

文章编号: 0253-2239(2005)02-251-5

压缩态光场变耦合系数双光子 J-C 模型性质*

许静平 羊亚平

(同济大学物理系, 上海 200092)

摘要: 讨论了初始光场为压缩态、原子-光场耦合系数随时间变化情形下双光子过程 J-C 模型的量子统计性质。具体研究了双光子过程中原子布居数反转、光场的压缩等随时间的演化性质, 讨论了初始光场的压缩系数、压缩相位及耦合系数变化快慢对这些性质的影响。研究表明, 初始光场的压缩系数增大, 崩塌和回复的频率增大, 回复值减小。当原子-光场耦合系数变化缓慢时, 崩塌和回复现象被延迟, 而光场逐渐失去压缩性质; 而当耦合系数变化较快时, 崩塌和回复现象被加速, 而光场压缩量将产生振荡, 压缩效应将反复出现。

关键词: 量子光学; J-C 模型; 双光子过程; 压缩态; 耦合系数

中图分类号: O431.2 文献标识码: A

The Time-Dependent Atom-Field Coupling J-C Model with an Initial Squeezing State: Two-Photon Process

Xu Jingping Yang Yaping

(Department of Physics, Tongji University, Shanghai 200092)

Abstract: The quantum statistical properties of two-photon Jaynes-Cummings model with a time-dependent atom-field coupling coefficient are discussed under the initial squeezing state of the light field. Especially, the time evolution of the atomic population inversion and the squeezing properties of the cavity field is investigated. The effects of the atom-field coupling coefficient, the squeezing parameter and phase on these properties are also discussed. When the squeezing coefficient of the initial field increases, the frequency of collapse-revival in atomic population inversion increases, and the amplitude of revival decreases. When the atom-field coupling coefficient changes slowly, the collapse-revival is delayed, and the squeezing of the field is lost gradually. When the coupling coefficient changes rapidly, it accelerates the collapse-revival phenomena, and the squeezing parameter oscillates with time, the squeezing of the field appears repeatedly.

Key words: quantum optics; Jaynes-Cummings models; two-photon process; squeezing state; atom-field coupling coefficient

1 引 言

J-C 模型是由 Jaynes 和 Cummings^[1] 在讨论微波激光器时提出的, 是一个由单个二能级原子(或分子)与一单模量子化的光场组成的相互作用系统的理想模型。一方面, 由于 J-C 模型形式简单, 可以精确求解, 在讨论场的统计性质方面具有较好的可靠性^[2,3]; 另一方面, 在实验上人们已经可以利用高 Q 因子腔体和里德伯原子来实现这种理想模型^[4], 因

此在探讨光与物质相互作用等问题中, 尤其在激光物理、核磁共振和量子场论等领域, J-C 模型受到了广泛的关注^[5~9], 并揭示了许多量子现象, 如拉比振荡^[7,8], 原子布居数反转的崩塌和回复^[9], 腔体中场的压缩效应等。其中, 象拉比振荡、崩塌和回复等现象也相继在其他量子系统中得到发现和研究^[10]。同时, J-C 模型也得到了不断的推广, 如三能级原子与一个双模压缩真空场的相互作用^[11]、光子腔中的 J-C 模型^[12]、克尔介质中的 J-C 模型^[13]、外加驱动

* 国家自然科学基金(90203007)和国家 973 计划资助课题。

作者简介: 许静平(1980~), 男, 同济大学物理系理论物理专业博士研究生, 主要从事量子光学方面的研究工作。

E-mail: xx_jj_pp@hotmail.com。

收稿日期: 2004-01-05; 收到修改稿日期: 2004-04-05

场控制下的 J-C 模型^[14]等。

在以前许多关于 J-C 模型的研究中,原子-场的耦合系数被作为常数来处理。而在实际过程中,耦合系数在原子与场相互作用的初始时段是随时间变化的,是一个逐渐耦合的过程。在文献[15]中,以相干态作为初始光场、变耦合系数的 J-C 模型得到了研究。但在 J-C 模型中,系统的动力学演化性质与初始条件是紧密相关的。在文献[16]中,我们讨论了初始光场为压缩态、耦合系数随时间变化情况下单光子过程 J-C 模型,在本文中我们将考虑双光子过程的情形,主要研究光场的压缩系数、压缩相位及耦合系数变化的快慢等因素对双光子过程原子布居数反转、光场压缩性质等随时间演化的影响。

