only accords with a two-layered turbid medium model which is solved by A. Kienle, but also agrees with Monte-Carlo simulation.

Key words: biological optics; matched medium; diffusion equation; steady-state; spatially resolved reflectance

1 引 言

光在生物体组织中的传播得到广泛研究和应用。近年来, 很多研究者分析漫射模型理论, 确定光在生物组织中的传输特性, 确认生物组织的状态, 为医疗和研究提供证据。如根据漫射模型对生物体活

组织进行无损测量, 这些研究的基础理论是玻尔兹曼方程。该方程通过简化, 转化为漫射方程。因其在理论预测中具有较高的数学稳定性而被广泛采用。

一般情况下, 生物体的表面组织可以作为一个

* 国家自然科学基金(60371020)资助课题。

作者简介: 王喜昌(1968~), 男, 烟台大学副教授, 主要从事生物医学光学和颜色光学等方面的研究。

E-mail: wangxichang@ytu.edu.cn.

收稿日期: 2003-07-30; 收到修改稿日期: 2004-05-25

半无限厚的混浊介质来看待。可采用方法包括平穩态、频域、时域的各种方法对生物体表面进行研究, 这些方法同样在多层介质中得到广泛应用。

一些研究指出, 表面组织可以看作两层介质, 每层介质中有不同的吸收系数和散射系数。相应地发展和建立了两层介质模型。而组织的两层混浊介质模型比半无限厚的模型更具有现实意义, 如人体表面可以分为皮肤(表皮和真皮)和肌肉, 因而被一些研究人员所采用, 建立了双层混浊介质的漫射模型, 它的精确性被计算机模拟和实验数据所证实。

王建岗等^[1,2]进行了光在分层散射介质中传输行为的蒙特卡罗模拟研究。由于蒙特卡罗模拟具有较高的准确性, 经常用来验证理论是否准确。程树英等^[3]用蒙特卡罗法研究折射率对光在组织中的漫反射率和吸收比的影响, 许棠等^[4]使用蒙特卡罗模拟研究连续光在生物组织中能流率分布的漫射近似和模拟。

很多人对生物体内的特性进行了研究, 如张智等^[5]研究了非均匀生物组织中光子迁移的数值方法, 魏华江^[6]研究了 808 nm 近红外激光辐照三种不同的离体人组织的光传输特性, 而来建成等^[7]研究人员指出, 半无限厚的介质模型如果发生病变, 可以转化为三层体系。

本文通过使用傅里叶变换和拉普拉斯变换方法, 通过漫射方程与外推边界条件, 建立并给出了平穩状态下的三层匹配介质散射方程格林函数的解。

为了验证我们给出的漫射方程的解, 使用蒙特

卡罗方法进行模拟, 并与漫射方程的解进行比较, 发现二者基本一致。

2 三层混浊匹配介质慢射方程的解

Kienie 等^[8,9]解决了平穩状态下匹配介质两层混浊介质模型漫射方程, 并且被 Alexandrakis^[10]在频域中应用。这里我们给出三层和匹配漫射方程的解。

假设无限薄的光束垂直照射在三层混浊介质中(图 1), 光束在深度为 $z = z_0 = 1/(\mu'_{s1} + \mu_{a1})$ 的最上层介质被散射。这里 μ_{ai} 是第 i 层吸收系数, μ'_{si} 是第 i 层等效各项同性散射系数, 其表达式为 $\mu'_{si} = \mu_s(1 - g)$, μ_s 是散射系数, g 为探测角的平均余弦。初始坐标点 $(0, 0, 0)$ 为光束进入混浊介质时, 与第一层介质相交的点, z 轴垂直介质表面, x, y 轴平行于介质表面, 其中 $\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$ 。

