

文章编号: 0253-2239(2005)02-157-4

## 孔径光阑限制下高斯光束的传输\*

滕树云 刘立人 万玲玉 孙建锋

(中国科学院上海光学精密机械研究所, 上海 201800)

**摘要:** 对高斯光束在硬边孔径限制下的衍射进行了详细的理论研究,就不同口径的圆孔限制下高斯光束在非涅耳衍射区和夫琅禾费衍射区的分布进行了理论分析,从而得到了孔径受限高斯光束的横向以及轴向的衍射公式,进而对高斯光束在不同衍射区域内衍射光场分布形状随孔径尺寸变化时的演化规律进行了数值计算,并对小口径光阑受限的高斯光束的衍射与平行光经同尺寸光阑的衍射进行了比较。结果表明在较小口径下,两者的分布基本一致。得到的孔径光阑限制下高斯光束的传输规律为高斯光束在自由空间光通信和光学超分辨中的应用提供了理论基础。

**关键词:** 衍射光学; 高斯光束; 非涅耳衍射; 夫琅禾费衍射

中图分类号: O431.1 文献标识码: A

## Propagation of Gaussian Beam Limited by an Aperture

Teng Shuyun Liu Liren Wan Lingyu Sun Jianfeng

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, The Chinese Academy of Sciences, Shanghai 201800)

**Abstract:** Theoretically, the diffraction of Gaussian beam limited by the hard-edged aperture is studied and the diffraction distributions of Gaussian beam limited by the apertures with different calibers in Fresnel and Fraunhofer zones are analyzed in detail, and the evolution relationship of the diffraction of Gaussian beam and the different size of the aperture in the different diffraction regions is obtained. The results show that the diffraction of Gaussian beam limited by the pupil function agrees with the Rayleigh diffraction when the caliber of the hard-edged aperture is small enough. These propagation rules of Gaussian beam limited by the aperture could promote the applications of Gaussian beam in the optical communication and the optical super-resolution.

**Key words:** diffraction optics; Gaussian beam; Fresnel diffraction; Fraunhofer diffraction

### 1 引 言

通常在激光光束衍射的研究中,大多数的文献仅仅局限于平行光波或球面波的讨论<sup>[1~4]</sup>,这些光波的简化模型一般不考虑光束的发散或会聚能力以及光束空间光强的分布引起的各种光束衍射效应,因而使许多问题得以简化。众所周知,高斯光束更接近于由激光器发出的激光光束实际光强分布的情况。从数学上讲,该模式的光束在空间具有无限边界的分布,但在实际的激光发射和传输中,总存在有限边界的硬边孔径对激光光束进行限制,硬边孔径的加入必将引起高斯光束能量的损失,因此边界限制下高斯光束的能量衍射损耗成为人们普遍关心的

研究内容<sup>[5~7]</sup>。然而在激光定向、激光跟踪、激光测距以及星间激光通信等激光传输的应用中,激光光束的衍射光场的空间分布以及衍射角的大小均起到了关键性的作用,但有关有限边界对高斯光束的衍射光场空间分布形状影响的研究却很少。为此本文对边界限制下高斯光束在非涅耳衍射区和夫琅禾费衍射区的衍射进行了详细地理论分析,给出了非涅耳衍射区和夫琅禾费衍射区内高斯光束的衍射光强公式,并对不同口径的圆孔限制下高斯光束的横向以及轴向的衍射光强分布进行了数值计算。通过数值计算,我们发现较小口径下孔径受限高斯光束的衍射与平行光照明下同尺寸小口径孔径光阑的衍射

\* 国家科技部(2002CCA03500)资助课题。

作者简介: 滕树云(1971~),女,山东德州人,讲师,硕士。主要从事衍射光学、光学信息处理以及光通信方面的研究工作。E-mail: tengshuyun@mail.siom.ac.cn。

