

文章编号: 0253-2239(2005)12-1629-5

精密干涉测量中余弦依赖算法的误差研究*

罗志勇 杨丽峰 陈允昌

(中国计量科学研究院, 北京 100013)

摘要: 针对相移算法中以双光束干涉为基础的余弦依赖算法的算法误差, 以非佐干涉仪精密测长为应用背景进行了研究。利用干涉光学的基本原理导出了在多束光干涉(经光学面多次反射、透射)的情况下干涉光强随相位分布的精确公式; 通过数值分析得出了在给定参量条件下忽略次级反射光所引入的光强误差达到 14.4%; 对余弦依赖算法所引起的光强误差分别就四步算法、五步算法得出了不同的依赖关系: 由于四步算法比五步算法对光强误差更为敏感, 因而五步算法具有更高的准确度; 对于两个反射面均具有较高反射率的情况, 必须考虑算法误差; 当测长准确度要求不太高时, 在两个或至少其中一个反射面反射率较低的情况下可以忽略算法误差的影响。

关键词: 光学测量; 精密测长; 多光束干涉; 相移算法; 余弦依赖

中图分类号: TH774.3 文献标识码: A

Error Evaluation of Cosine Dependent Algorithm in Precision Interference Measurement

Luo Zhiyong Yang Lifeng Chen Yunchang

(National Institute of Metrology, Beijing 100013)

Abstract: Aiming at the application of precision length measurement, the error of phase-shifting algorithm based on the cosine dependent algorithm by means of double-beam interference is explored, and the precision formula of intensity distribution of multiple-beam interference (multiple reflection and transmission by the optical surface) with the basic principle of interference optics is derived. Based on this formula and the numerical analysis, the maximum error of the interference intensity is found to reach 14.4% due to ignoring the second multiple-beam interference in the precision measurement, and the different dependences between the reflection coefficients of the two surface and the phase difference for the four-step algorithm and the five-step algorithm are listed; the latter possesses higher accuracy than the former since the former is more sensitive to the intensity error; and the error of the algorithm can be ignored while the reflection coefficient of the two surfaces or one of them is low, unless the reflectivity of the two surfaces is high.

Key words: optical measurement; precision length measurement; multiple-beam interference; phase-shifting algorithm; cosine dependence

1 引言

相移算法是相移技术中决定形貌或位移测量精度的关键技术。借助于两束光的相移产生的相位干涉图, 在干涉光强信号严格余弦依赖 (Cosine dependence) 的情况下产生了一系列的标准算法, 如三步算法、四步算法、五步算法、最小二乘法 and 傅里叶算法等^[1~8]。但是, 在实际应用中大多数情况下干涉光强分布并不是严格的余弦依赖, 如法布里-珀罗干涉仪、非佐干涉仪等, 由于其中一束光经过光学

表面的多次反射, 因此其干涉光强分布不严格随相位变化余弦分布^[3]。在这种情况下, 如果再按标准算法进行相位处理, 必然会引入较大的算法误差。国外一些研究人员对该问题进行过一些研究^[4~6], 通过数值分析得出结论: 对于精度较低 (小于 $\lambda/100$) 的应用场合, 当其两个光学反射面或者至少其中一个光学面的反射率较低时, 如低于 4%, 则由于光强分布非余弦依赖所引起的算法误差是可以忽略的^[4]。但对高精度应用如精密测长干涉仪, 特别是

* 科学技术部固体密度基准研究项目(Y0231W)资助课题。

作者简介: 罗志勇(1964~), 男, 四川安岳人, 高级工程师, 硕士, 主要从事精密测长研究。E-mail: luozhy9999@sina.com

收稿日期: 2004-11-15; 收到修改稿日期: 2005-04-07

在反射面反射率较高时算法误差的影响国内外尚未对此问题进行深入研究。本文利用波动光学的基本原理推导出在多束光干涉(经光学面多次反射、透射)的情况下干涉光强随相位分布的精确公式,针对余弦依赖算法中的典型算法:四步法和五步法,以菲佐干涉仪精密测长为应用背景,研究算法误差和菲佐板反射率的精确的依赖关系,用于指导实际应用。