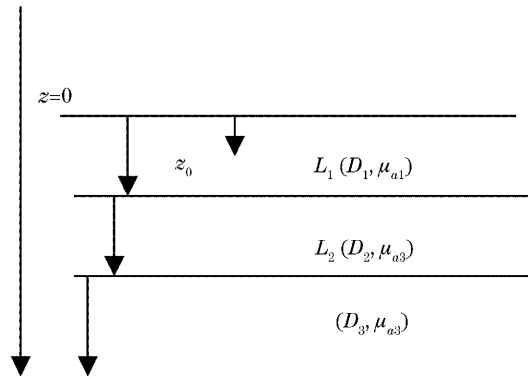


图 1 三层匹配介质漫射模型

Fig. 1 The model of three-layered matched media

这样, 平穩状态方程为:

$$D_1 \Delta \Phi_1(r) - \mu_{a1} \Phi_1(r) = -\delta(x, y, z - z_0), \quad 0 \leq z < L_1 \tag{1}$$

$$D_2 \Delta \Phi_2(r) - \mu_{a2} \Phi_2(r) = 0, \quad L_1 \leq z < L_2 \tag{2}$$

$$D_3 \Delta \Phi_3(r) - \mu_{a3} \Phi_3(r) = 0, \quad L_2 \leq z \tag{3}$$

其中 $r = (x, y, z)$, $D_i = 1/3(\mu'_{si} + \mu_{ai})$, Φ_i 是第 i 层的能流率。

对 Φ_i 通过二维傅里叶变换^[8,9]

$$\phi_i(z, s_1, s_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_i(x, y, z) \exp[i(s_1 x + s_2 y)] dx dy, \tag{4}$$

对(4)式应用到(1)式~(3)式, 得到:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \phi_1(z, s) - a_1^2 \phi_1(z, s) = -\frac{1}{D_1} \delta(z - z_0), \quad 0 \leq z < L_1 \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \phi_2(z, s) - a_2^2 \phi_2(z, s) = 0, \quad L_1 \leq z < L_2 \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \phi_3(z, s) - a_3^2 \phi_3(z, s) = 0, \quad L_2 \leq z < L_3 \tag{7}$$

其中 $a_i^2 = (D_i s^2 + \mu_{ai})/D_i$, $s^2 = s_1^2 + s_2^2$ 。

上面的方程通过适当的边界条件可以求解, 同样通过对边界条件的傅里叶变换, 得到边界条件为

$$\phi_1(-z_b, s) = 0, \quad (8)$$

$$\phi_1(L_1, s) / [\phi_2(L_1, s)] = 1, \quad (9)$$

$$D_1 \frac{\partial \phi_1(z, s)}{\partial z} \Big|_{z=L_1} = D_2 \frac{\partial \phi_2(z, s)}{\partial z} \Big|_{z=L_1}, \quad (10)$$

$$\phi_2(L_2, s) / [\phi_3(L_2, s)] = 1, \quad (11)$$

$$D_2 \frac{\partial \phi_2(z, s)}{\partial z} \Big|_{z=L_2} = D_3 \frac{\partial \phi_3(z, s)}{\partial z} \Big|_{z=L_2}, \quad (12)$$

$$\phi_3(\infty_b, s) = 0, \quad (13)$$

(8) 式是组织与空气交接处的外推边界条件^[11], 方程中 z_b 表达式为^[11]

$$z_b = \frac{1 + R_{\text{eff}}}{1 - R_{\text{eff}}} 2D_1, \quad (14)$$

其中 R_{eff} 表示光在边界处的内部反射率, 可以根据参考文献[11] 计算。(9) 式与(11) 式是匹配边界条件^[8,9]。这样, 可以建立起 $\phi(z, s)$ 三层体系的解:

$$\phi_1(z, s) = \frac{\sinh a_1(z_b + z_0)}{D_1 a_1} \times \frac{D_1 a_1 l_1 \cosh a_1(L_1 - z) + D_2 a_2 m_1 \sinh a_1(L_1 - z)}{D_1 a_1 l_1 \cosh a_1(L_1 + z_b) + D_2 a_2 m_1 \sinh a_1(L_1 + z_b)} - \frac{\sinh[a_1(z_0 - z)]}{D_1 a_1}, \quad 0 \leq z < z_0, \quad (15)$$

$$\phi_2(z, s) = \frac{\sinh a_1(z_b + z_0)}{D_1 a_1} \times \frac{D_1 a_1 l_1 \cosh a_1(L_1 - z) + D_2 a_2 m_1 \sinh a_1(L_1 - z)}{D_1 a_1 l_1 \cosh a_1(L_1 + z_b) + D_2 a_2 m_1 \sinh a_1(L_1 + z_b)}, \quad z_0 \leq z < L_1 \quad (16)$$