收稿日期: 2003-12-02; 收到修改稿日期: 2004-08-26

完全一致。

## 2 孔径限制下高斯光束的衍射理论

如图 1 所示,激光器发出的单一最低阶横模光

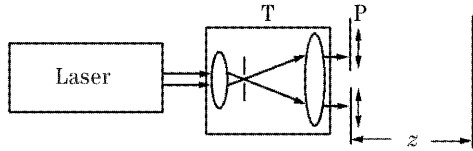


图 1 受限高斯光束衍射的示意图

Fig. 1 The schematic diagram of the diffraction of Gaussian beam limited by aperture

束,经整形准直放大系统 T 准直后成为均匀分布的高斯光斑(或者经光纤传输后输出一光点再放大为均匀的高斯光斑)。具有一定发射口径(即达到衍射极限光束)并且具有一定的发散度的高斯光束经有限口径的孔径限制后,在其后的衍射区域内得到高斯光束的衍射光场分布。假设经准直放大后的高斯光束的振幅为  $a(x_0, y_0)$ , 可变口径光阑的孔径函数为  $p(x_0, y_0)$ , 则激光光束经孔径光阑后的振幅可写为  $b(x_0, y_0)$ :

$$b(x_0, y_0) = a(x_0, y_0)p(x_0, y_0), \quad (1)$$

由衍射理论可知,受限的激光光束菲涅耳衍射的光场分布  $A(x_1, y_1)$  为

$$A(x_1, y_1) = C \iint b(x_0, y_0) \exp\left(i \frac{\pi x_0^2 + y_0^2}{\lambda z}\right) \exp\left[i \frac{2\pi}{\lambda z}(x_0 x_1 + y_0 y_1)\right] dx_0 dy_0. \quad (2)$$

如果光波的传输距离足够远,该处的衍射光场可等效为衍射远场,即夫琅禾费衍射场。光束发散度以及光束的衍射极限均采用远场衍射光斑的大小来衡量。此时光波衍射远场的光场分布形式如下:

$$A(x_2, y_2) = C' \iint b(x_0, y_0) \exp\left[i \frac{2\pi}{\lambda z}(x_0 x_2 + y_0 y_2)\right] dx_0 dy_0. \quad (3)$$

其中  $C$  和  $C'$  分别表示受限的激光光束在菲涅耳衍射区和夫琅禾费衍射区即远场的复振幅分布的幅值,与光波波长和光波传输距离有关。因高斯光束具有轴对称性,  $a(x_0, y_0)$  可表示为极坐标的形式  $a(r_0)$ , 如果孔径光阑也具有轴对称性,则上述两方程均可简化为一维积分形式:

$$A(r_1) = 2\pi C \int_0^\infty a(r_0) p(r_0) \exp\left(i \frac{\pi r_0^2}{\lambda z}\right) J_0\left(i \frac{2\pi r_0 r_1}{\lambda z}\right) r_0 dr_0, \quad (4)$$

$$A(r_2) = 2\pi C' \int_0^\infty a(r_0) p(r_0) J_0\left(i \frac{2\pi r_0 r_2}{\lambda z}\right) r_0 dr_0, \quad (5)$$

其中  $J_0$  表示零阶贝塞尔函数。

假设高斯光束的空间振幅分布为  $a(r_0) = L \exp(-r_0^2/w_0^2)$ , 其中  $L$  为高斯光束空间振幅分布的幅值,  $w_0$  为高斯光束的束腰。同时孔径光阑是半径为  $R$  的圆孔,其孔径函数可表示为  $p(r_0) = \text{circ}(r_0/R)$ , 其中  $\text{circ}$  为圆孔函数。于是得到圆孔限制下高斯光束在菲涅耳衍射区和夫琅禾费衍射区内的衍射光场的分布分别为:

$$A(r_1) = 2\pi CL \int_0^R \exp\left(\frac{r_0^2}{w_0^2}\right) \exp\left(i \frac{\pi r_0^2}{\lambda z}\right) J_0\left(i \frac{2\pi r_0 r_1}{\lambda z}\right) r_0 dr_0, \quad (6)$$

$$A(r_2) = 2\pi C' L \int_0^R \exp\left(\frac{r_0^2}{w_0^2}\right) J_0\left(i \frac{2\pi r_0 r_2}{\lambda z}\right) r_0 dr_0. \quad (7)$$

