

文章编号: 0253-2239(2005)03-335-6

## 二维剪切干涉波前的最小二乘法重建\*

曾 新<sup>1</sup> 丁剑平<sup>1\*\*</sup> 梁佩莹<sup>1</sup> 陈志一<sup>2</sup>

(<sup>1</sup> 南京大学物理系, 南京 210093  
<sup>2</sup> 信息产业部电子 14 所, 南京 210013)

**摘要:** 提出了一种可以快捷地重建原始的二维波前的新算法。对于分别在相互垂直方向上横向剪切干涉获得两个差分波前, 用快速傅里叶变换首先计算出待测原始波前在  $x$  和  $y$  方向的估计分布, 然后利用误差计算的最小二乘法进行二维拟合, 可以恢复出待测波前的二维分布。提出的理论可以应用于剪切量大于 1 个采样间隔的二维波前重建问题, 解决了已有的二维剪切干涉波前重建技术中要求剪切量等于采样间隔的限制。研究了剪切量和噪声对重建精度的影响, 和其它算法进行了比较, 给出了数值实验结果和分析讨论。结果表明该算法速度快, 对噪声有较强的抵抗力, 有望在实际的剪切干涉测量中获得应用。

**关键词:** 光学测量; 干涉; 波前重建; 剪切干涉; 最小二乘法

中图分类号: O438 文献标识码: A

## Wave Front Reconstruction from Shearing Interferograms Using Least Square Fitting

Zeng Xin<sup>1</sup> Ding Jianping<sup>1</sup> Liang Peiying<sup>1</sup> Chen Zhiyi<sup>2</sup>

(<sup>1</sup> Department of Physics, Nanjing University, Nanjing 210093  
<sup>2</sup> The 14th Institute, Ministry of Information Industry, Nanjing 210013)

**Abstract:** Authors propose a novel technique to reconstruct two-dimensional wave front from two difference wave fronts that are measured in shearing interferometers. Firstly, two one-dimensional wavefront estimates are computed using Fourier transform. The two-dimensional wave front distribution is then derived by use of least square fitting. The proposed method is applicable to cases in which the shear amount is larger than one sampling interval, and can alleviate the limitation on the shear amount imposed by conventional algorithm. Investigation into the influences of shear amount and noise level on reconstruction accuracy is made, and comparisons with other methods are also provided. Numeric simulations to confirm the proposed algorithm are carried out, and corresponding analyses and discussions are given. The results show that the method is relatively immune to noises and is promising in practical shearing interferometry.

**Key words:** optical measurement; interference; wave front reconstruction; shearing interferometry; least square fitting; Fourier transform

### 1 引 言

剪切干涉是将待测波面和其自身的一个微小平移进行干涉的测量技术。由于它不需要参考光波, 采用共光路系统, 可以抵抗外界扰动的影响, 对光源的相干性和干涉装置平台的稳定性要求低, 因此剪切干涉原理已经在许多实际测量中得到应用<sup>[1~4]</sup>。

在横向剪切干涉测量中, 从相互垂直方向上剪切干涉图获得的差分波前可以恢复待测的二维波前。已经提出了多种波前重建算法<sup>[5~11]</sup>, 其中基于最小二乘原理的区域估计理论是一种快速有效的算法, 但这种方法要求剪切量等于采样间隔, 因而限制了该技术的适用范围<sup>[8]</sup>。我们提出了针对大剪切量

\* 国家自然科学基金(10474043)资助课题。

作者简介: 曾新(1978~), 男, 吉林人, 南京大学物理系研究生, 从事光学干涉计量方面的研究。

\*\* 通信联系人。E-mail: jpding@nju.edu.cn。

收稿日期: 2004-04-01; 收到修改稿日期: 2004-09-20

的二维波前重建方案,根据傅里叶变换的位移性质计算出待测波前在  $x$  和  $y$  方向的估计分布,再利用最小二乘法,可以精确地恢复出待测波前。数值实验结果证明该方法是可行的,对噪声的较强抗干扰能力,解决了已有的二维剪切干涉波前重建技术中要求剪切量等于采样间隔的限制。