$$\phi_2(z, s) = \frac{l_1 [D_3 a_3 \sinh a_2(L_2 - z) + D_2 a_2 \cosh a_2(L_2 - z)]}{D_1 a_1 l_1 \cosh a_1(L_1 + z_b) + D_2 a_2 m_1 \sinh a_1(L_1 + z_b)} \times \frac{\sinh a_1(z_b + z_0)}{D_3 a_3 \sinh a_2(L_2 - L_1) + D_2 a_2 \cosh a_2(L_2 - L_1)}, \quad (17)$$

$$\phi_3(z, s) = \frac{l_1 D_2 a_2 \exp[a_3(L_2 - z)]}{D_1 a_1 l_1 \cosh a_1(L_1 + z_b) + D_2 a_2 m_1 \sinh a_1(L_1 + z_b)} \times \frac{\sinh a_1(z_b + z_0)}{D_3 a_3 \sinh a_2(L_2 - L_1) + D_2 a_2 \cosh a_2(L_2 - L_1)}, \quad (18)$$

其中

$$l_1 = D_3 a_3 \sinh a_2(L_2 - L_1) + D_2 a_2 \cosh a_2(L_2 - L_1),$$

$$m_1 = D_3 a_3 \cosh a_2(L_2 - L_1) + D_2 a_2 \sinh a_2(L_2 - L_1),$$

将这个解进行傅里叶逆变换^[8,9], 可得到能流率的解:

$$\Phi_i(\rho, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \phi_i(z, s) \exp[-i(s_1 x + s_2 y)] ds_1 ds_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \phi_i(z, s) s J_0(s\rho) ds, \quad (19)$$

其中 J_0 是零阶贝塞尔函数, 通过数值计算, 可以确定具体结果。

3 理论验证

为了验证给出的漫射方程, 将方程转化为可以实际测量的量——空间分辨漫反射。Haskell^[11] 给出了在表面计算空间分辨漫反射的办法, 其方程为

$$R(\rho) = \int_{2\pi} d\Omega [1 - R_{\text{fres}}(\theta)] \times \frac{1}{4\pi} \left[\Phi_1(\rho, z=0) + 3D_1 \frac{\partial \Phi_1(\rho, z=0)}{\partial z} \cos \theta \right] \times \cos \theta, \quad (20)$$

这里 $R_{\text{fres}}(\theta)$ 是非涅耳反射系数, 对于介质的空间分辨漫反射 $n = 1.4$, 上面方程可以写为^[11]

$$R(\rho) = 0.118\Phi_1(\rho, z=0) + 0.306D_1 \frac{\partial \Phi_1(\rho, z)}{\partial z} \Big|_{z=0}, \quad (21)$$

蒙特卡罗模型通过相应的概率模型和随机数发生器产生的随机数来模拟单个光子在介质中的行走过程,是一个广泛应用且较为理想的方法。为了验证解是否正确,使用蒙特卡罗方法模拟,并进行比

