

文章编号: 0253-2239(2005)12-1707-5

亚表面圆柱体对热波的多重散射问题*

马晓波¹ 胡超² 谈和平¹

(¹ 哈尔滨工业大学能源科学与工程学院, 哈尔滨 150001)
(² 哈尔滨工业大学航天学院, 哈尔滨 150001)

摘要: 极端条件下的传热问题是工程热物理研究中的重要课题。基于非傅里叶热传导定律,采用波函数展开法,研究了含圆柱缺陷非透明体中热波散射问题。基于热传导波动模型给出了物体中热波多重散射问题的一般解。温度波由调制光束在材料表面激发,缺陷表面的边界条件为绝热。具体分析了几何参量、各物理参量对温度分布的影响,特别分析了热波波长对温度变化的作用,并给出了温度变化的数值结果。研究结果可望为红外辐射技术、热波成像等问题的分析提供理论基础和参考数据。在检测金属材料缺陷空间分布的激光热波探测系统中应用。

关键词: 散射; 非傅里叶导热; 热波; 波散射; 缺陷; 红外成像

中图分类号: TK124; TN247; Q631 文献标识码: A

Thermal Wave Multiple Scattering by Subsurface Cylinders

Ma Xiaobo¹ Hu Chao² Tan Heping¹

(¹ School of Energy Science and Technology, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001)
(² School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001)

Abstract: Based on non-Fourier's law of heat conduction, by using the expansion method of wave functions, the thermal wave scattering by subsurface cylinders in the opaque body is investigated. A general solution of multiple scattered waves in solids based on wave equations of heat conduction is given. The thermal wave is excited at surfaces of opaque materials by modulated optical beams. The circular cylinder is taken as a cavity with thermal insulation conditions. The effects of different geometric and physical parameters on the temperature distribution, and especially the effect of thermal wavelength on the temperature are analyzed. The model can be applied to the infrared radiometry technique and photothermal wave imaging. And also it can be used to determine the distribution of the defects by the laser detector.

Key words: scattering; non-Fourier heat conduction; thermal wave; wave scattering; defect; infrared imaging

1 引 言

不同的亚表面物理特性和边界条件将影响热的传播与扩散,并直接反映在材料表面的温度场上。利用激光热波探测系统,测量材料表面的温度变化,可获取材料内的结构信息,达到检测和探伤目的^[1]。热波无损检测技术对于航空、航天新材料的研究,提高工业产品设备的可靠性等都具有重要的意义。

当急速加热或在极低温下,经典傅里叶导热理论具有局限性,人们提出了非傅里叶导热定律。热波模型是对经典傅里叶导热定律的修正,可用来描

述传热的弛豫性质。当导热方程与能量方程联立时,就会得到双曲热传导方程。非傅里叶导热在许多情况下出现,例如激光加热,低温多层绝缘和超导薄膜等。当载热体的波长与结构特征尺度相比拟,或传热的时间比达到热平衡态所需的时间短时,传热具有波动性^[2,3]。

Peshkov^[5]采用超流体液氮,首次实验发现了在接近绝对零度时介质中热波的存在。从此热传播的波动性开始受到人们的重视。Cattaneo等^[6]提出了热波模型。自20世纪90年代初,国内外学者

* 国家自然科学基金重点项目(50336010)资助课题。

作者简介: 马晓波(1965~),女,哈尔滨人,副研究员,博士研究生,主要从事极端条件下的传热问题。

E-mail: maxiaobo@hit.edu.cn

收稿日期: 2004-12-28; 收到修改稿日期: 2005-05-14

相继对短脉冲激光加热过程中的微观问题^[4,7-9]和基于热扩散方程的含圆柱亚表面与材料表面间的热波多重散射问题^[10-12]进行了研究。近几年,国内以激光应用为背景,对激光照射下材料中双曲型导热问题也开始了研究^[13-16]。

目前在红外热成像中,在确定含缺陷试件中的温度分布时,采用的模型主要是基于经典傅里叶导热定律,即分析计算时采用的抛物型热扩散方程。实际上,在采用激光加热时,由于急速加热,导致试件内的温度往往具有波动性。