## 2 波前重建原理

### 2.1 一维波前估计

横向剪切干涉是待测波前和其横向位移后的波前之间叠加干涉的结果,利用双光栅可以方便地实现横向剪切干涉<sup>[12]</sup>,并且通过相移干涉图获得待测波前沿相互垂直方向上的两个差分分布,本文在已知差分相位分布的基础上,提出重建原始波前的算法。

设待测的原始波前沿  $x, y$  方向剪切后的差分分布的离散值表示为  $D_x(m, n)$  和  $D_y(m, n)$ , 其中  $m, n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ 。在  $(m, n)$  处有

$$\begin{cases} D_x(m, n) = f_x(m, n) - f_x(m-s, n), & (1a) \\ D_y(m, n) = f_y(m, n) - f_y(m, n-s), & (1b) \end{cases}$$

其中  $f_x(m, n)$  和  $f_y(m, n)$  分别为待测波前在  $x$  方向和  $y$  方向的一维分布,  $s$  为剪切量。

对(1)式两边同时进行  $x, y$  方向上的一维傅里叶变换,可得到

$$\mathcal{F}_x\{f_x(m, n)\} = \frac{\mathcal{F}_x\{D_x(m, n)\}}{1 - \exp(-i2\pi v_x s/N)}, \quad (2a)$$

$$\mathcal{F}_y\{f_y(m, n)\} = \frac{\mathcal{F}_y\{D_y(m, n)\}}{1 - \exp(-i2\pi v_y s/N)}, \quad (2b)$$

$\mathcal{F}_\alpha$  算符表示在  $\alpha$  方向作一维傅里叶变换,  $v_\alpha$  为  $\alpha$  方向的空间频率( $\alpha = x, y$ )。对(2)式左边的一维频谱进行逆傅里叶变换即可得到待测波前的一维估计  $f_x(m, n)$  和  $f_y(m, n)$ 。

### 2.3 最小二乘法二维波前拟合

Tian 等<sup>[8]</sup> 利用最小二乘法从剪切量  $s = 1$  条件

下得到一维估计  $f_x(m, n)$  和  $f_y(m, n)$  重建待测波前  $\varphi(m, n)$ , 在他们的方法中,  $f_x(m, n)$  和  $f_y(m, n)$  是由差分相位  $D_x(m, n)$  和  $D_y(m, n)$  分别沿  $x$  和  $y$  方向求和计算出的, 即实施差分运算的逆运算。他们的方法仅适用于剪切量等于采样间隔这种情况, 而且, 求和使得各采样点上的噪声有累积传递效应, 因此这种区域估计理论在实际应用中受到严重限制。下面, 我们提出新的理论方法实现二维波前的精确重建。

由剪切量为  $s$  测量出的差分波前  $D_x(m, n)$  和  $D_y(m, n)$ , 利用(2)式计算出待测波前分别沿  $x$  和  $y$  方向的一维分布  $f_x(m, n)$  和  $f_y(m, n)$ 。因为  $f_x(m, n), f_y(m, n)$  反映待测波前  $\varphi(m, n)$  在  $x$  方向和  $y$  方向的一维分布, 两者的关系可用下列公式表示:

$$f_x(m, n) + c_n = \varphi(m, n) + N_x(m, n), \quad (3)$$

其中  $c_n$  为第  $n$  行( $x$  方向)应加上的偏置值, 而  $N_x(m, n)$  是通过  $f_x(m, n)$  去估计二维波前  $\varphi(m, n)$  的可能偏差。同样对  $f_y(m, n)$  和  $\varphi(m, n)$  之间的关系可写出类似的公式:

$$f_y(m, n) + d_m = \varphi(m, n) + N_y(m, n). \quad (4)$$

定义从两个一维分布  $f_x(m, n)$  和  $f_y(m, n)$  重构二维波前  $\varphi(m, n)$  的误差  $\epsilon$ :

$$\epsilon = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} [N_x^2(m, n) + N_y^2(m, n)], \quad (5)$$