2 多光束干涉公式的导出

与单纯双光束干涉仪如迈克耳孙干涉仪等不同,菲佐干涉仪是利用多光束干涉进行表面形貌测量或进行精密测长。其基本原理如图 1 所示。

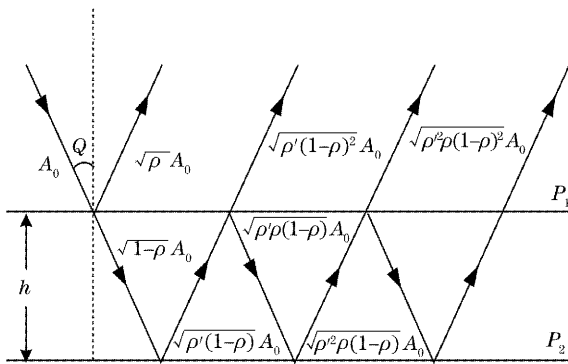


图 1 菲佐干涉仪光路图
Fig. 1 The illustration of Fizeau interferometer for length measurement

如图 1 所示, P_1, P_2 为未涂增透膜或反射膜的菲佐标准板和待测平面,包括标准板和待测平面之间的环境介质均为空气,今有一入射角为 θ (显然,折射角也为 θ) 的光束经菲佐标准板和待测面的多次反射和透射,设菲佐标准板 P_1 ,待测面 P_2 的反射率分别为 ρ 和 ρ' ,则有

$$\rho = \left(\frac{A_1}{A_0}\right)^2, \quad \rho' = \left(\frac{A'_1}{A_0}\right)^2,$$

其中 A_0 为入射光射到菲佐标准板 P_1 时的振幅, A_1 为在 P_1 表面初次反射的振幅。 A'_0 为 P_1 的透射光入射到待测面 P_2 前时的振幅, A'_1 为在待测表面 P_2 初次反射的振幅。从图 1 中可以看出,入射光在菲佐标准板 P_1 反射,经菲佐标准板 P_1 透射、待测面 P_2 反射、再经菲佐标准板透射等,光线的振幅依次为

$$\sqrt{\rho}A_0, \sqrt{\rho'(1-\rho)^2}A_0, (\rho'\rho)^{1/2} \sqrt{\rho'(1-\rho)^2}A_0, (\rho'\rho) \sqrt{\rho'(1-\rho)^2}A_0, (\rho'\rho)^{3/2} \sqrt{\rho'(1-\rho)^2}A_0, \dots$$

在实际使用中光束近似垂直入射,菲佐标准板 P_1 的初次反射光和经多次反射的透射光彼此平行,且相邻光束的相位差均为 $\delta = 2nh/\cos\theta$,其中 n 为空气的折射率, h 为两个反射板之间的距离(见图 1)。由此引起的相位差为 $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta = \frac{4\pi}{\lambda}nh/\cos\theta$,

若取此反射光的相位为 0,则各次透射光的相位依次为 $\varphi, 2\varphi, 3\varphi, 4\varphi, \dots$ 。除初次反射光外,各透射光振幅以公比为 $\sqrt{\rho\rho'}$ 的等比级数依次减小($\sqrt{\rho\rho'} < 1$),相位则以公差为 φ 的等差级数依次增加。在光近似垂直入射时,需要考虑光从光疏媒质到光密媒质的半波损失, P_2 的初次反射光是从菲佐反射板的内表面反射,即从光密媒质到光疏媒质,并无半波损失,因此反射振幅用复数表示为 $\sqrt{\rho}A_0 \exp(i\omega t)$,各透射光之第一束将因待测面而产生半波损失,在此基础上其他各透射光每再经两次半波损失正好一个周期,因此各透射光振幅复数表示形式依次为

$$\begin{aligned} &\sqrt{\rho'(1-\rho)^2}A_0 \exp[i(\omega t - \varphi - \pi)], \\ &(\rho'\rho)^{1/2} \sqrt{\rho'(1-\rho)^2}A_0 \exp[i(\omega t - 2\varphi - \pi)], \\ &(\rho'\rho) \sqrt{\rho'(1-\rho)^2}A_0 \exp[i(\omega t - 3\varphi - \pi)], \\ &\dots \end{aligned}$$

$$(\rho'\rho)^{(n-1)/2} \sqrt{\rho'(1-\rho)^2}A_0 \exp[i(\omega t - n\varphi - \pi)],$$

以上 n 项直接叠加,相干光束的合振幅 A 可表示为

$$A = A_0 \exp(i\omega t) \left\{ \sqrt{\rho} - \left[\sqrt{\rho'(1-\rho)^2} \exp(-i\varphi) + (\rho'\rho)^{1/2} \sqrt{\rho'(1-\rho)^2} \exp(-i2\varphi) + (\rho'\rho) \sqrt{\rho'(1-\rho)^2} \exp(-i3\varphi) + \dots + (\rho'\rho)^{(n-1)/2} \sqrt{\rho'(1-\rho)^2} \exp[i(\omega t - n\varphi - \pi)] \right] \right\}, \quad (1)$$