2 模型与运动方程

考虑一个二能级原子与单模电磁场相互作用的系统。假设原子与光场的相互作用强度随时间变化,且原子基态 $|g\rangle$ 与激发态 $|e\rangle$ 之间发生双光子跃迁,在旋波近似下系统的哈密顿量可表述为^[13]

$$H = \omega_0 S_z + \omega a^\dagger a + g f^2(t) (a^{+2} S_- + a^2 S_+), \quad (1)$$

其中原子算符 S_\pm, S_z 满足对易关系 $[S_+, S_-] = 2S_z, [S_z, S_\pm] = \pm S_\pm$ 。 ω_0 为原子共振跃迁频率, ω 为单模电磁场频率, g 为原子与电磁场之间相互作用的耦合常量, a 与 a^\dagger 分别为电磁场的湮灭及产生算符,满足对易关系 $[a, a^\dagger] = 1$ 。 $f(t)$ 是随时间变化的调制函数,取如下形式:

$$f(t) = \begin{cases} kt/T, & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{other} \end{cases}, \quad (2)$$

式中 k 为调制函数控制参量, T 为相互作用时间。假设原子初始时刻处于激发态,在 t 时刻系统状态可以用波函数表示为

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n a_n(t) |n, e\rangle + b_n(t) |n, g\rangle, \quad (3)$$

$|n, e(g)\rangle$ 表示原子处于激发态(基态),而电磁场中有 n 个光子。由薛定谔方程得到关于振幅 a_n 和 b_n 的演化方程:

$$\begin{cases} i\dot{a}_n = g f^2 [(n+1)(n+2)]^{1/2} \times \\ \quad \exp(-i\Delta t) b_{n+2}, \\ i\dot{b}_{n+2} = g f^2 [(n+1)(n+2)]^{1/2} \times \\ \quad \exp(i\Delta t) a_n, \end{cases} \quad (4)$$

式中 $\Delta = \omega - \omega_0$ 。

3 布居数反转

假定 $\Delta = 0$, 可得关于 a_n 的演化方程:

$$\frac{d^2 a_n}{d\tau^2} + g^2 \left(\frac{k}{T}\right)^4 (n+1)(n+2) a_n = 0, \quad (5)$$

$$\tau = t^3/3$$

同样可以得到关于 b_n 的运动方程。原子布居数反转 $W(t)$ 定义为原子处于激发态与基态的几率差,即

$$W = \sum_n |C_n|^2 (|a_n|^2 - |b_{n+2}|^2), \quad (6)$$

W 的性质与系统的初始状态相关。我们将主要讨论初始时原子处于激发态,电磁场为压缩态的情况。压缩态光场可以描述为^[17]

$$|\beta\rangle_\xi = \exp\left[\frac{1}{2}\xi^* a^2 - \frac{1}{2}\xi(a^\dagger)^2\right] \exp(\beta a^\dagger - \beta^* a) |0\rangle = \sum_n C_n |n\rangle, \quad (7)$$

$$|C_n|^2 = \frac{1}{n!} \frac{1}{|\mu|} \left|\frac{\nu}{2\mu}\right|^n \exp\left(-|\beta|^2 + \frac{\nu^*}{2\mu}\beta^2 + \frac{\nu}{2\mu^*}\beta^{*2}\right) H_n\left(\frac{\beta}{\sqrt{2\mu\nu}}\right) H_n\left(\frac{\beta^*}{\sqrt{2\mu^*\nu^*}}\right),$$

式中 $\xi = r \exp(i\theta)$, $\mu = \cosh r$, $\nu = \exp(i\theta) \sinh r$, $\beta = |\beta| \exp(i\varphi)$, r 是压缩系数, θ 是压缩相位, $H_n(z)$ 是厄米多项式。与相干态光子数分布不同,压缩态的光子数分布并非泊松分布。

当原子初始处于激发态,光场处于相干压缩态时,任意时刻 $W(t)$ 则可以表示为

$$W(t) = \sum_{n=0}^{\infty} |C_n|^2 \cos\left[\frac{2gk^2 \sqrt{(n+1)(n+2)} t^3}{3T^2}\right], \quad t \in [0, T] \quad (8)$$