由以上两式可以看出,圆孔的半径  $R$  最终出现在积分公式的积分上限中,  $R$  对高斯光束衍射的影响得不到解析解,因此需要对圆孔限制下高斯光束的衍射进行数值计算,从而得到孔径光阑的边界对衍射光场的影响。

对于沿传输轴上的衍射,即  $r_1 = r_2 = 0$ , (6) 式、(7) 式可写为简单的形式:

$$A_1(z) = 2\pi CL \int_0^R \exp\left(\frac{r_0^2}{w_0^2}\right) \exp\left(i \frac{2\pi r_0^2}{\lambda z}\right) r_0 dr_0 = A_0 \left[ \exp\left(\frac{R^2}{w_0^2}\right) \exp\left(i \frac{\pi R^2}{\lambda z}\right) - 1 \right], \quad (8)$$

$$A_2(z) = 2\pi C' L \int_0^R \exp\left(\frac{r_0^2}{w_0^2}\right) r_0 dr_0 = A_1 \left[ \exp\left(\frac{R^2}{w_0^2}\right) - 1 \right], \quad (9)$$

其中  $A_0 = \frac{\pi L}{i\lambda z(1/\omega_0^2 + i\pi/\lambda z)}$ ,  $A_1 = \frac{\pi L\omega_0^2}{i\lambda z}$ , 由 (8) 式、(9) 式, 很容易得到一定半径的圆孔限制下高斯光束在非涅耳衍射区和夫琅禾费衍射区内轴上的衍射光强分布。

### 3 孔径限制下高斯光束衍射的数值计算

为了直观地描述孔径光阑的有限口径对高斯光束衍射的影响, 我们对圆孔限制下高斯光束的非涅耳衍射和夫琅禾费衍射进行了数值计算, 图 2~图 4 给出了相应的数值计算结果。图 2 为不同口径圆孔限制下高斯光束沿传输轴在非涅耳衍射区内的归一化的衍射光强分布。可以看出, 非涅耳衍射区内衍射光强随着传输距离的增加发生震荡, 并且震荡的周期也相应增加。到达远场时, 震荡消失, 由 (9) 式可知, 光强分布反比于传输距离的平方, 因而随传输距离的增加强度平滑降低, 不再出现起伏。此外, 随着  $w_0/R$  的增加, 归一化衍射光强的震荡振幅逐渐增大, 直至震荡幅值达到最大值 4, 等效为平行光沿传输轴上的衍射<sup>[8]</sup>。

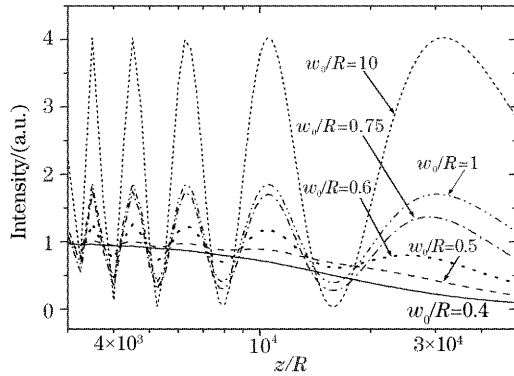


图 2 不同截断比时受限高斯光束轴上非涅耳衍射

Fig. 2 Fresnel axial diffraction of Gaussian beam limited by a circular aperture with different ratios of wave waist and radius of the aperture

图 3 和图 4 分别给出了在一定传输距离 ( $z = 240 \text{ mm}$ ) 处得到的非涅耳衍射光场和衍射远场 (焦距为  $f = 240 \text{ mm}$  的透镜焦面) 的横向分布, 可以看出, 当圆孔的半径非常小如  $R = w_0/5$  时, 非涅耳衍射光强分布较为平滑, 远场则类似于贝塞尔函数的空间分布, 与平行光照明下圆孔的衍射相接近。随着圆孔半径的增加, 受限高斯光束非涅耳衍射的光强分布轮廓出现剧烈的起伏, 之后圆孔半径继续增加, 衍射光强分布又趋于平滑, 最终趋近于无边界限制下高斯光束的非涅耳衍射。此外, 随着孔径半径的增加,