较,如图 2 所示。图 2 中显示了空间分辨漫反射与中心点距离的曲线。圆表示蒙特卡罗方法模拟的结果,十字线表示三层模型解的结果。每个例子中发射二百万个光子。

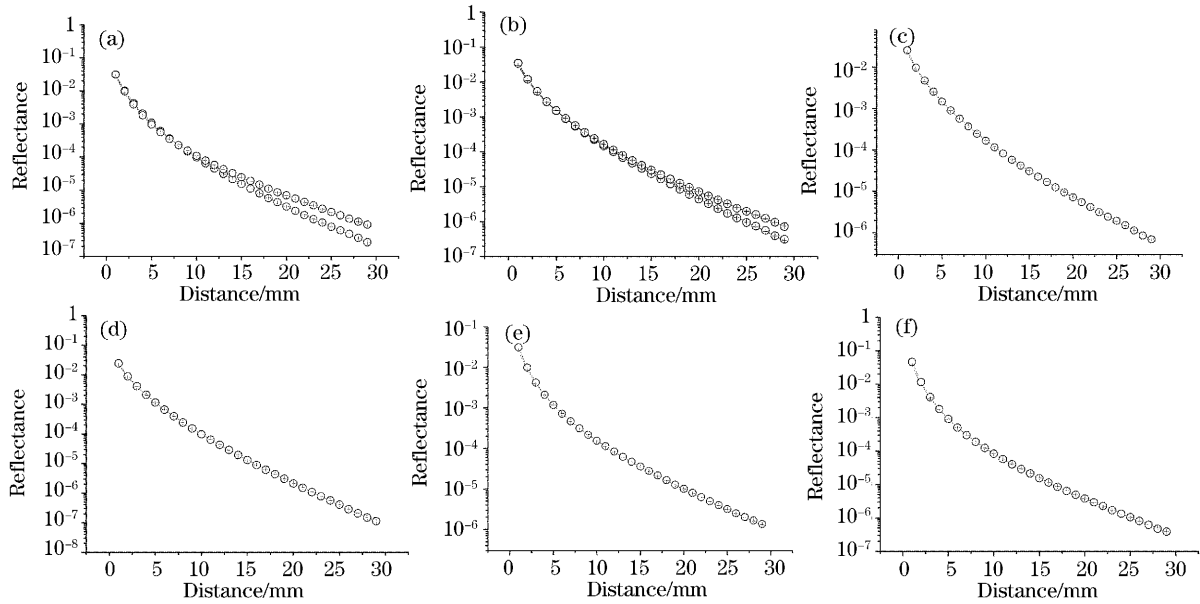


图 2 稳态的空间分辨漫反射(+)与蒙特卡罗方法模拟(o)

Fig. 2 Comparison of the steady-state spatially resolved reflectance calculated with Eq. (21) (+) to Monte Carlo simulations (o)

3.1 对两层体系和半无限厚体系的验证

将两层体系按照三层来处理,也就是将某一层化为两层,将两层体系变成三层体系。然后可以使用蒙特卡罗方法模拟空间分辨漫反射进行验证。

图 2(a)中介质的光学参量分别为 $\mu_{a1} = 0.02 \text{ mm}^{-1}$, $\mu'_{s1} = 1.3 \text{ mm}^{-1}$, $\mu_{a2} = 0.01 \text{ mm}^{-1}$, $\mu'_{s2} = 1.2 \text{ mm}^{-1}$, $\mu'_{s2} = 0.7 \text{ mm}^{-1}$, 第一层厚度为 2 mm。上面的曲线为 $\mu'_{s2} = 0.7 \text{ mm}^{-1}$ 的曲线,下面的是 $\mu'_{s2} = 1.2 \text{ mm}^{-1}$ 的曲线。图 2(b)中介质的光学参量分别为 $\mu_{a1} = 0.005 \text{ mm}^{-1}$, $\mu'_{s1} = 1.3 \text{ mm}^{-1}$, $\mu_{a2} = 0.01 \text{ mm}^{-1}$, $\mu'_{s2} = 1.0 \text{ mm}^{-1}$, $\mu_{a1} = 0.005 \text{ mm}^{-1}$, $\mu'_{s1} = 1.3 \text{ mm}^{-1}$, $\mu_{a2} = 0.022 \text{ mm}^{-1}$, $\mu'_{s2} = 1.0 \text{ mm}^{-1}$, 第一层厚度为 6 mm。上面为 $\mu_{a2} = 0.01 \text{ mm}^{-1}$ 的曲线,下面为 $\mu_{a2} = 0.022 \text{ mm}^{-1}$ 的曲线。

Kienle 研究了三层体系下的漫射方程的解,并用图 2(a)、图 2(b)中的两个例子进行验证。使用三层体系的解来研究两层体系,其结果不但与蒙特卡罗方法模拟的结果一致,而且与 Kienle 的结果一致,说明三层体系漫射方程的解是正确的,可以解决两层体系的问题。