则当  $\epsilon$  最小时, 估计的波前最接近待测波前相位分布。以  $\varphi(m, n), c_n$  和  $d_m$  作为可调参量, 求  $\epsilon$  的极小值, 由极值条件得到下列方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial \epsilon}{\partial \varphi(m, n)} = 0, & (6a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \epsilon}{\partial c_n} = 0, & (6b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \epsilon}{\partial d_m} = 0, & (6c) \end{cases}$$

从而有

$$\begin{cases} \varphi(m, n) = \frac{f_x(m, n) + c_n + f_y(m, n) + d_m}{2}, & (7a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{m=0}^{N-1} [f_x(m, n) + c_n - f_y(m, n) - d_m] = 0, & (n = 0, 1, 2, \dots, N-1) & (7b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} [-f_x(m, n) - c_n + f_y(m, n) + d_m] = 0, & (m = 0, 1, 2, \dots, N-1) & (7c) \end{cases}$$

在(7b)式和(7c)式构成的方程组中, 未知数  $c_n$  和  $d_m$  的个数为  $2N$  个, 而独立方程的数目为  $2N-1$  个, 因此允许有一个自由变量, 我们可以令其为  $d_{N-1}$  并令  $d_{N-1} = 0$ 。解线性方程组(7b)和(7c)可得

$$\begin{cases} c_n = U + \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} [f_y(m, n) - f_x(m, n)], & (n = 0, 1, 2, \dots, N-1) \\ d_m = V + \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [f_x(m, n) - f_y(m, n)], & (m = 0, 1, 2, \dots, N-2 \text{ 且 } d_{N-1} = 0) \end{cases} \quad (8a)$$

$$\quad (8b)$$

其中

$$V = -\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [f_x(N-1, n) - f_y(N-1, n)], \quad (9a)$$

$$U = V + \frac{1}{N^2} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} [f_x(m, n) - f_y(m, n)], \quad (9b)$$

将(8)式算出的  $c_n$  和  $d_m$  代入(7a)式即可重建出待测波前  $\varphi(m, n)$ 。

#### 2.4 运用重建算法时的预处理

由(2)式可知,空间频率  $\nu_\alpha$  的取值使得  $\nu_\alpha s/N$  为整数值时,方程右边的分母为零,因此这些频率处的频谱无法通过(2)式计算。从傅里叶光学的理论可知,空间域的差分运算实际等价于在频谱域中利用光栅进行滤波,而  $\nu_\alpha s/N$  为整数值的情形相当于频率为  $s/N$  的整数倍处的频谱被挡住,阻挡函数相当于一个矩形光栅的效果。

一种处理方法是将这些频率处的频谱置为零值<sup>[9]</sup>,当剪切量  $s$  不大时,去除的频谱值较少,对波前重构的影响不大,但当剪切量较大时,误差比较显

著。我们采用的方法是用邻近的频谱的平均值代替,即使剪切量较大,误差仍可控制在较低水平上。

在上面的讨论中,差分波前是作为已知值进行计算的。实际上,如果待测波前是分布在由  $m \in [0, N-1]$  和  $n \in [0, N-1]$  规定的区域内,差分波前  $D_x(m, n)$  的取值只能在  $m \in [s, N-1]$  和  $n \in [0, N-1]$  的矩形范围内。因此在重建  $N \times N$  个波前函数值  $\varphi(m, n)$  的计算过程中,缺少了  $N \times s$  个差分数据,对  $D_y(m, n)$  有同样的限制。为解决这一问题,可以设想将待测波前在二维平面上沿  $x$  和  $y$  方向进行周期性延拓,这样,如果数据的维数为剪切量的整数倍时,可以得到下列关系式:

$$\sum_{p=0}^{N/s-1} D_x(m+ps, n) = 0, \quad (m = 0, 1, 2, \dots, s-1; n = 0, 1, 2, \dots, N-1) \quad (10a)$$

$$\sum_{q=0}^{N/s-1} D_y(m, n+qs) = 0, \quad (n = 0, 1, 2, \dots, s-1; m = 0, 1, 2, \dots, N-1) \quad (10b)$$