(1) 式括号中从第二项起是公比为 $\sqrt{\rho\rho'} \exp(-i\varphi)$ 的等比数列,应用等比数列求和公式,前 n 项之和可表示为,

$$A = A_0 \exp(i\omega t) \left\{ \sqrt{\rho} - \sqrt{\rho'(1-\rho)^2} \frac{1}{\exp(-i\varphi) - \sqrt{\rho\rho'}} [1 - (\rho\rho')^{n/2} \exp(-in\varphi)] \right\}, \quad (2)$$

合振幅的强度为其振幅复数表达式与其共轭复数(A^*)的乘积,因此

$$A^2 = AA^* = A_0^2 \left\{ \sqrt{\rho} - \sqrt{\rho'(1-\rho)^2} \frac{1}{\exp(i\varphi) - \sqrt{\rho\rho'}} [1 - (\rho\rho')^{n/2} \exp(-in\varphi)] \right\} \times \\ \left\{ \sqrt{\rho} - \sqrt{\rho'(1-\rho)^2} \frac{1}{\exp(-i\varphi) - \sqrt{\rho\rho'}} [1 - (\rho\rho')^{n/2} \exp(in\varphi)] \right\}.$$

为便于分析,将干涉信号强度 A^2 用 I 表示,利用欧拉公式 $\cos \varphi = [\exp(i\varphi) + \exp(-i\varphi)]/2$,略去繁琐的推导过程,可得

$$I = A_0^2 \left\{ \rho + \frac{\rho'(1-\rho)^2 [1 + (\rho\rho')^n] - 2(\rho\rho')^{n/2} \cos n\varphi}{1 + \rho\rho' - 2\sqrt{\rho\rho'} \cos \varphi} - \frac{2\sqrt{\rho\rho'}(1-\rho) \{ \cos \varphi - \sqrt{\rho\rho'} - (\rho\rho')^{n/2} [\cos(n+1)\varphi] - \sqrt{\rho\rho'} \cos n\varphi \}}{1 + \rho\rho' - 2\sqrt{\rho\rho'} \cos \varphi} \right\}.$$

上式是非佐干涉法光强分布的精确公式,当 n 趋于无穷大既考虑到待测面的无限次反射和透射时,可用艾里函数表示:

$$I = A_0^2 \left[1 - \frac{(1-\rho)(1-\rho')}{1 + \rho\rho' - 2\sqrt{\rho\rho'} \cos \varphi} \right]. \quad (3)$$

3 余弦依赖算法及其光强、相位误差

对于较低准确度的相位测量,当反射面的反射率较低时,通常忽略多次反射对干涉光强的影响,近似认为干涉光强分布为余弦依赖,从而采用以双光束干涉为基础的四步或五步标准算法求解相位。但对于高准确度测量,多次反射是不能忽略的。从图 1 可知,当忽略多次反射光影响时,干涉光强振幅 A_b 可表示成

$$A_b = \sqrt{\rho} A_0 \exp(i\omega t) + \sqrt{\rho'(1-\rho)} A_0 \exp[i(\omega t - \varphi - \pi)], \quad (4)$$

通过共轭复数求得光强 I_b 为

$$I_b = A_b A_b^* =$$

$$A_0^2 [\rho + \rho'(1-\rho)^2 - 2\sqrt{\rho\rho'}(1-\rho) \cos \varphi], \quad (5)$$

(5) 式可见,当忽略次级反射光,两束主要反射光的干涉光强随相位变化呈严格的余弦依赖关系。显然,(3) 式和(5) 式所表示的光强是不相等的,其中(3) 式包含了多次反射光对干涉光强的贡献,将次级反射光对干涉光强的影响用 ΔI 表示,则有

$$\frac{\Delta I}{A_0^2} = \frac{I - I_b}{A_0^2}, \quad (6)$$

将(3)式和(5)式代入(6)式即可求得次级反射光对干涉光强的相对影响量。现以光学石英玻璃为标准板,以单晶硅平面为待测面的菲佐干涉测长仪的基本参量研究多次反射光对干涉光强的相对影响量随相位的变化关系。该干涉仪菲佐反射板单面增透,由光学石英材料制成,即反射率 $\rho = 0.035$;待测面

