

文章编号: 0253-2239(2005)02-165-4

# 具有高阶色散项的交叉相位调制不稳定性分析\*

任志君 王 辉 金洪震 应朝福 金伟民 万 旭

(浙江师范大学信息光学研究所, 金华 321004)

**摘要:** 以包含了三、四阶色散项的耦合非线性薛定谔方程为基础, 重点研究了三、四阶色散对交叉相位调制不稳定性影响。结果表明: 三阶色散对调制不稳定性不起作用; 当满足一定条件时, 由于四阶色散的影响, 不仅在光纤的反常色散区, 而且在光纤的正常色散区, 交叉相位所致的调制不稳定性均发生在两个频谱区。当光纤各参量及两束入射光波功率一定时, 光纤反常色散区第一区域的增益谱要比正常色散区第一区域的增益谱宽; 同时, 反常色散区第二区域的增益谱比正常色散区第二区域的增益谱更靠近零点; 进一步对比反、正常色散区的这两个频谱区, 发现两个频谱区的范围有确定的对应关系。

**关键词:** 光纤光学; 交叉相位调制不稳定性; 四阶色散; 增益谱

中图分类号: TN253 文献标识码: A

## Cross-Phase Modulational Instability with High-Order Dispersion

Ren Zhijun Wang Hui Jin Hongzhen Ying Chaofu Jin Weimin Wan Xu

(Information Optics Institute, Zhejiang Normal University, Jinhua 321004)

**Abstract:** The effect of third-order and fourth-order dispersion on cross-phase modulational instability based on extended nonlinear Schrödinger equation is investigated. The result shows: Third-order dispersion has no effect on modulational instability. Because of fourth-order dispersion, cross-phase modulational instability occurs at two spectrum regions under the certain conditions in the both anomalous and normal dispersion regimes of fiber. Gain spectrum width of the first region of anomalous-dispersion regime is larger than that of normal-dispersion regime when other parameters are unchanged, and gain spectrum of the second region of anomalous-dispersion regime is near the zero than that of normal-dispersion regime, and two spectrum regions of two dispersion regimes have a corresponding relation when the parameters of fiber and the powers of two input lightwaves are certain.

**Key words:** fiber optics; cross-phase modulational instability; fourth-order dispersion; gain spectrum

## 1 引 言

光脉冲在光纤中传输就存在非线性和色散效应, 二者之间的相互作用必然导致对稳态的调制, 这种现象常被称为调制不稳定性 (Modulational instability)。由于调制不稳定性在高重复率超短光脉冲产生方面的重要作用<sup>[1,2]</sup>, 因此对它的研究引起了许多学者的兴趣<sup>[3~7]</sup>。当一束光在光纤中传输时, 只能在光纤的反常色散区发生调制不稳定性, 当两束光在光纤中传输时, 双光束所致的交叉相位调制不稳定性即可以发生在光纤的反常色散区, 也可以发生在光纤的正常色散区<sup>[4]</sup>。这为在光纤的正常色散区产生超短光脉冲

奠定了基础, 在实际应用中具有重要意义<sup>[6]</sup>。以往研究调制不稳定性的文献仅在研究单光束调制不稳定性时考虑了三、四阶色散的影响<sup>[5,7]</sup>, 而在研究双光束在光纤中交叉相位调制不稳定性时, 均未考虑高阶项的影响。实际上, 任何一种光纤中, 三、四阶色散项不可避免。本文就是以包含了三、四阶色散项的耦合非线性薛定谔方程组为基础, 进一步研究了光纤中双光束入射时的交叉相位调制不稳定性。

## 2 理 论

当两束光波在光纤中传输时, 包含高阶色散项

\* 浙江省自然科学基金(102056)和浙江省科技计划(2003c31011)资助课题。

作者简介: 任志君(1974~), 男, 浙江师范大学讲师, 硕士, 内蒙古呼和浩特市人, 主要从事非线性光纤光学的研究工作。  
E-mail: renzhijun@ejnu.cn。