图 1 和图 2 中,我们画出了不同情况下 $W(t)$ 随时间的演化曲线[在图 1,图 2 中,A,B,C,D 曲线分别表示 $W(t)+6, W(t)+4, W(t)+2, W(t)$ 等]。

首先考虑压缩系数 r 对 $W(t)$ 的影响。图 1(a) 和图 1(b) 描述了在不同压缩系数及不同耦合系数

时 $W(t)$ 随时间的演化情况,其中曲线 D 描述了原子-场耦合系数为常量时 $W(t)$ 的演化。当 r 较小时[见图 1(a), $r=0.1$],在 $W(t)$ 的演化过程中,出现明显的崩塌和回复现象,在崩塌过程中其振荡的幅值可以趋于零。而当 r 增大时[见图 1(b)],尽管崩

塌和回复现象依然存在,但与相干态情形相比 $W(t)$ 具有不同演化性质。很显然,随着压缩系数的增大,崩塌和回复的频率增大,回复值减小,且在崩塌过程中也没有明显地趋于零的过程。这主要源于初始光场性质的不同:当压缩系数较小时,压缩态的光子数分布趋近泊松分布, $W(t)$ 的性质也趋近于相干态的情形。但当压缩系数增大时,光子数分布完全不同于泊松分布,其分布宽度随 r 增大而增宽。 $W(t)$ 性质决定于各光子数态引起的拉比振荡的叠加。由于

光子数态引起的拉比振荡频率与光子数相关,光子数增大,光子数态引起的拉比振荡的频率增大。 r 增大时,起主要作用的光子态的光子数分布增宽,较大频率的拉比振荡占的份额增多,因此崩塌和回复的频率增大。也由于起主要作用光子态的光子数分布较宽,各拉比振荡之间难以达到同相位或反相位,结果拉比振荡的相干叠加使得 $W(t)$ 回复值下降,同时在塌陷过程中也没有明显地趋于零的过程。

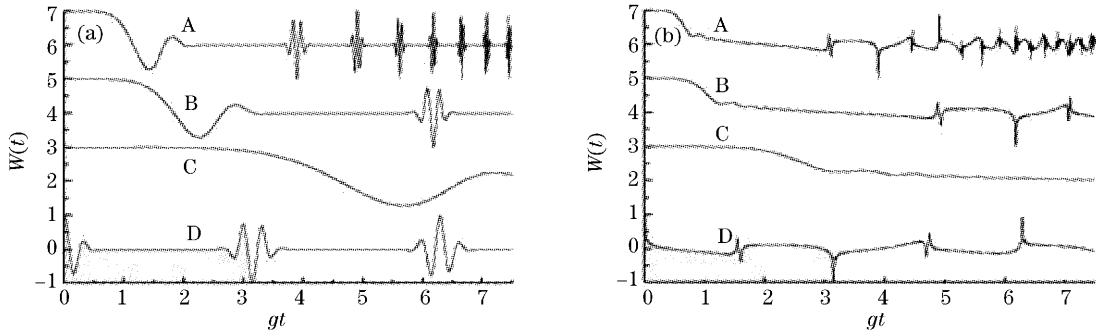


图 1 $|\beta|^2=10, gT=10$, (a) $r=0.1$, (b) $r=3, \theta=0$, 初始为压缩态情况下双光子过程布居数反转随时间的演化。

曲线 A, B 和 C 分别对应 $k=4.0, 2.0$ 和 0.5 的情况, 曲线 D 对应耦合系数没有时间修正的情况

Fig. 1 The population inversion as a function of time for two-photon process in initial squeezing state, $|\beta|^2=10, gT=10$, (a) $r=0.1$, (b) $r=3, \theta=0$ and $k=4.0$ (curve A), 2.0 (curve B), 0.5 (curve C). Curve D is for the case of the constant coupling coefficient

比较上面两图中的 A, B, C 及 D 曲线, 可以发现耦合强度调制函数 $f(t)$ 对 $W(t)$ 的影响。图中曲线 A 表示原子-场耦合系数变化很快的情形 ($k=4.0$, 相应于突变的情形); 曲线 C 表示原子-场耦合系数变化缓慢的情形 ($k=0.5$, 相应于绝热变化)。从 A, B, C 曲线可以看到, 随着 k 的增大, 崩塌和回复的频率加快。但与曲线 D (耦合系数恒定的情况) 相比, 可以发现: 当 k 较小时, 耦合系数的变化会对 $W(t)$ 演化中的崩塌和回复现象起延迟作用, 而当 k 比较大时, 则起着