为单晶硅面,即有 $\rho' = 0.35$ 。图 2 为根据(6)式得出的多次反射光对干涉光强的相对影响量随相位的变化曲线。

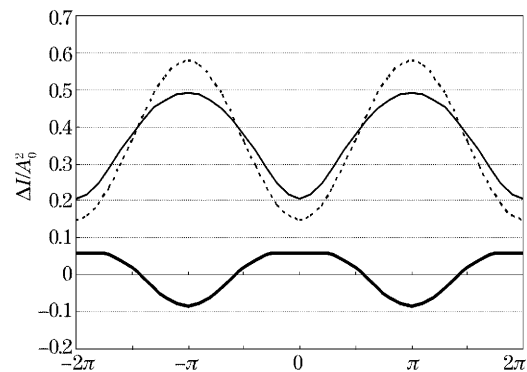


图 2 $\Delta I/A_0^2$ 随相位差 φ 的变化曲线

Fig. 2 The dependent relationship between $\Delta I/A_0^2$ and phase difference φ

图 2 中细实线和细虚线分别为根据(3)式和(5)式算出的结果。可以看出,由于忽略了多次反射的作用,图 2 中细虚线的波峰高于细实线的波峰,波谷低于细实线的波谷,其差值如图中的粗实线所示,最大光强误差达到了 14.4% (相对于最大干涉光强),而干涉光相位差的测量是通过光强的测量来实现的,可见其影响是十分严重的。下面分别就传统的四步和五步算法分析其影响。

4 余弦依赖四步算法及其算法误差

根据(5)式,设四步干涉信号分别为 I_1, I_2, I_3, I_4 对应的相位分别为 $\varphi - 3\epsilon, \varphi - \epsilon, \varphi + \epsilon, \varphi + 3\epsilon$,其中 ϵ 相移步长,通常取 $\pi/4$,将其分别代入(5)式,列解方程组可得,

$$\tan^2 \varphi = \frac{(3I_2 - 3I_3 - I_1 + I_4)(I_1 + I_2 - I_3 - I_4)}{(I_1 - I_2 - I_3 + I_4)^2}, \quad (7)$$

(7) 式显示了相位与光强的依赖关系,为使研究结论更为直观,在此不考虑光强测量误差,仅考虑算法误差所引起的光强变化对相位的影响。根据(7)式,

相位变化 $\Delta\varphi$ 与光强度误差 ΔI_i 的关系为

$$\Delta\varphi = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial\varphi}{\partial I_i} \Delta I_i, \quad (8)$$

其中

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial I_1} &= \frac{-\cot\varphi\cos^2\varphi}{(I_1 - I_2 - I_3 + I_4)^2} \left[\frac{(3I_2 - 3I_3 - I_1 + I_4)(I_1 + I_2 - I_3 - I_4)}{(I_1 - I_2 - I_3 + I_4)} + (I_1 - I_2 + I_3 - I_4) \right], \\ \frac{\partial\varphi}{\partial I_2} &= \frac{\cot\varphi\cos^2\varphi}{(I_1 - I_2 - I_3 + I_4)^2} \left[\frac{(3I_2 - 3I_3 - I_1 + I_4)(I_1 + I_2 - I_3 - I_4)}{(I_1 - I_2 - I_3 + I_4)} + (I_1 + 3I_2 - 3I_3 - I_4) \right], \\ \frac{\partial\varphi}{\partial I_3} &= \frac{\cot\varphi\cos^2\varphi}{(I_1 - I_2 - I_3 + I_4)^2} \left[\frac{(3I_2 - 3I_3 - I_1 + I_4)(I_1 + I_2 - I_3 - I_4)}{(I_1 - I_2 - I_3 + I_4)} - (I_1 + 3I_2 - 3I_3 - I_4) \right], \\ \frac{\partial\varphi}{\partial I_4} &= \frac{-\cot\varphi\cos^2\varphi}{(I_1 - I_2 - I_3 + I_4)^2} \left[\frac{(3I_2 - 3I_3 - I_1 + I_4)(I_1 + I_2 - I_3 - I_4)}{(I_1 - I_2 - I_3 + I_4)} - (I_1 - I_2 + I_3 - I_4) \right], \end{aligned}$$