收稿日期: 2004-04-27; 收到修改稿日期: 2004-07-05

的耦合非线性薛定谔方程为<sup>[3,4]</sup>

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} + \frac{1}{v_{g1}} \frac{\partial A_1}{\partial t} + \frac{i}{2} \beta_{21} \frac{\partial^2 A_1}{\partial t^2} = \frac{\beta_{31}}{6} \frac{\partial^3 A_1}{\partial t^3} - \frac{i\beta_{41}}{24} \frac{\partial^4 A_1}{\partial t^4} + i\gamma_1 [ |A_1|^2 + 2|A_2|^2 ] A_1, \quad (1)$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial z} + \frac{1}{v_{g2}} \frac{\partial A_2}{\partial t} + \frac{i}{2} \beta_{22} \frac{\partial^2 A_2}{\partial t^2} = \frac{\beta_{32}}{6} \frac{\partial^3 A_2}{\partial t^3} - \frac{i\beta_{42}}{24} \frac{\partial^4 A_2}{\partial t^4} + i\gamma_2 [ |A_2|^2 + 2|A_1|^2 ] A_2, \quad (2)$$

式中  $A(z, t)$  为慢变包络振幅;  $t$  是时间;  $z$  为传输距

离;  $\beta_{ij}$  是第  $j$  束光波的  $i$  阶群速度色散系数;  $\gamma$  为非线性系数。为便于数学上区别双光束, 分别用下标 1, 2 来标记这两束光波。

(1) 式、(2) 式的稳态解为

$$\bar{A}_j = \sqrt{P_j} \exp(i\phi_j),$$

其中  $\phi_j(z) = \gamma_j(P_j + 2P_{3-j})z$ ,  $j = 1, 2$ 。

微扰该稳态, 设微扰项  $|a_j(z, t)| \ll P_j^{1/2}$ , 则有

$$A_j = (\sqrt{P_j} + a_j) \exp(i\phi_j), \quad (3)$$

将(3)式代入(1)式、(2)式, 并使  $a_1$  和  $a_2$  线性化, 得

$$\frac{\partial a_1}{\partial z} + \frac{1}{v_{g1}} \frac{\partial a_1}{\partial t} + \frac{i}{2} \beta_{21} \frac{\partial^2 a_1}{\partial t^2} = \frac{\beta_{31}}{6} \frac{\partial^3 a_1}{\partial t^3} - \frac{i\beta_{41}}{24} \frac{\partial^4 a_1}{\partial t^4} + i\gamma_1 P_1 (a_1 + a_1^*) + 2i\gamma_1 (P_1 P_2)^{1/2} (a_2 + a_2^*), \quad (4)$$

$$\frac{\partial a_2}{\partial z} + \frac{1}{v_{g2}} \frac{\partial a_2}{\partial t} + \frac{i}{2} \beta_{22} \frac{\partial^2 a_2}{\partial t^2} = \frac{\beta_{32}}{6} \frac{\partial^3 a_2}{\partial t^3} - \frac{i\beta_{42}}{24} \frac{\partial^4 a_2}{\partial t^4} + i\gamma_2 P_2 (a_2 + a_2^*) + 2i\gamma_2 (P_1 P_2)^{1/2} (a_1 + a_1^*), \quad (5)$$

假设该方程组的通解形式为  $a_j = U_j \cos(kz - \Omega T_j) + iV_j \sin(kz - \Omega T_j)$ ,  $j = 1, 2$  (6)

其中  $k$  是波数,  $\Omega$  是微扰的角频率,  $T_j = t - z/v_{gj}$  是延迟时间。把(6)式代入(4)式、(5)式, 分别令每个方程的虚、实部为零, 可得关于  $U_1, U_2, V_1, V_2$  的四个齐次方程。要使该方程组有非零解的充要条件是它们的系数行列式为零, 因此有

$$\left[ \left( k - \frac{\beta_{31}}{6} \Omega^3 \right)^2 - f_1 \right] \left[ \left( k - \frac{\beta_{32}}{6} \Omega^3 \right)^2 - f_2 \right] = C_{\text{XPM}}, \quad (7)$$

其中

$$f_j = \left( \frac{1}{2} \beta_{2j} \Omega^2 - \frac{\beta_{4j}}{24} \Omega^4 + 2\gamma_j P_j \right) \left( \frac{1}{2} \beta_{2j} \Omega^2 - \frac{\beta_{4j}}{24} \Omega^4 \right), \quad j = 1, 2 \quad (8)$$

$$C_{\text{XPM}} = 16\gamma_1 \gamma_2 P_1 P_2 \left( \frac{\beta_{21}}{2} \Omega^2 - \frac{\beta_{41}}{24} \Omega^4 \right) \left( \frac{\beta_{22}}{2} \Omega^2 - \frac{\beta_{42}}{24} \Omega^4 \right), \quad (9)$$