这样,未知的差分数据可由下式补充得到

$$D_x(m, n) = -\sum_{p=1}^{N/s-1} D_x(m+ps, n), \quad (m = 0, 1, 2, \dots, s-1; n = 0, 1, 2, \dots, N-1) \quad (11a)$$

$$D_y(m, n) = -\sum_{q=1}^{N/s-1} D_y(m, n+qs), \quad (n = 0, 1, 2, \dots, s-1; m = 0, 1, 2, \dots, N-1) \quad (11b)$$

从而得到了  $N \times N$  个差分波前的数值,可以满足算法的实际要求。

由(1)式可知,本质上差分值的样本数目比原始待测波前要少  $s$  个,即差分值的维数总小于原始待测波前的维数。从差分布重建原始分布存在不确定性,重建存在误差。显然剪切量越大,不确定因素越大,从而降低重建精度。

应该指出,上述差分数据补充处理的前提是剪切量  $s$  能够整除数据的维数  $N$ ,这也是我们所提出的算法对剪切干涉测量时的实际要求。

### 3 数值结果和讨论

为了验证我们提出的方法的可行性,选取泽尼克多项式中的  $y$  方向的彗差函数  $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 2/3)y + 7/4$  [如图 1(a) 所示] 作为相位分布进行波前重建的数值模拟,数据维数为  $256 \times 256$ 。模拟出剪切量为 32 的差分相位分布如图 1(b) 和图 1(c) 所示,相比于原始相位分布的维数,模拟的剪切数据分别减少了 32 行或 32 列,为便于图示,我们补上了相应的零值。在进行重建前,按照(11)式对差分数据作了延拓补值,使差分数据的维数仍然