本文基于非傅里叶热传导定律,采用双曲型热波方程,研究含圆柱缺陷非透明体中热波散射问题。分析研究各物理参量对温度分布的影响,特别是入射波数对温度变化的影响。

2 热波控制方程及其求解

研究一个半无限光学不透明的热力学厚体结构。一个半径为 a 的无限长绝热圆柱埋藏在距表面为 b 的深度上。调制频率为 f 的平面光束照射在物体表面,导致物体内部形成热波过程,如图 1 所示。基于非经典傅里叶导热定律,可得到固体介质内含热源的波控制方程^[2,3]:

$$\nabla^2 T = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{1}{D} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{Q}{\lambda}, \quad (1)$$

式中 $D = \lambda/\rho c_p$ 为热扩散率; λ, c_p, ρ 分别为材料的热导系数、定压比热容和密度; $c = \sqrt{D/\tau}$ 为热波传播速度; τ 为热弛豫时间; T 为固体介质内温度; Q 为固体内单位体积热释放率。本文研究无内热源情况。

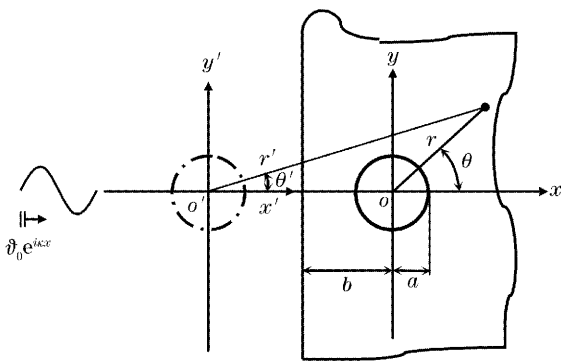


图 1 谐波加热物体和坐标

Fig. 1 Specimen with harmonic heating and its coordinates

研究问题的周期稳态解。设 $T = T_0 + \text{Re}[\vartheta \exp(-i\omega t)]$, 则温度波动方程(1)可化为如下形式:

$$\nabla^2 \vartheta + \kappa^2 \vartheta = 0, \quad (2)$$

式中 T_0 为平均温度; ω 为圆频率, $\omega = 2\pi f$; κ 为复变数波数, $\kappa = (\omega^2/c^2 + i\omega/D)^{1/2} = \alpha + i\beta$; $i = \sqrt{-1}$ 为虚数单位; α, β 分别为热波传播波数和吸收系数,经规范化后,可取 $\alpha > 0, \beta > 0$, 即有

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{\omega^4}{c^4} + \frac{\omega^2}{D^2} + \frac{\omega^2}{c^2}} \right]} = \sqrt{\sqrt{\frac{1}{4} k^4 + \frac{1}{\mu^4} + \frac{1}{2} k^2}}, \quad (3a)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{\omega^4}{c^4} + \frac{\omega^2}{D^2} - \frac{\omega^2}{c^2}} \right]} = \sqrt{\sqrt{\frac{1}{4} k^4 + \frac{1}{\mu^4} - \frac{1}{2} k^2}}, \quad (3b)$$

其中 k 为无扩散效应时热波波数, $k = \omega/c$ 。当热波传播速度 $c \rightarrow \infty$ 时,

$$\alpha \rightarrow \sqrt{\frac{1}{2} \frac{\omega}{D}} = \sqrt{\frac{\pi f}{D}} = \frac{1}{\mu},$$

$$\beta \rightarrow \sqrt{\frac{1}{2} \frac{\omega}{D}} = \frac{1}{\mu},$$

而热波波数

$$\kappa = \alpha + i\beta \rightarrow (1+i) \sqrt{\frac{1}{2} \frac{\omega}{D}} = (1+i) \frac{1}{\mu}.$$

此时非傅里叶热传导退化为经典傅里叶热扩散传播情况。

根据(2)式和(3)式可知,固体介质中存在 $\vartheta \exp(-i\omega t) = A \exp(-\beta x) \exp[i(\alpha x - \omega t)]$ 形式的波动过程,表示在空间上振动幅值衰减的传播波。

(2)式所决定的无热源热波散射场的一般解可描述为^[17]

$$\vartheta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n H_n^{(1)}(\kappa r) \exp(in\theta), \quad (4)$$

式中 A_n 为缺陷圆柱产生的散射波模式系数,由边界条件确定; $H_n^{(1)}(\cdot)$ 为复宗量第一类汉克尔(Hankel)函数。

3 热波入射的激发及总热波场

温度波可由调制光束在材料表面激发。设有一周期稳态热波在试件表面沿 x 轴正方向入射。根据布洛赫(Bloch)波传播理论,入射波可描述为

$$\vartheta_1^{(i)} = \vartheta_0 \exp(i\kappa b) \exp[i(\kappa x - \omega t)] = \vartheta_0 \exp(i\kappa b) \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(\kappa r) \times \exp(in\theta) \exp(-i\omega t), \quad (5)$$