同样,可以用三层体系解决半无限厚介质的漫射问题。将半无限厚介质变成三层光学参量都相同

的介质,图 2(c)、图 2(d)为半无限厚介质空间分辨漫反射率与中心点距离的曲线。图 2(c)中介质的光学参量分别为 $\mu_a = 0.01 \text{ mm}^{-1}$, $\mu'_s = 1.0 \text{ mm}^{-1}$ 。图 2(d)中参量为 $\mu_a = 0.02 \text{ mm}^{-1}$, $\mu'_s = 1.0 \text{ mm}^{-1}$ 。

3.2 对三层体系的验证

图 2(e)、图 2(f)显示了三层体系介质的空间分辨漫反射与距离的关系曲线,图 2(e)中这三层介质的光学参数为 $\mu_{a1} = 0.01 \text{ mm}^{-1}$, $\mu'_{s1} = 1.3 \text{ mm}^{-1}$, $\mu_{a2} = 0.01 \text{ mm}^{-1}$, $\mu'_{s2} = 1.0 \text{ mm}^{-1}$, $\mu_{a3} = 0.01 \text{ mm}^{-1}$, $\mu'_{s3} = 0.7 \text{ mm}^{-1}$, 第一层厚度和第二层厚度为 1 mm。

图 2(f)中参量为 $\mu_{a1} = 0.01 \text{ mm}^{-1}$, $\mu'_{s1} = 2.0 \text{ mm}^{-1}$, $\mu_{a2} = 0.01 \text{ mm}^{-1}$, $\mu'_{s2} = 1.5 \text{ mm}^{-1}$, $\mu_{a3} = 0.01 \text{ mm}^{-1}$, $\mu'_{s3} = 1.0 \text{ mm}^{-1}$, 第一层厚度为 1 mm, 第二层厚度为 2 mm。

图 2(e)、图 2(f)说明,三层漫射方程的解和蒙特卡罗方法模拟的结果基本一致,其解是正确的。

4 误差分析

从图 2 可以看到,靠近原点(光源)处,十字线和圆心有较大的偏离,误差较大。为验证我们的推论公式与蒙特卡罗方法模拟的差别,以图 2(e)、图 2(f)为

列进行分析,计算相对误差:

$$\text{相对误差} = \frac{|(\text{理论值} - \text{蒙特卡罗方法模拟值})|}{\text{蒙特卡罗方法模拟值}}$$

得到图 3。图 3(a)为图 2(e)的相对误差,图 3(b)

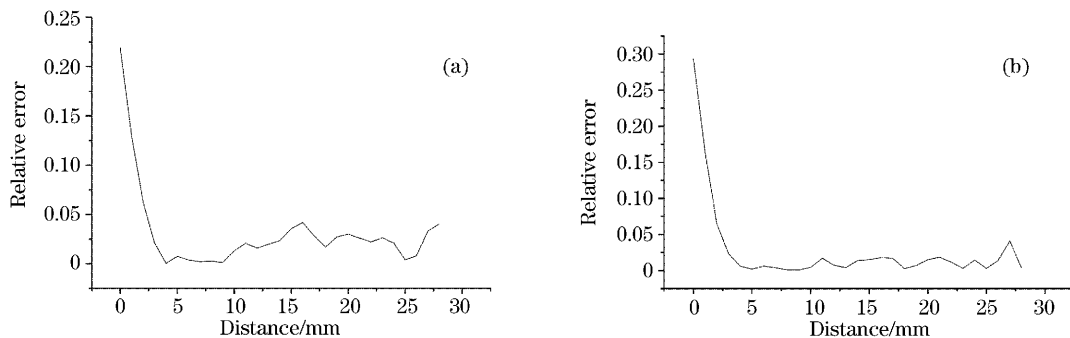


图 3 相对误差和距离的关系

Fig. 3 The relationship between relative error and distance

5 结 论

通过蒙特卡罗模拟,验证了平稳状态下三层漫射方程的解的正确性。而且该方程还可以推广到两层体系和半无限厚介质中去。三层漫射方程的建立,可以更深入地了解生物组织的漫射特性,可以更好的判断人体组织的光学特性,为建立更多层介质的漫射方程奠定了基础。