当不考虑三阶和四阶色散时, 即(7)式~(9)式中  $\beta_{3j}$  和  $\beta_{4j}$  ( $j = 1, 2$ ) 均为零时, (7)式可简化, 简化后的方程与过去的文献完全一致, 由此推导出的交叉相位调制不稳定性的发生条件, 增益谱范围等一系列结果也与过去的研究结论完全一致<sup>[3,4]</sup>。

当考虑三阶和四阶色散时, (7)式是一个复杂的四次方程, 难于计算。为简化问题, 假设入射光波差别较小, 因此(7)式~(9)式中有  $\beta_{21} \approx \beta_{22} = \beta_2$ ,  $\beta_{31} \approx \beta_{32} = \beta_3$ ,  $\beta_{41} \approx \beta_{42} = \beta_4$ ,  $\gamma_1 \approx \gamma_2 = \gamma$ 。此时, (7)式的解为

$$\left( k - \frac{\beta_3}{6} \Omega^3 \right)^2 = \frac{1}{2} \{ (f_1 + f_2) \pm [(f_1 + f_2)^2 + 4(C_{\text{XPM}} - f_1 f_2)]^{1/2} \}, \quad (10)$$

当该式取负号且有  $C_{\text{XPM}} > f_1 f_2$ ,  $k$  为虚数, 这是微扰  $a_1, a_2$  能指数增长, 即发生调制不稳定性的充要条件。此时

$$k = \frac{\beta_3}{6} \Omega^3 + \frac{\sqrt{2}i}{2} \{ (f_1 + f_2) - [(f_1 + f_2)^2 + 4(C_{\text{XPM}} - f_1 f_2)]^{1/2} \}^{1/2}, \quad (11)$$

以往文献的研究结果表明三阶色散不影响单光束调制不稳定性的发生<sup>[5,7]</sup>。由(11)式及产生调制不稳定性的条件可知, 当双光束在光纤中传输时, 三阶色散对交叉相位调制不稳定性的发生仍无影响。当满足产生调制不稳定性的条件时, 由(11)式及增益的定义  $g(\Omega) = 2\text{Im}(k)$ , 可得增益为

$$g(\Omega) = \sqrt{2} \{ [(f_1 + f_2)^2 + 4(C_{\text{XPM}} - f_1 f_2)]^{1/2} - (f_1 + f_2) \}^{1/2}, \quad (12)$$

把(8)式、(9)代入  $C_{\text{XPM}} > f_1 f_2$  中, 调制不稳定性发生条件可写为

$$16\gamma^2 P_1 P_2 > \left( \frac{\beta_2}{2} \Omega^2 - \frac{\beta_4}{24} \Omega^4 + 2\gamma P_1 \right) \left( \frac{\beta_2}{2} \Omega^2 - \frac{\beta_4}{24} \Omega^4 + 2\gamma P_2 \right), \quad (13)$$

把(13)式按  $\Omega$  的降幂排列, 有

$$\Omega^8 - \frac{24\beta_2}{\beta_4} \Omega^6 - \left[ \frac{48\gamma}{\beta_4} (P_1 + P_2) - \frac{144\beta_2^2}{\beta_4^2} \right] \Omega^4 + \frac{576\gamma\beta_2}{\beta_4^2} (P_1 + P_2) \Omega^2 - 6912 \frac{\gamma^2 P_1 P_2}{\beta_4^2} < 0, \quad (14)$$

$$(14) \text{ 式可写为 } (\Omega^2 - \Omega_1^2)(\Omega^2 - \Omega_2^2)(\Omega^2 - \Omega_3^2)(\Omega^2 - \Omega_4^2) < 0, \quad (15)$$

当(15)式成立时,调制不稳定性能够发生。经过复杂的计算,可得(15)式中的四个参量分别为

$$\Omega_{1,2,3,4}^2 = \frac{6\beta_2 \pm \{36\beta_2^2 + 24\gamma\beta_4(P_1 + P_2) \pm 24\gamma\beta_4[(P_1 + P_2)^2 + 12P_1P_2]^{1/2}\}^{1/2}}{\beta_4}, \quad (16)$$