为  $256 \times 256$ 。图 1(d)是从差分波前恢复出的原始波前。此例中剪切量的大小已相当于整个数据区域的

八分之一,剪切量较大。显然,数值结果证明本方法可以适用剪切量较大场合下的波前重建。

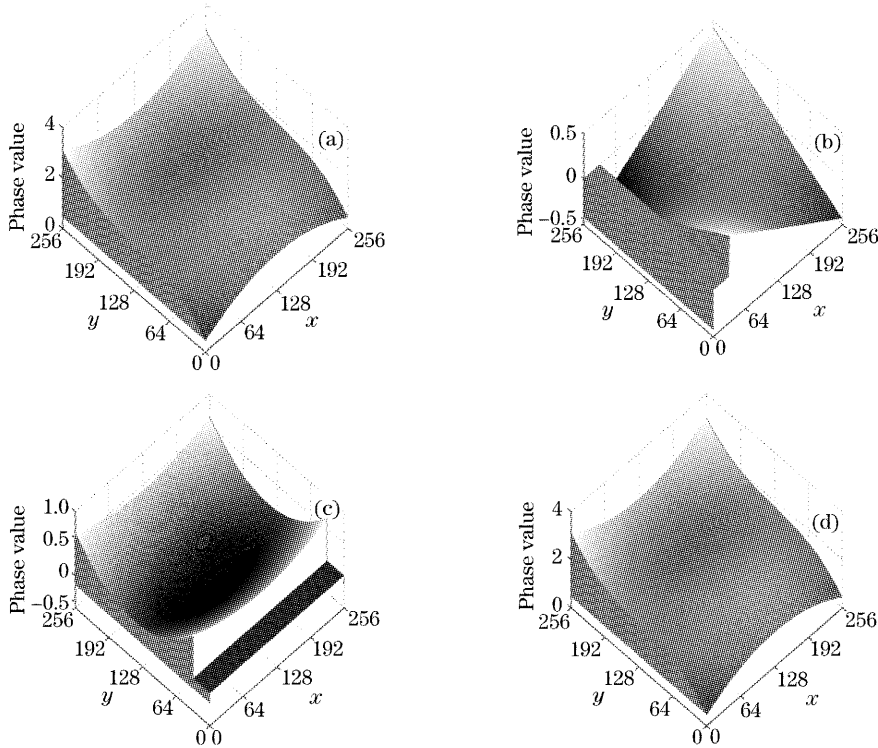


图 1 (a)相位分布函数  $f(x,y)=(x^2+y^2-2/3)y+7/4$  分布; (b)  $x$  方向的差分相位分布, (c)  $y$  方向的差分相位分布, (d) 再现的相位分布

Fig. 1 (a) Original phase function  $f(x,y)=(x^2+y^2-2/3)y+7/4$ , (b)  $x$ -directional phase difference distribution, (c)  $y$ -directional phase difference distribution, (d) reconstructed phase distribution

为了考察剪切量的大小对重建精度的影响,我们模拟了不同剪切量的差分波前。表 1 给出了不同剪切量下的重建函数与原函数的均方差和偏差的峰谷值(P-V 值)。显然,随着剪切量的增加,再现误差也在增加,其原因已在原理部分作了论述。

原函数的取值在  $[0.4, 3]$  之间,如果将其最大值

等效于  $2\pi$ ,表格中的数据说明,在这个例子里,剪切量为 128 时的重建均方差  $\sigma$  在理论上小于  $\lambda/1000$ , P-V 值小于  $\lambda/10$ 。实际上,我们对多种其他函数进行了数值实验,都得到了类似的结果。因此从理论上讲,即使剪切大到数据大小的一半时,相对误差仍然是可接受的。

表 1 再现的相位函数与原函数的均方差  $\sigma$  及 P-V 偏差值随剪切量  $s$  变化情况

Table 1 Difference between reconstructed phase function to the original one; root mean square  $\sigma$  and peak-to-valley value versus shear amount  $s$

$s$	2	4	8	16	32	64	128
$\sigma$	$<1.00 \times 10^{-7}$	$<1.00 \times 10^{-7}$	$<1.00 \times 10^{-7}$	$3.00 \times 10^{-7}$	$2.30 \times 10^{-6}$	$1.78 \times 10^{-5}$	$3.59 \times 10^{-4}$
P-V	$7.00 \times 10^{-7}$	$5.30 \times 10^{-6}$	$3.85 \times 10^{-5}$	$3.23 \times 10^{-4}$	$2.68 \times 10^{-3}$	$2.10 \times 10^{-2}$	$2.66 \times 10^{-1}$

干涉测量中获得的差分相位不可避免地含有一定程度的噪声,会影响波前重建精度。为了研究本算法对噪声的敏感性,我们在差分相位上加上了强度不同的模拟随机噪声。

图 2 给出了噪声水平为差分信号强度的 40% 时的波前重建结果,从数值结果可知,该算法对噪声有很好的抵抗力。

图 3 给出了重建误差随噪声变化的情况,显然随着噪声的增加,波前重建的误差也大致成线性增大,这是因为施加的是相加性噪声(即非相干性的白噪声),所以误差基本上仅决定于噪声的大小。如果有相干性噪声如探测器的非线性响应等,则噪声与重建误差之间可能呈非线性关系,但是随着噪声增强,误差总是呈增大的趋势。