式中 ϑ_0 为热波入射时的温度幅值; κ 为入射波的波

数; J_n 为贝塞尔(Bessel)函数。

利用虚拟的镜像产生的散射波来描述半无限体边界的反射波。对于镜像来说,入射波沿 x 轴负方向入射,其表达式为

$$\begin{aligned} \vartheta_2^{(i)} &= \vartheta_0 \exp(i\kappa b) \exp[-i(\kappa x' + \omega t)] = \\ & \vartheta_0 \exp(i\kappa b) \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^{-n} J_n(\kappa r') \times \\ & \exp(in\theta') \exp(-i\omega t), \end{aligned} \quad (6)$$

考虑原像与镜像之间的多重散射后,在原像局部极坐标系 (r, θ) 中圆柱产生的热波散射场可写为

$$\begin{aligned} \vartheta_1^{(s)} &= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n^l H_n^{(1)}(\kappa r) \times \\ & \exp(in\theta) \exp(-i\omega t), \end{aligned} \quad (7)$$

而镜像圆柱产生的散射波,在镜像孔的局部极坐标系 (r', θ') 中可描述为

$$\begin{aligned} \vartheta_2^{(s)} &= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n^l H_n^{(1)}(\kappa r') \times \\ & \exp(in\theta') \exp(-i\omega t), \end{aligned} \quad (8)$$

其中 A_n^l, B_n^l 分别为原像与镜像第 l 次散射的弹性波模式系数,通过满足缺陷边界条件确定。实际与物体

表面的边界状况有关。

为计算方便,可将坐标系 (r', θ') 的热波表达式变换到 (r, θ) 坐标系中。根据格雷夫(Graf)加法定理^[18],有如下关系:

$$\begin{aligned} & H_n^{(1)}(\kappa r') \exp(in\theta') = \\ & \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^{m-n} H_{m-n}^{(1)}(2\kappa b) J_m(\kappa r) \exp(im\theta), \end{aligned} \quad (9)$$

这样,非透明介质中总热波波场应由入射场、散射场和界面反射场叠加而成:

$$\vartheta = \vartheta_1^{(i)} + \vartheta_1^{(s)} + \vartheta_1^{(f)} = \vartheta_1^{(i)} + \vartheta_1^{(s)} + \vartheta_2^{(s)}, \quad (10)$$

研究亚表面缺陷的边界条件为绝热情况,用温度函数表示成如下形式:

$$\left. \frac{\partial \vartheta}{\partial n} \right|_a = - \left. \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right|_a = 0, \quad (11)$$

式中 n 表示缺陷圆柱边界的法线方向。

4 热波模式系数、温度分布

原像与镜像多重散射时,各散射波模式系数之间的关系为

$$A_n^1 = - \exp(i\kappa b) T_0 i^n J_n'(\kappa a) / H_n'(\kappa a), \quad (12a)$$

$$B_n^1 = - \exp(i\kappa b) T_0 i^{-n} J_n(\kappa a) / H_n'(\kappa a), \quad (12b)$$

$$\begin{aligned} A_n^l &= - \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m^{l-1} H_{n-m}(2\kappa b) J_n'(\kappa a) / H_n'(\kappa a) \exp[-i(m-n)\pi] = \\ & - \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m^{l-1} H_{m-n}(2\kappa b) J_n'(\kappa a) / H_n'(\kappa a), \quad (l = 2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (12c)$$

$$B_n^l = - \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m^{l-1} H_{n-m}(2\kappa b) J_n'(\kappa a) / H_n'(\kappa a), \quad (l = 2, 3, \dots) \quad (12d)$$

(12)式即为确定热波模式多重散射系数 A_n^l, B_n^l 的表达式。

当物体内部含有缺陷时,热波会在缺陷与表面之间发生多重散射现象,对物体表面的温度产生影响。周期性加热会在物体内部产生温度波动,利用缺陷造成的温度振幅变化和相位差,可实现热波成像。通过测量表面温度的变化,可感知物体浅表面缺陷情况。