加速的作用。

由于光子压缩态的光子数分布与压缩相位 θ 以及 β 的相位 φ 相关, 实际上与相对值 $\theta/2 - \varphi$ 相关, 因此该相位差对 $W(t)$ 的演化也将产生影响。在图 2(a) 与图 2(b) 中, 分别画出了不同 θ 值 (φ 取为零) 时 $W(t)$ 随时间的演化情况。

当压缩系数很小时 [见图 2(a)], 光子压缩态趋近于相干态。压缩场性质由 $\xi = r \exp(i\theta)$ 决定, r 很小, θ 的取值对 ξ 的影响较小。所以 θ 对 $W(t)$ 的影响也较

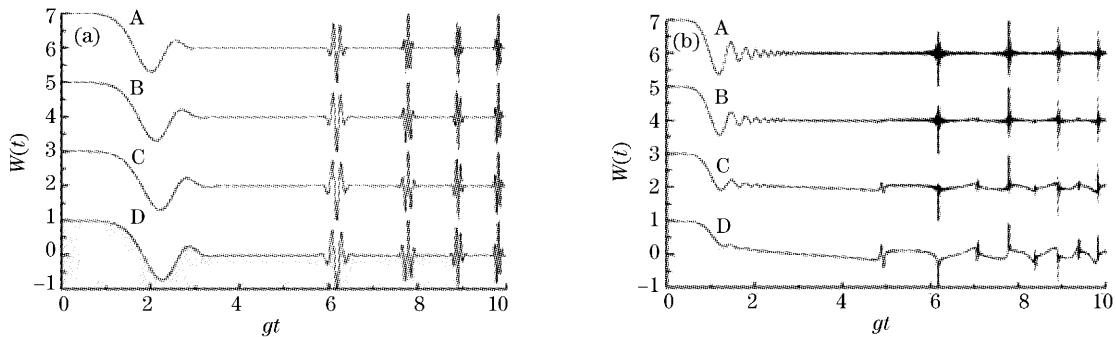


图 2 $|\beta|^2=10, gT=10$, (a) $r=0.1$, (b) $r=3, k=2$, 初始为压缩态情况下双光子过程中 $W(t)$ 随时间的演化。

曲线 A, B, C 和 D 分别对应 $\pi, \pi/2, \pi/4$ 和 0 的情况

Fig. 2 $W(t)$ as a function of time for two-photon process in initial squeezing state, $|\beta|^2=10, gT=10$, (a) $r=0.1$, (b) $r=3, k=2$ and $\theta=\pi$ (curve A), $\pi/2$ (curve B), $\pi/4$ (curve C), 0 (curve D)

小。当压缩系数较大时[见图 2(b)],则压缩相位 θ 的效应很明显:当压缩相位 θ 增加时,崩塌与回复的频率将减小,且一部分崩塌与回复的幅值将慢慢减小并消失,而另一部分崩塌与回复几乎不受 θ 的影响。

4 光场的压缩性质

对于单模电磁场,利用场的产生和湮灭算符可以定义下列两个正交分量算符:

$$\langle (\Delta X_1)^2 \rangle = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sum_n \{ n \rho_m + [(n+1)(n+2)]^{1/2} \text{Re}(\rho_{n+2,n}) \} - \left[\sum_n (n+1)^{1/2} \text{Re}(\rho_{n+1,n}) \right]^2, \quad (10)$$

$$\langle (\Delta X_2)^2 \rangle = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sum_n \{ n \rho_m - [(n+1)(n+2)]^{1/2} \text{Re}(\rho_{n+2,n}) \} - \left[\sum_n (n+1)^{1/2} \text{Im}(\rho_{n+1,n}) \right]^2, \quad (11)$$

其中

$$\rho_{m'} = \langle n | \rho_f(t) | n' \rangle = C_n C_{n'}^* \cos\{g\theta(t)[n(n-1)]^{1/2}\} \cos\{g\theta(t)[n'(n'-1)]^{1/2}\} + C_{n+2} C_{n'+2}^* \sin\{g\theta(t)[(n+1)(n+2)]^{1/2}\} \sin\{g\theta(t)[(n'+1)(n'+2)]^{1/2}\},$$