其中(16)式中前、后均取正号时设为  $\Omega_1^2$ ,前面取正号、后面取负号时设为  $\Omega_2^2$ ,前面取负号、后面取正号时设为  $\Omega_3^2$ ,前、后均取负号时设为  $\Omega_4^2$ 。

### 3 分析讨论

#### 3.1 反常色散区的增益谱

在光纤的反常色散区,有  $\beta_2 < 0, \beta_4 < 0$ 。在该条件下,可知  $\Omega_2^2 < 0$  及  $\Omega_4^2 > 0$  恒成立。

要使  $\Omega_1^2 > 0$ ,由(16)式有

$$3\beta_2^2 - 2\gamma|\beta_4|\{(P_1 + P_2) + [(P_1 + P_2)^2 + 12P_1P_2]^{1/2}\} > 0, \quad (17)$$

由(16)式及条件(17)式,可知  $\Omega_3^2 > 0$  恒成立。

可见,在考虑四阶色散的影响下,要保证调制不稳定性发生,必须要求光纤的二阶色散系数  $\beta_2$ 、四阶色散系数  $\beta_4$ 、非线性系数  $\gamma$  及两入射光波的功率  $P_1, P_2$  满足(17)式所决定的关系。

由(16)式及反常色散区的条件,还可得出:  $\Omega_4^2 > \Omega_3^2 > \Omega_1^2 > 0$ 。

因此,产生调制不稳定性微扰频率所应满足的(14)式就转化为

$$(\Omega^2 - \Omega_1^2)(\Omega^2 - \Omega_3^2)(\Omega^2 - \Omega_4^2) < 0, \quad (18)$$

由该条件可知,当  $\Omega$  满足  $0 < |\Omega| < |\Omega_1|$  或  $|\Omega_3| < |\Omega| < |\Omega_4|$  时,(15)式成立,交叉相位调制不稳定性可发生在两个频谱区,与过去的研究结论对照<sup>[3,4]</sup>,说明在反常色散区,四阶色散导致了一个新的发生交叉相位调制不稳定性微扰的频谱区。

#### 3.2 正常色散区的增益谱

在光纤的正常色散区,有  $\beta_2 > 0, \beta_4 > 0$ 。在该条件下,可知  $\Omega_1^2 > 0$  及  $\Omega_3^2 < 0$  恒成立。同理,为满足  $\Omega_2^2 > 0$  及  $\Omega_4^2 > 0$ ,必有下式成立:

$$3\beta_2^2 - 2\gamma|\beta_4|\{[(P_1 + P_2) + 12P_1P_2]^{1/2} - (P_1 + P_2)\} > 0, \quad (19)$$

在此条件下,有  $\Omega_1^2 > \Omega_2^2 > \Omega_4^2 > 0$ ,同样,  $\Omega$  满足  $0 < |\Omega| < |\Omega_4|$  或  $|\Omega_2| < |\Omega| < |\Omega_1|$  时,在相应区间内有交叉相位调制不稳定性发生。说明在正常色散区,四阶色散同样导致了一个新的发生交叉相位调制不稳定性微扰的频谱区。

#### 3.3 反、正常色散区增益谱宽度的对比

对于常规光纤,当入射功率较小时,(17)式和(18)式所决定的条件一般满足,在上述条件满足的情况下,设反、正常色散区中,凡接近零点的增益区域均称为第一频谱区,远离零点的均称为第二频谱区。下面各式中,为便于区别,凡是反常色散区,用下标  $\Lambda$  标记;正常色散区,用下标  $N$  标记。则由

$$\frac{\Omega_{\Lambda 1}^2}{\Omega_{\Lambda 4}^2} = \frac{6|\beta_2| - \{36\beta_2^2 - 24\gamma|\beta_4|(P_1 + P_2) - 24\gamma|\beta_4|[(P_1 + P_2)^2 + 12P_1P_2]^{1/2}\}^{1/2}}{6|\beta_2| - \{36\beta_2^2 + 24\gamma|\beta_4|(P_1 + P_2) - 24\gamma|\beta_4|[(P_1 + P_2)^2 + 12P_1P_2]^{1/2}\}^{1/2}} > 1, \quad (20)$$