取特征长度为亚表面圆柱的半径 a ,入射温度的幅值 $|\vartheta_0|$ ^[17]。分析计算时,采用如下无量纲量:无扩

散行波波数 $ka = 0.01 \sim 2.0$,相对热扩散长度 $\mu/a = 0.10 \sim 5.0$,埋藏深度比 $b/a = 1.1 \sim 3.0$;温度比 ϑ/ϑ_0 。这样,无量纲复波数为 $\kappa a = \alpha a + i\beta a$ 。其中,

$$\begin{cases} \alpha a = \sqrt{\sqrt{\frac{1}{4}(ka)^4 + \left(\frac{a}{\mu}\right)^4} + \frac{1}{2}(ka)^2}, \\ \beta a = \sqrt{\sqrt{\frac{1}{4}(ka)^4 + \left(\frac{a}{\mu}\right)^4} - \frac{1}{2}(ka)^2}, \end{cases} \quad (13)$$

物体表面温度分布的数学表达式为

$$\begin{aligned} \vartheta &= \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n \exp(in\kappa b) J_n(\kappa r) \exp(in\theta) + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n^l H_n^{(1)}(\kappa r) \exp(in\theta) + \right. \\ & \left. \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n^l H_n^{(1)}(\kappa r') \exp(in\theta') \right] \exp(-i\omega t), \end{aligned} \quad (14)$$

式中

$$r^2 = x^2 + y^2 = b^2 + y^2,$$

$$\theta = \pi - \arctan(y/b); r' = r,$$

$$\theta' = \arctan(y'/b) = \arctan(y/b);$$

$$y = 0 \sim 4.$$

5 数值算例

图 2(a) 中的波数 $ka = 0$, 对应热传导方程中无

波动项纯热扩散情形。由图 2(a) 可以看到, 物体表面的温度分析计算结果与文献[10] 一致, 其参量为热扩散系数 $D = 75 \text{ mm}^2/\text{s}^2$, 孔洞的半径为 $a = 0.5 \text{ mm}$, 曲线 1 和 2 对应的频率分别为 $f = 80 \text{ Hz}$ 和 $f = 480 \text{ Hz}$ 。说明本文的分析计算方法是正确的。并且可以看到, 相对热扩散长度越大, 温度的变化越大。在坐标 $(-b, 0)$ 处取得温度的最大值。

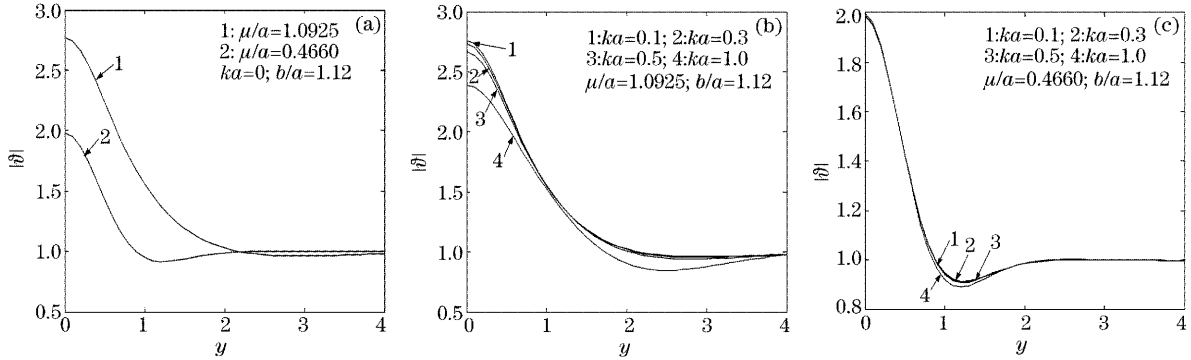


图 2 物体表面温度分布

Fig. 2 Temperature at surface of materials

由图 2(b) 可以看出, 当波数 ka 比较小时, 例如 $ka < 0.3$ 时, 入射波为长波时 (此时对应于低频波动), 热传播的波动特性较弱, 温度的计算结果与基于热扩散方程得到的值近似相同, 即分析计算时可采用经典热传导方程。而当波数 ka 比较大时, 例如 $ka > 0.5$ 时, 此时热传播的波动特性开始对温度的分析计算结果产生很大的影响。

由图 2(c) 可以看出, 当相对热扩散长度较小时, 波数 ka 比较大时才开始对温度产生影响, 例如 $ka = 1.0$ 。即当热扩散长度较小或缺陷尺寸较大时, 热传导中波动性的影响可忽略。根据图 3, 当缺陷埋藏深度较大时, 温度幅值变化减小。同样可以看到, 当波数 ka 较小时, 热传播的波动特性影响较弱。