这里 $\theta(t) = (k/T)^2 t^3 / 3$, 引入压缩量

$$S_i = \langle (\Delta X_i)^2 \rangle - 1/4, \quad (i = 1, 2)$$

则 $S_i < 0$ 意味着压缩效应的出现。在下面的讨论中,我们将主要考虑光场在 X_2 方向的压缩性质。

在图 3 中分别画出了 $k = 0.5$ 和 $k = 4.0$ 时压缩量 (S_2) 随时间的演化情况。在初始阶段,光场在 X_2 方向的压缩效应均存在,但随后的演化性质则与耦合系数变化的快慢相关,这与单光子过程中的性质不同。当耦合系数变化缓慢时,压缩量 S_2 随时间而增加,且压缩系数越大,增加越快,到达零值的时间也越短[如图 3(a) 所示]。光场在 X_2 方向的压缩效应一旦失去,

$$X_1 = \frac{1}{2}(a + a^+), \quad X_2 = \frac{1}{2i}(a - a^+), \quad (9)$$

由于 $[X_1, X_2] = i/2$, 则两算符的量子均方涨落之积满足

$$\langle (\Delta X_1)^2 \rangle \cdot \langle (\Delta X_2)^2 \rangle \geq 1/16.$$

若 $\langle (\Delta X_i)^2 \rangle < 1/4 (i = 1, 2)$, 则表示场在该分量上被压缩,即具有压缩性。可以计算得到:

将不再重新出现(同时压缩量 S_1 随时间而减小,但在 $T = 10/g$ 的时间范围内,光场在 X_1 方向的压缩效应并未出现)。当耦合系数变化较快时,压缩量在初始阶段随时间而增加,光场在 X_2 方向的压缩效应将会失去[如图 3(b) 所示]。但在随后的演化中,压缩量 S_2 将出现振荡,且压缩系数越大,振荡幅值越大,光场在 X_2 方向的压缩效应将会重新出现(同时压缩量 S_1 在初始阶段随时间而减小,光场在 X_1 方向的压缩效应将会出现,随后压缩量 S_1 出现振荡, X_1 方向的压缩效应将会重复多次出现)。

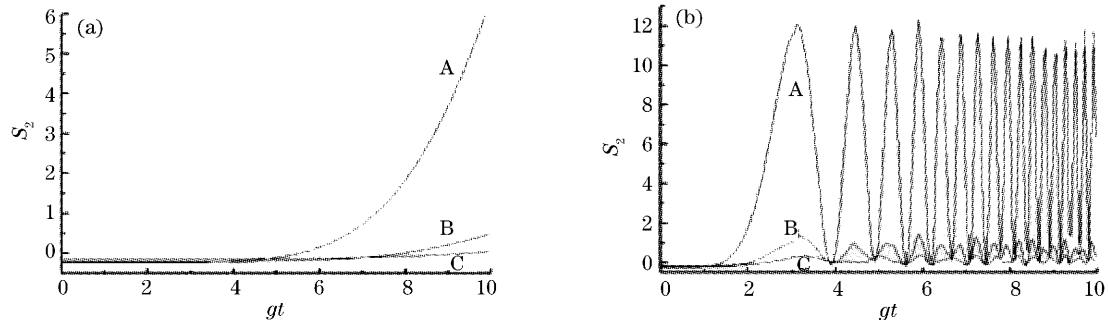


图 3 双光子过程中压缩量 (S_2) 随时间的演化, (a) $k=0.5$, (b) $k=4.0$, $|\beta|^2=5, \theta=0$, $gT=10$, 曲线 A, B, C 分别对应 r 为 2, 1, 0.5 的情况

Fig. 3 Squeezing (S_2) as a function of time for two-photon process with (a) $k=0.5$, (b) $k=4.0$, $|\beta|^2=5, \theta=0, gT=10$ and $r=2$ (curve A), 1 (curve B), 0.5 (curve C)

5 结 论

在这一工作中,我们研究了原子-光场耦合系数随时间变化的情况下,压缩态作为初始光场的双光子

过程 J-C 模型。分析了双光子过程中原子的布居数反转以及场的压缩性质。研究发现:在系统随时间的演化过程中,系统原子与场耦合系数变化的快慢、初始压缩光场的性质(包括压缩系数,压缩相位)均对布