参 考 文 献

- 1 Wang Jiangang, Wang Guiying, Xu Zhizhan. Monte-Carlo simulation for light propagation in striated scattering medium[J]. *Acta Optica Sinica*, 2000, **20**(3): 346~350 (in Chinese)
王建岗,王桂英,徐至展. 光在分层介质中传输行为的蒙特卡罗模拟研究[J]. *光学学报*, 2000, **20**(3): 346~350
- 2 Wang Jiangang, Wang Guiying, Xu Zhizhan. Monte-Carlo simulations for time characteristics of light propagation in scattering medium[J]. *Acta Optica Sinica*, 2001, **21**(2): 155~157 (in Chinese)
王建岗,王桂英,徐至展. 散射介质中光传输行为为时间特性的蒙特卡罗模拟研究[J]. *光学学报*, 2001, **21**(2): 155~157
- 3 Cheng Shuying, Shen Hongyuan, Chen Meifeng. Research on the influence of refractive index on diffuse reflectance and absorbance in tissue by monte Carlo method[J]. *Chin. J. Lasers*, 2004, **31**(2): 169~172 (in Chinese)
程树英,沈鸿元,陈美峰. 用蒙特卡罗法研究折射率对光在组织中的漫反射率和吸收比的影响[J]. *中国激光*, 2004, **31**(2): 169~172
- 4 Xu Tang, Zhang Chunping, Wang Xinyu *et al.*. Diffusion approximation and modeling for fluence rate distribution of the CW2 light in biological[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2003, **32**(5): 571~575 (in Chinese)

为图 2(f)的相对误差。靠近光源处,误差较大,远离光源处误差保持在一定的幅度范围之内。这与前人的理论与蒙特卡罗方法模拟的结果^[12]一致。

- 许 棠,张春平,王新宇 等. 连续光在生物组织中能流率分布的漫射近似和模拟[J]. *光子学报*, 2003, **32**(5): 571~575
- 5 Zhang Zhi, Luo Qingming, Zeng Shaoqun *et al.*. A numerical method for photon migration in heterogeneous bio-tissue[J]. *Acta Optica Sinica*, 2003, **23**(7): 860~863 (in Chinese)
张 智,骆清铭,曾绍群 等. 非均匀生物组织中光子迁移的数值方法[J]. *光学学报*, 2003, **23**(7): 860~863
- 6 Wei Huajiang, Xing Da, Wu Guoyong *et al.*. Optical transport characteristics of human tissues in vitro at 808 nm linearly polarized laser irradiation[J]. *Chin. J. Lasers*, 2004, **31**(3): 305~309 (in Chinese)
魏华江,邢 达,巫国勇 等. 808 nm 近红外激光辐照三种不同的离体人组织的光传输特性[J]. *中国激光*, 2004, **31**(3): 305~309
- 7 Lai Jiancheng, Li Zhenhua, Wang chunyang *et al.*. Angular distribution of backscattered liaght from locally pathological tissue irradiated by pencil light[J]. *Acta Optica Sinica*, 2003, **23**(11): 1402~1408 (in Chinese)
来建成,李振华,王春勇 等. 线光束照射下局部病变组织背景散射场角分布研究[J]. *光学学报*, 2003, **23**(11): 1402~1408
- 8 A. Kienle, T. Glanzmann, G. Wagnieres *et al.*. Investigation of two-layered turbid media with time-resolved reflectance[J]. *Appl. Opt.*, 1998, **37**(28): 6852~6862
- 9 A. Kienle, M. S. Patterson, N. Dognitz *et al.*. Noninvasive determination of the optical properties of two-layered turbid media[J]. *Appl. Opt.*, 1998, **37**(4): 779~791
- 10 G. Alexandrakis, T. J. Farrell, M. S. Patterson. Monte Carlo diffusion hybrid model for photon migration in a two-layer turbid medium in the frequency domain [J]. *Appl. Opt.*, 2000, **39**(13): 2235~2244
- 11 R. C. Haskell, L. O. Svaasand, T. T. Tsay *et al.*. Boundary conditions for the diffuse equation in radiative transfer[J]. *J. Opt. SOC. Am. A*, 1994, **11**(10): 2727~2741
- 12 Shao-Pow Lin, Lihong Wang, Steven L *et al.*. Measurement of tissue optical properties by the use of oblique-incidence optical fiber reflectometry[J]. *Appl. Opt.*, 1997, **36**(1): 136~143