注意到 $\varepsilon = \pi/4$, 以上各式可简化为

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial I_1} &= -\frac{\sin\varphi}{4\sqrt{2}\sqrt{\rho\rho'}(1-\rho)A_0^2}, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial I_2} &= \frac{\sin\varphi + 2\cos\varphi}{4\sqrt{2}\sqrt{\rho\rho'}(1-\rho)A_0^2}, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial I_3} &= \frac{\sin\varphi - 2\cos\varphi}{4\sqrt{2}\sqrt{\rho\rho'}(1-\rho)A_0^2}, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial I_4} &= -\frac{\sin\varphi}{4\sqrt{2}\sqrt{\rho\rho'}(1-\rho)A_0^2}, \end{aligned}$$

(8) 式中 ΔI_i 由(6)式给出。(8)式给出了余弦依赖四步算法相位误差与非佐面反射率的精确依赖关系。在实际应用中,可以根据干涉仪的实际参量,按上式评估由于算法引起的相位误差;也可以根据上式优化干涉仪的参量。图 3 根据(8)式给出了相位算法误差随初相位的变化关系。

图 3 可见,余弦依赖四步算法由于算法误差所致理论光强与实际光强的差异,进而导致了相位测量误差,其最大相位误差超过一个周期相位的 1%,这在高准确度测量中是不允许的。

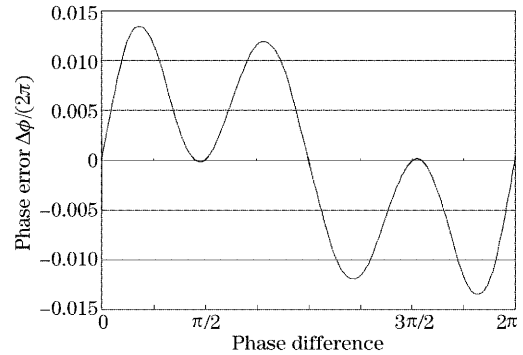


图 3 相位测量误差随相位差的变化关系

Fig. 3 The measuring error of the phase versus the phase difference

5 余弦依赖五步算法及其算法误差

根据(5)式,设五步干涉信号分别为 I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 对应的相位分别为 $\varphi - 2\varepsilon, \varphi - \varepsilon, \varphi, \varphi + \varepsilon, \varphi + 2\varepsilon$, 其中 ε 为相移步长,通常取 $\pi/2$, 将其分别代入(5)式,列解方程组可得

$$\tan\varphi = 2(I_2 - I_4)/(2I_3 - I_5 - I_1), \quad (9)$$

根据(9)式,分别对光强求偏导,可得

$$\Delta\varphi = \sum_{i=1}^5 \frac{\partial\varphi}{\partial I_i} \Delta I_i = \frac{2\cos^2\varphi}{2I_3 - I_5 - I_1} \left[\frac{I_2 - I_4}{2I_3 - I_5 - I_1} (\Delta I_1 - 2\Delta I_3 + \Delta I_5) + \Delta I_2 - \Delta I_4 \right], \quad (10)$$

考虑到 $\varepsilon = \pi/2$, 则有

$$\Delta\varphi = \frac{\sin\varphi}{4} (\Delta I_1 - 2\Delta I_3 + \Delta I_5) + \frac{\cos\varphi}{2} (\Delta I_2 - \Delta I_4), \quad (11)$$

(11) 式是余弦依赖五步算法相位误差与非佐板和待测面反射率的精确依赖关系,式中 ΔI_i 仍由(6)式给出。根据(11)式可得五步法的相位误差与相位的关系如图 4 所示。

图 4 中的两条曲线分别对应非佐反射板不同的反射率,其中实线仍以石英标准板为例对应 $\rho = 0.035$, 虚线是为研究问题而假定的标准板,设 $\rho = 0.35$, 即与待测的单晶硅面反射率相同。可以看出,

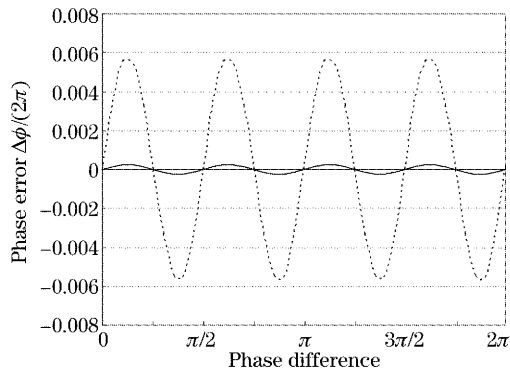


图 4 五步法相位误差随相位差的变化曲线

Fig. 4 The phase error of five-step interferograms versus the phase difference

五步算法极大地降低了由于光强误差所引起的相位误差,这也从另一个方面说明五步算法优于四步算法,但当反射系数增加时(两个反射面均有较高的反射系数),相位误差以较快的速度增加。如图中所示,当 $\rho=0.35$ 时最大相位误差已超过 0.5% 个周期相位,这在精密测量中是需要避免的。由于(8)式、(11)式及所含各变量的推导过程中不存在任何近似,因此图3、图4中相位误差随相位的变化曲线是精确的。