居数反转以及场的压缩性质产生较大的影响:随着压缩系数的增大,原子布居数反转值的崩塌和回复频率加快,且回复的幅值减小。当耦合系数变化缓慢的时候,耦合系数变化将延迟崩塌与回复现象的发生;反之,耦合系数的变化在变化较快时则会加速崩塌与回复现象出现。对于光场的压缩效应,当原子-场耦合系数变化较慢时,光场将逐渐失去压缩性质;而当原子-场耦合系数变化较快时,压缩量将产生振荡,压缩效应将反复出现。

参 考 文 献

- 1 E. T. Jaynes, F. W. Cummings. Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to beam maser[J]. *Proc. IEEE*, 1963, **51**(1): 89~109
- 2 A. Joshi, R. R. Puri. Characteristics of Rabi oscillations in the two-mode squeezing state of the field[J]. *Phys. Rev. (A)*, 1990, **42**(7): 4336~4342
- 3 R. R. Puri, G. S. Agarwal. Finite-Q cavity electrodynamics: dynamical and statistical aspects[J]. *Phys. Rev. (A)*, 1987, **35**(8): 3433~3449
- 4 M. Brune, F. Schmidt-Kaler, A. Maali *et al.*. Quantum Rabi oscillation: a direct test of field quantization in a cavity[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1996, **76**(11): 1800~1803
- 5 J. M. Raimond, P. Goy, M. Gross *et al.*. Collective absorption of blackbody radiation by rydberg atom in a cavity: an experiment on bose statistics and brownian motion[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1982, **49**(2): 117~120
- 6 D. Meschede, H. Walther, G. Muller. One-atom maser[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1985, **54**(6): 551~554
- 7 J. H. Eberly, N. B. Narozhny, J. J. Sanchez-Mondragon. Periodic spontaneous collapse and revival in a simple quantum model[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1980, **44**(20): 1323~1326
- 8 T. R. Gentile, B. J. Hughey, D. Kleppner. Experimental study of one-and two-photon Rabi oscillations[J]. *Phys. Rev. (A)*, 1989, **40**(9): 5103~5115
- 9 G. Rempe, H. Walther, N. Klein. Observation of quantum collapse and revival in a one-atom maser[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1987, **58**(4): 353~356
- 10 J. S. Peng, G. X. Li. Effects of the dipole-dipole interaction on dynamic properties and atomic coherent trapping of a two-atom system[J]. *Phys. Rev. (A)*, 1993, **47**(5): 4212~4218
- 11 W. K. Lai, V. Buzek, P. L. Knight. Dynamics of a three-level atom in a two-mode squeezed vacuum[J]. *Phys. Rev. (A)*, 1991, **44**(9): 6043~6056
- 12 Tran Quang, P. L. Knight, V. Buzek. Quantum collapses and revivals in an optical cavity[J]. *Phys. Rev. (A)*, 1991, **44**(9): 6092~6096
- 13 A. Joshi, R. R. Puri. Dynamical evolution of the two-photon Jaynes-Cummings model in a Kerr-like medium[J]. *Phys. Rev. (A)*, 1992, **45**(7): 5056~5060
- 14 F. L. Li, S.-Y. Gao. Controlling nonclassical properties of the Jaynes-Cummings model by an external coherent field[J]. *Phys. Rev. (A)*, 2000, **62**: 043809
- 15 Amitabh Joshi, S. V. Lawanda. Generalized Jaynes-Cummings models with a time-dependent atom-field coupling[J]. *Phys. Rev. (A)*, 1993, **48**(3): 2276~2284
- 16 Xu Jingping, Yang Yaping. Time-dependent atom-field coupling Jaynes-Cummings model under an initial squeezing state[J]. *Acta Optics Sinica*, 2004, **24**(11): 1577~1580 (in Chinese)
- 许静平,羊亚平. 压缩态初始光场下变耦合系数的 J-C 模型. *光学学报*, 2004, **24**(11): 1577~1580
- 17 Peng Jingsheng, Li Gaoxiang. *Introduction of Modern Quantum Optics* [M]. Beijing: Chinese Science Press, 1996 (in Chinese)
- 彭金生,李高翔. *近代量子光学导论* [M]. 北京: 科学出版社, 1996