可知,反常色散区第一频谱区的增益谱比正常色散区第一频谱区增益谱更宽。由

$$\frac{\Omega_{\Lambda 3}^2}{\Omega_{N 2}^2} = \frac{6|\beta_2| + \{36\beta_2^2 - 24\gamma|\beta_4|(P_1 + P_2) - 24\gamma|\beta_4|[(P_1 + P_2)^2 + 12P_1P_2]^{1/2}\}^{1/2}}{6|\beta_2| + \{36\beta_2^2 + 24\gamma|\beta_4|(P_1 + P_2) - 24\gamma|\beta_4|[(P_1 + P_2)^2 + 12P_1P_2]^{1/2}\}^{1/2}} < 1, \quad (21)$$

$$\frac{\Omega_{\Lambda 4}^2}{\Omega_{N 1}^2} = \frac{6|\beta_2| + \{36\beta_2^2 - 24\gamma|\beta_4|(P_1 + P_2) + 24\gamma|\beta_4|[(P_1 + P_2)^2 + 12P_1P_2]^{1/2}\}^{1/2}}{6|\beta_2| + \{36\beta_2^2 + 24\gamma|\beta_4|(P_1 + P_2) + 24\gamma|\beta_4|[(P_1 + P_2)^2 + 12P_1P_2]^{1/2}\}^{1/2}} < 1, \quad (22)$$

可知,反常色散区第二频谱区的增益谱比正常色散区第二频谱区增益谱更靠近零点。而且,当光纤各参量及两束入射光波功率一定时,由(20)式~(22)式可知,反、正常色散区的这两个频谱区的范围

有确定的对应关系。

下面用图示说明上述结论。为便于对照,作图时,参量均为:  $\beta_2 = \pm 20 \text{ ps}^2/\text{km}, \beta_4 = \pm 0.02 \text{ ps}^4/\text{km}$  (反、正常色散区分别取负、正号),  $\gamma_1 = 2 \text{ W}^{-1} \text{ km}^{-1}$ ,

并入入射功率:  $P_1=20\text{ W}$ ,  $P_2=30\text{ W}$ 。在上述给定参量的情况下, 计算可得, 在反常色散区:  $\Omega_1 = \pm 5.4563$ ,  $\Omega_3 = \pm 109.4085$ ,  $\Omega_4 = \pm 109.5887$ ; 正常色散区:  $\Omega_4 = \pm 3.1154$ ,  $\Omega_2 = \pm 109.5002$ ,  $\Omega_1 = \pm 109.6796$ 。

图 1 是反常色散区的交叉相位调制不稳定性增益谱。不论在反常色散区, 还是正常色散区, 由于两个频谱区相距很远, 而且, 两色散区第二频谱区范围都非常的窄, 很难清楚地对比反、正常色散区的增益谱范围。因此, 在图 2、图 3 中, 两个频谱区域分别放大显示。由于增益谱关于  $\Omega=0$  对称, 为简单起

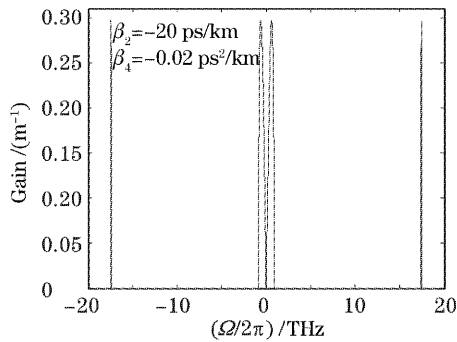


图 1 交叉相位调制不稳定性增益谱

Fig. 1 Gain spectrum of cross-phase modulation instability

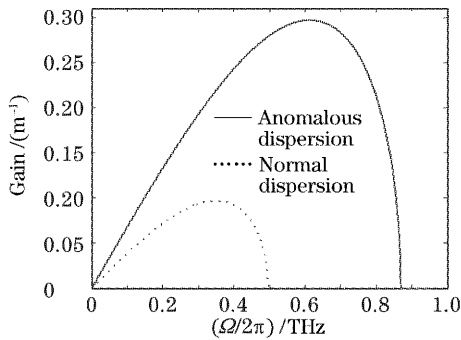


图 2 第一频谱区增益谱 ( $\Omega > 0$ )