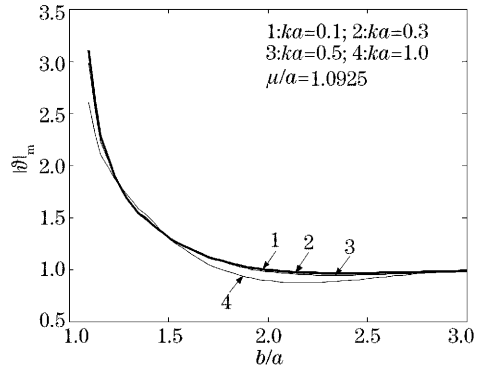


图 3 埋藏深度对表面温度最大值的影响

Fig. 3 Effects of depth on the temperature

由图 4 可以看出, 当热扩散长度较大或缺陷尺寸较小时, 热传导的波动特性对温度影响较大。

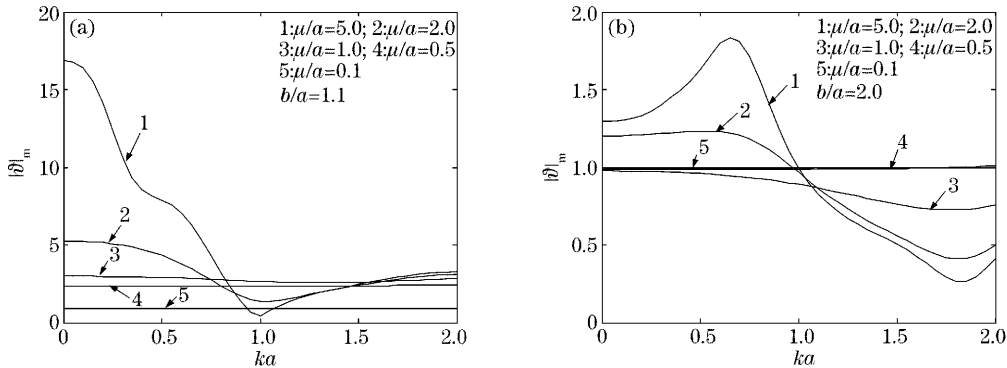


图 4 物体表面最大温度随波数的变化

Fig. 4 Maximum temperature versus wave number

波数 ka 比较大时,对应的是高频振动(短波情况),此时对应的热传播特性具有粒子性。

6 结 论

目前,基于双曲型热传导方程的热波理论在材料的无损检测与评估中广泛应用。通过发射超短脉冲激光加热物体,并对物体表面温度进行测量,可获取材料近表面下的亚表面结构信息,从而达到检测和探伤目的。可见,基于热传导波动模型研究热波散射问题具有重要意义。基于非傅里叶导热定律,即采用双曲型的热波方程,研究了含缺陷半无限体中热传播问题。给出了基于热传导波动模型的热波散射问题的一般解。当热波传播速度 $c \rightarrow \infty$ 时,非傅里叶热波模型退化为经典傅里叶热扩散传播情况。

具体计算了各种不同参量下,温度幅值的变化规律,给出了温度幅值的变化曲线。可以看到:在散射体的正前方,温度变化幅值达到最大;当热扩散长度较大,或缺陷的尺度较小时,热传播的波动性对温度影响较大;当入射温度的调制频率较高时(此时对应于短波情况),或者说大于某一值时,此时热传播的波动特性对温度的分析计算结果产生较大的影响,缺陷埋藏越浅,其缺陷对温度的影响越大。可见,本研究不仅具有理论意义,而且还具有广泛的应用前景,为极端条件下结构的传热分析提供有效的分析方法,可望能为激光加热检测、反问题研究、红外热成像的分析计算提供理论基础和参考数据。