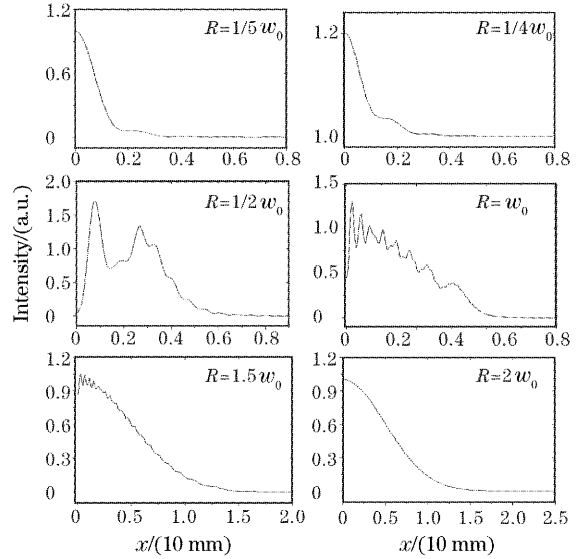


图 3 不同截断比时受限高斯光束的非涅耳衍射的横向衍射分布

Fig. 3 Fresnel axial diffraction of Gaussian beam limited by circles with different ratios of wave waist and radius of the aperture

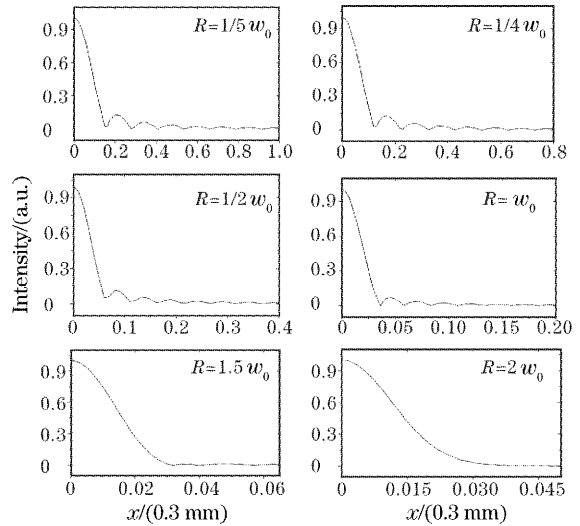


图 4 不同截断比时受限高斯光束的夫琅禾费衍射的横向分布

Fig. 4 Fraunhofer diffraction of Gaussian beam limited by circles with different ratios of wave waist and radius of the aperture

衍射远场也逐渐过渡为平滑的高斯分布。这是由于在小孔径限制下高斯光束仅有中央部分透过衍射孔, 该部分光强空间分布的起伏不大, 因此其衍射光强的分布基本接近圆孔的远场衍射光强的分布, 圆孔的衍射起主导作用。随着圆孔口径的增大, 透射的高斯型光束的衍射与圆孔的衍射效应相均衡, 因此衍射光强的起伏较大。当圆孔半径增大到一定程

度时, 高斯光束的绝大部分光场分布均可通过圆孔进行衍射, 因而在菲涅耳衍射区内的衍射呈现为高斯光束的衍射效应, 边界圆孔的衍射效应的影响相对较小。当  $R=2w_0$ , 圆孔的边界效应基本可以忽略。

经上述计算, 我们知道  $R/w_0$  较大时, 受限高斯光束的衍射接近自由空间高斯光束的衍射, 而当  $R/w_0$  较小时, 受限高斯光束的衍射与平行光照明孔径的衍射相似, 下面我们就受限高斯光束的衍射与硬边口径限制下平行光束的衍射进行了比较。

为比较较小口径下高斯光束与平行光束的衍射的差异, 分别对他们在菲涅耳衍射区内传输距离为 240 mm 处的衍射进行了数值计算。结果如图 5 所示, 可以看出, 当孔径光阑的口径相对于高斯光束的波腰较小时, 一般  $R < w_0/5$ , 两者的衍射效应几乎完全等价。因此高斯光束在较小口径的孔径光阑限制下的衍射可以用平行光照明下光瞳函数的衍射来代替。