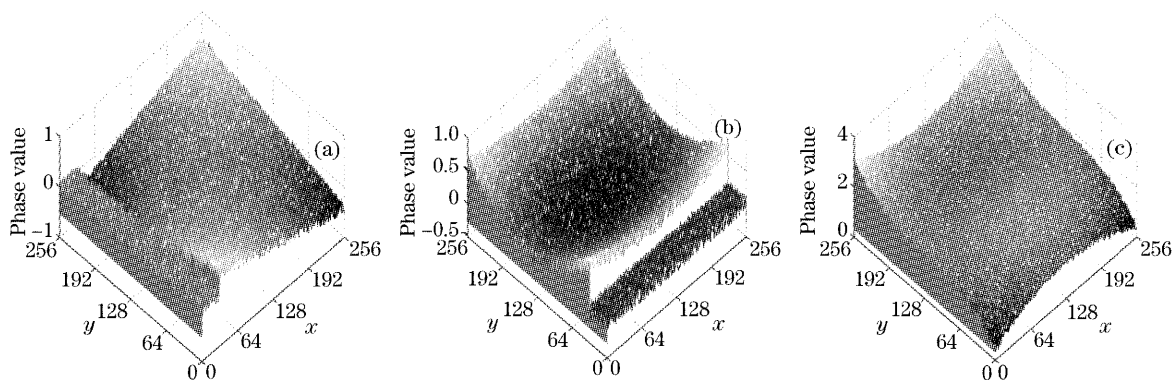


图 2 含均匀分布随机噪声的差分相位分布;随机噪声的标准差为差分相位绝对值的平均值的 40%。

(a)  $x$  方向的差分相位分布, (b)  $y$  方向的差分相位分布, (c) 再现出的相位分布

Fig. 2 Phase difference corrupted by uniformly random noise; standard deviation of noise is 40% of average value of phase difference absolute, (a)  $x$ -directional phase difference distribution, (b)  $y$ -directional phase difference distribution, (c) reconstructed phase distribution

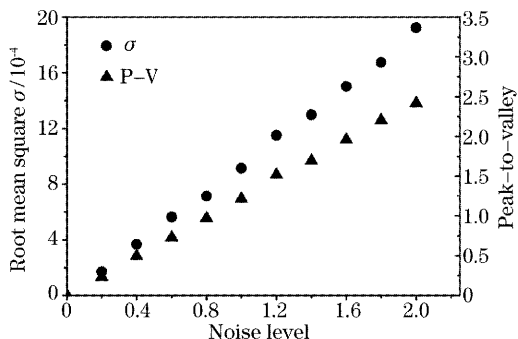


图 3 波前重建误差随噪声的变化关系(噪声水平指噪声强度与信号平均强度的比值)

Fig. 3 Deviation of the reconstructed phase from the original phase versus strength of noise; noise level is specified as the ratio between noise intensity and signal intensity

因此我们选择剪切量  $s=1$  的情形,与 Tian 等的算法进行比较。图 4 给出了两种算法在不同噪声强度下的重建精度。从图中可以看到,我们提出的

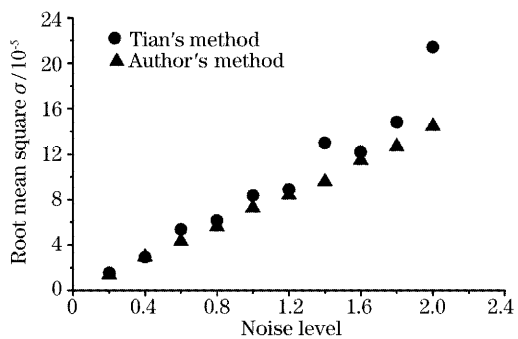


图 4 本文算法与 Tian 等的算法的比较:重建误差随噪声强度的变化关系

Fig. 4 Comparison of reconstruction accuracy between Tian's and author's algorithms

算法在  $s=1$  时重建波前与原始波前的均方差要比应用 Tian 的方法小,这说明我们的算法具有更高的精度。这是因为他们的算法采用了区域求和方法,噪声在求和中会累计并且扩散。而我们的算法利用了傅里叶变换是一种全局算法,噪声不易累积传递。需要特别指出的是,该方法最大的优越性在于消除了 Tian 的方法中要求剪切量只能等于采样间隔的限制。在图中还可以看到 Tian 的方法随噪声的增加重建误差反而会下降的现象,我们分析认为,因为他们区域估计理论中是采用求和逆运算求出波前一维分布,对某个相加性的随机噪声,相加后由于可能的抵消效应,误差会下降。但是随噪声强度增加误差上升的整体趋势是不会变化的,并且其误差总是大于我们的方法。