参 考 文 献

- Shen Jianfeng, Shi Baixuan. Structure and application of a sub-surface mapping system for examining the defects of metal material[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2004, **33**(10): 1207~1209 (in Chinese)
沈剑峰,施柏焯. 金属材料次表面缺陷成像检测系统及其应用[J]. *光子学报*, 2004, **33**(10): 1207~1209
- Zhang Zhe, Liu Dengying. Advances in the study of non-Fourier heat conduction[J]. *Advances In Mechanics*, 2000, **30**(3): 446~456 (in Chinese)
张 浙,刘登瀛. 非傅立叶热传导研究进展[J]. *力学进展*, 2000, **30**(3): 446~456
- Xu Hongyu, Zhang Yuanchong, Song Yaqin *et al.*. Research progress in pulse laser heating thin film microscale heat transfer [J]. *Progress in Physics*, 2004, **24**(2): 152~162 (in Chinese)
徐红玉,张元冲,宋亚勤等. 脉冲激光加热薄膜微尺度热传递研究进展[J]. *物理学进展*, 2004, **24**(2): 152~162
- Qiu Hongwei, Yang Peizhi, Zhao Guangjun *et al.*. Thermal properties of Yb:YAG crystal and its influence on laser properties [J]. *Acta Optica Sinica*, 2002, **23**(4): 501~504 (in Chinese)
邱宏伟,杨培志,赵广军等. Yb:YAG 晶体的热学性质及其对激光性能的影响[J]. *光学学报*, 2002, **23**(4): 501~504
- Peshkov V. Second sound in helium II [J]. *J. Phys.*, 1944, **8**: 381~386
- Cattaneo C. A form of heat conduction equation which eliminates the paradox of instantaneous propagation [J]. *Compte. Rend.*, 1958, **247**: 431~433
- T. Q. Qiu, C. L. Tien. Short pulse laser heating on metals [J]. *Int. J. Heat. and Mass. Transfer*, 1992, **35**(3): 719~726
- D. Y. Tzou. A unified field approach for heat conduction from macro-to micro-scales [J]. *J. Heat Trans.*, 1995, **117**: 8~16
- C. Körner, H. W. Bergmann. The physical defects of the hyperbolic heat conduction equation [J]. *Appl. Phys. (A)*, 1998, **67**(4): 397~401
- J. M. Terron, A. Sanchez-Lavega, A. Salazar. Multiple scattering effects of thermal waves by two subsurface cylinder [J]. *J. Appl. Phys.*, 2000, **87**(5): 2600~2607
- J. B. Thibaud, R. Carminati, J. J. Greffet. Scattering of a diffusive wave by a subsurface object [J]. *J. Appl. Phys.*, 2000, **87**(11): 7638~7646
- J. M. Terron, A. Sanchez-Lavega, A. Salazar. Multiple scattering of thermal waves by a coated subsurface cylindrical inclusion [J]. *J. Appl. Phys.*, 2001, **89**(10): 5659~5702
- Zhou Jianhua, Liu Dengying, Xu Jianzhong *et al.*. Study on the hyperbolic heat conduction in laser irradiated biological tissue [J]. *Chin. J. Lasers*, 2002, **A29**(12): 1127~1132 (in Chinese)
周建华,刘登瀛,徐建中等. 激光照射下生物组织内的双曲型导热研究[J]. *中国激光*, 2002, **A29**(12): 1127~1132
- Jiang Shaoren, Li Wenhong, Liu Yonggang *et al.*. Experimental investigation on heat wave, shock wave and rarefaction wave in aluminum driven by "XG II" laser [J]. *Chin. J. Lasers*, 2002, **A29**(7): 621~624 (in Chinese)
江少恩,李文洪,刘永刚等. 星光 II 驱动铝靶产生热波、冲击波和稀疏波测量[J]. *中国激光*, 2002, **A29**(7): 621~624
- A. Salazar, A. Sanchez-Lavega. Scattering of cylindrical thermal waves in fiber composites: In-plane thermal diffusivity [J]. *J. Appl. Phys.*, 2003, **93**(8): 4536~4542
- Xi Mingzhe, Yu Gang. Numerical simulation for the transient temperature field of 3D moving laser molten pool [J]. *Chin. J. Lasers*, 2004, **31**(12): 1528~1532 (in Chinese)
席明哲,虞 刚. 连续移动三维瞬态激光熔池温度场数值模型 [J]. *中国激光*, 2004, **31**(12): 1528~1532
- Hu Chao, Ma Xingrui, Huang Wenhui. Dynamic stress concentrations in thin plates with two circular cutouts [J]. *Acta Mechanica Sinica*, 1998, **30**(5): 587~596 (in Chinese)
胡 超,马兴瑞,黄文虎. 含双圆孔平板弹性波散射与动应力分析 [J]. *力学学报*, 1998, **30**(5): 587~596
- Wang Zhuxi, Guo Dunren. *Summary of Special Functions* [M]. Beijing: Science Press, 1962. 437~438
王竹溪,郭敦仁. *特殊函数概论* [M]. 北京: 科学出版社, 1962. 437~438