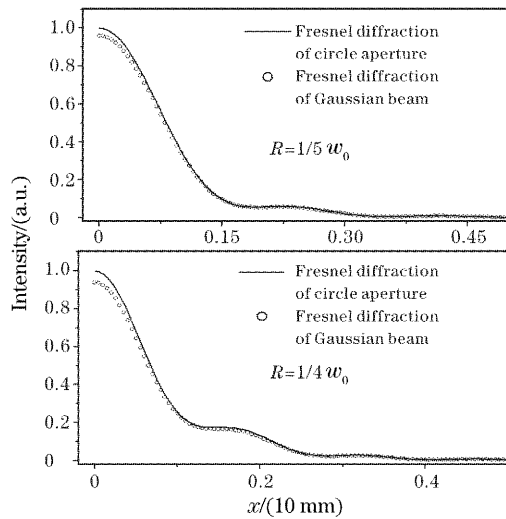


图 5 高斯光束和平行光照明下圆孔的菲涅耳衍射  
Fig. 5 Fresnel diffractions of a circular aperture illuminated by Gaussian beam and the parallel light

## 4 结 论

对孔径受限下高斯光束的菲涅耳衍射和夫琅禾费衍射进行了详细的理论分析, 并就孔径限制下的高斯光束的衍射随孔径尺寸的演化进行了大量的数值计算, 从而发现了小口径孔径光阑限制下高斯光束的衍射与平行光照明下光瞳函数的衍射完全一致。因而小口径光阑限制下高斯光束的衍射可以用光瞳函数的衍射来简化处理, 且高斯光束的衍射与瑞利衍射相比并无衍射旁瓣出现, 因而在超分辨的应用中无疑自动消除了衍射旁瓣的影响。得到的这些结论将对高斯光束在通信以及光学超分辨等方面的应用提供了有益的帮助和理论基础。

## 参 考 文 献

- 1 Zhou Guoquan, Zhao Daomu, Wang Shaomin. Characteristics of axial light intensity of planar wave diffracted by small circular aperture[J]. *Acta Optica Sinica*, 2003, **23**(1): 22~25 (in Chinese)  
周国泉, 赵道木, 王绍民. 平面波经小圆孔衍射的轴上光强特性[J]. *光学学报*, 2003, **23**(1): 22~25
- 2 Guo Jihua, Guo Feng, Zhu Zhaoming. Diffraction of a small aperture-near field optics theory[J]. *Acta Optica Sinica*, 1998, **18**(10): 1395~1398 (in Chinese)  
郭继华, 郭峰, 朱兆明. 微小孔衍射——近场光学理论[J]. *光学学报*, 1998, **18**(10): 1395~1398
- 3 C. J. R. Shoppard, M. Hrynevych. Diffraction by a circular aperture: A generalization of Fresnel diffraction theory[J]. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1992, **9**(2): 274~281
- 4 Min Gu, X. S. Gan. Fresnel diffraction by circular and serrated aperture illuminated with ultrashort pulsed-laser beam[J]. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1996, **13**(4): 771~778
- 5 Born M, Wolf E. *Principles of Optics* [M]. 7th (expanded), Cambridge: Press of University of Cambridge, Chap. 8 and Chap. 10
- 6 Lü Baida. *Laser Optics—Laser Beam Propagation and Beam Quality Control* [M]. Chengdu: Sichuan University Press, 1992, Chapter 3 (in Chinese)  
吕百达. *激光光学——光束传播与光束质量控制* [M]. 成都: 四川大学出版社, 1992
- 7 Wang Xiqing, Ke Zunping, Lü Baida. Losses of sinusoidal-Gaussian beams propagating through a hard aperture[J]. *Laser Technol.*, 2001, **25**(1): 35~38 (in Chinese)  
王喜庆, 柯尊平, 吕百达. 正弦类高斯光束通过硬边光阑的衍射损耗[J]. *激光技术*, 2001, **25**(1): 35~38
- 8 J. M. Stone. *Radiation and Optics* [M]. New York: McGraw-Hill, 1963. Chap. 10, 204