### 5 结 论

提出了一种从两个一维剪切波前重建二维波前的新方法。数值模拟结果表明,提出的算法可以精确地重建二维波前,即使剪切量较大时,再现误差仍然相当小,突破了已有的二维波前重建技术中要求剪切量只能等于采样间隔的限制,并且该方法对噪声有较强的免疫力,可以在实际的剪切干涉测量中获得应用。我们正在建设双光栅剪切干涉系统,希望用于微光学元件的显微干涉测量,本文的理论研究为我们正在进行的实验工作打下了基础,相应的实验测量结果将后文报道。

### 参 考 文 献

1 M. V. R. K. Murty. Lateral shearing interferometers. in *Optical*

- Shop Testing* [M]. D. Malacara, ed. New York: Wiley, 1975. 105~148
- 2 T. Yatagai, T. Kanou. Aspherical surface testing with shearing interferometer using fringe scanning detection method[J]. *Opt. Engng.*, 1984, **23**(2): 357~360
- 3 L. Erdman, R. Kowarschik. Testing of refractive silicon microlenses by use of a lateral shearing interferometer in transmission[J]. *Appl. Opt.*, 1998, **37**(4): 676~682
- 4 Fu Lei, Xing Jianguo, Shi Hongmin *et al.*. Optical-path-splitting 2-D shearing interferometer system for deformation study of high power laser resonator mirrors[J]. *Acta Optica Sinica*, 2000, **20**(12): 1667~1674 (in Chinese)  
付 雷, 辛建国, 史红民 等. 分光路二维剪切干涉强激光腔镜变形检测系统[J]. *光学学报*, 2000, **20**(12): 1667~1674
- 5 T. Nomura, S. Okuda, K. Kamiya *et al.*. Improved Saunderson method for the analysis of lateral shearing interferograms [J]. *Appl. Opt.*, 2002, **41**(10): 1954~1961
- 6 K. R. Freischlad, C. L. Koliopoulos. Modal estimation of wave front from difference measurements using the discrete Fourier transform[J]. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1986, **F3**(11): 1852~1861
- 7 G. Harbers, P. Kunst, G. Leibbrandt. Analysis of lateral shearing interferograms by use of Zernike polynomials[J]. *Appl. Opt.*, 1996, **35**(31): 6162~6172
- 8 X. Tian, T. Yatagai. Simple algorithm for large-grid phase reconstruction of lateral-shearing interferometry[J]. *Appl. Opt.*, 1995, **34**(31): 7213~7220
- 9 Bai Jian, Yang Guoguang. Infinite element model for the reconstruction of two-dimensional shearing wavefront[J]. *Acta Optica Sinica*, 1998, **18**(6): 726~731 (in Chinese)  
白 剑, 杨国光. 二维剪切波面重建的有限元模型[J]. *光学学报*, 1998, **18**(6): 726~731
- 10 Xu Wendong, Xie Yuanying, Li Xishan. A new method for recovering the original wave-front in lateral-shearing interferometry[J]. *Chin. J. Lasers*, 1999, **A26**(11): 982~986 (in Chinese)  
徐文东, 谢元营, 李锡善. 恢复横向剪切干涉原始波面的新方法[J]. *中国激光*, 1999, **A26**(11): 982~986
- 11 Xu Xiaojun, Lu Qisheng, Jiang Zongfu *et al.*. Mathematics and numerical simulation of shear interference with prolongation of wavefront[J]. *Acta Optica Sinica*, 2000, **20**(2): 214~218 (in Chinese)  
许晓军, 陆启生, 姜宗福 等. 波前延拓剪切干涉的数学原理和数值模拟[J]. *光学学报*, 2000, **20**(2): 214~218
- 12 H. Schreiber, J. Schwider. Lateral shearing interferometer based on two Ronchi phase gratings in series[J]. *Appl. Opt.*, 1997, **36**(22): 5321~5324