Fig. 2 Gain spectrum of the first region ( $\Omega > 0$ )

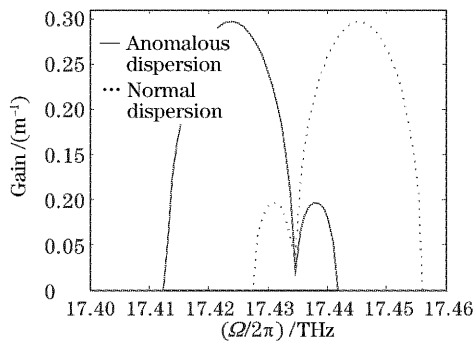


图 3 第二频谱区增益谱 ( $\Omega > 0$ )

Fig. 3 Gain spectrum of the second region ( $\Omega > 0$ )

见而又不失一般性, 只绘制了  $\Omega > 0$  时的图示, 图 2、图 3 中实线表示反常色散区的增益谱, 虚线表示正常色散区增益谱。

## 4 结 论

在考虑高阶色散的情况下, 通过对双光束所致的交叉相位调制不稳定性的研究表明: 与过去三阶色散不影响单光束所致调制不稳定性发生的结论一样, 三阶色散对双光束所致的交叉相位调制不稳定性仍不起作用; 四阶色散导致反常和正常色散区均产生一个新的交叉相位调制不稳定性频谱区, 但不论在反常色散区, 还是正常色散区, 两个频谱区均相距很远。分别对比反、正常色散区两个对应的频谱区发现: 光纤反常色散区第一区域的增益谱要比正常色散区的增益谱宽, 这与过去不考虑四阶色散时所得的结论一致; 而反常色散区第二区域的增益谱比正常色散区第二区域的增益谱更靠近零点。在光纤参量和入射功率一定的情况下, 两个频谱区的范围有确定的对应关系。

## 参 考 文 献

- 1 A. Hasegawa. Generation of a train of soliton of pulses by induced modulational instability in optical fibers[J]. *Opt. Lett.*, 1984, **9** (7): 288~290
- 2 E. M. Dianov, P. V. Mamyshev, A. M. Prokhorov *et al.*. Generation of a train of fundamental solitons at a high repetition rate in optical fibers[J]. *Opt. Lett.*, 1989, **14**(18): 1008~1010
- 3 G. P. Agrawal. *Nonlinear Fiber Optics, Principled & Applications of Nonlinear Fiber Optics* [M]. Jia Dongfang, Yu Zhen *et al.* trans., Beijing: Publishing House of Electrical Industry, 2002. 88~93, 167~170 (in Chinese)  
G. P. Agrawal 著. 非线性光纤光学原理及应用[M]. 贾东方, 余震虹等译. 北京: 电子工业出版社, 2002. 88~93, 167~170
- 4 G. P. Agrawal. Modulation instability induced by cross-phase modulation[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1987, **59**(8): 880~883
- 5 Ren Zhijun, Wang Jing, Yang Ailing *et al.*. Effect of quintic nonlinearity on modulational instability in the anomalous-dispersion regime of fiber[J]. *Chin. J. Lasers*, 2004, **31**(5): 595~598 (in Chinese)  
任志君, 王晶, 杨爱玲等. 五次非线性对光纤反常色散区调制不稳定性影响[J]. 中国激光, 2004, **31**(5): 595~598
- 6 Cao Wenhua, Liu Songhao, Guo Qi *et al.*. Generation of a train of ultrashort optical pulses by cross-phase modulation in optical fibers [J]. *Acta Optica Sinica*, 1997, **17**(7): 930~936 (in Chinese)  
曹文华, 刘颂豪, 郭旗等. 光纤中基于交叉相位调制的超短光脉冲串的产生[J]. 光学学报, 1997, **17**(7): 930~936
- 7 Zhang Shumin, Xu Wencheng, Luo Aiping *et al.*. Modulation instability of femtosecond optical pulses in decreasing dispersion fibers[J]. *Acta Optica Sinica*, 2001, **21**(6): 656~659 (in Chinese)  
张书敏, 徐文成, 罗爱平等. 色散缓变光纤中飞秒光脉冲的调制不稳定性研究[J]. 光学学报, 2001, **21**(6): 656~659