需要指出的是本文仅研究由于余弦算法(只考虑双光束干涉)所引起的算法误差,不包含相位测量的主要误差源:步长控制误差和光强测量误差所引起的相位误差。

6 结 语

利用干涉光学的基本原理,导出了四步算法、五步算法和多光束干涉光强数学模型,并通过理论研究和数值分析,对四步算法、五步算法的算法误差进行了定量计算,得出了以下结论:对于利用菲佐、法布里-珀罗等干涉仪进行高精度测量的情况,由于在标准板和待测面之间产生了光束的多次反射和透射,导致了只考虑双光束干涉的四步、五步算法不再精确成立,其误差的大小取决于两块反射板的反射系数,反射系数越小,则由于算法所引起的误差越小,反之误差越大;其次,对于由于算法引起的光强

误差,四步算法比五步算法更为敏感,因而五步算法具有更高的准确度,但这仅仅局限在较低反射率的基础上,根据本文的计算结果,对于两个反射面均具有较高反射率的情况,无论是四步法、五步法都将引起显著的算法误差,在进行误差评估时必须予以考虑。只有在两个或至少其中一个反射面反射率较低的情况下才可以忽略算法误差的影响。本文的结论对于指导精密测长系统中相移算法的选择、标准板的选材和进行测量结果的误差评估具有重要价值。

参 考 文 献

- 1 Wang Liwu, Su Xianyu, Zhou Lipin. Correction algorithm of random phase shifting errors in phase measuring profilometry[J]. *Acta Optica Sinica*, 2003, **24**(5): 614~618 (in Chinese)
王立无,苏显渝,周利兵. 相位测量轮廓术中随机相移误差的校正算法[J]. *光学学报*, 2003, **24**(5): 614~618
- 2 Li Wansong, Su Likun, Su Xianyu. Phase-measuring profilometry in big scale measurement[J]. *Acta Optica Sinica*, 2000, **20**(6): 792~796 (in Chinese)
李万松,苏礼坤,苏显渝. 相位检测面形术在大尺度三维面形测量中的应用[J]. *光学学报*, 2000, **20**(6): 792~796
- 3 Jiang Zhenyu, Niao Hong, Zhang Qingchuan *et al.*. Weighted phase unwrapping based on analysis of intensity modulation for phase-shifting interferometry [J]. *Acta Optica Sinica*, 2003, **24**(8): 1032~1038 (in Chinese)
蒋震宇,缪泓,张青川等. 调制度分析在等步长相移法相位展开中的应用[J]. *光学学报*, 2003, **24**(8): 1032~1038
- 4 Guo Hongwei, Chen Mingyi, Wei Chunlong. A new algorithm by iterative least squares fitting based on the first order Taylor series expansion in phase shifting interferometry[J]. *Acta Optica Sinica*, 2001, **21**(1): 72~74 (in Chinese)
郭红卫,陈明仪,韦春龙. 基于一阶泰勒展开式的迭代最小二乘相移新算法[J]. *光学学报*, 2001, **21**(1): 72~74
- 5 Guanming Lai, Toyohiko Yatagai. Generalized phase-shifting interferometry[J]. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1991, **8**(5): 822~827
- 6 B. V. Dorrio, J. Blanco-Garcia, C. Lopez *et al.*. Phase error calculation in a Fizeau interferometer by Fourier expansion of the intensity profile[J]. *Appl. Opt.*, 1996, **35**(1): 61~64
- 7 Yves Surrel. Design of algorithms for phase measurements by the use of phase stepping[J]. *Appl. Opt.*, 1996, **35**(1): 51~60
- 8 P. Hariharan, B. F. Oreb, T. Eiju. Digital phase-stepping interferometry: a simple error-compensating phase calculation [J]. *Appl. Opt.*, 1987, **26**(13): 2504~2505
- 9 G. Bonsch, H. Bohme. Phase-determination of Fizeau interferences by phase-shifting interferometry[J]. *Optik*, 1989, **82**(4): 161~164
- 10 Chandra S. Vikram. Exact phase error effect on contrast measurement in four-step phase-shifting interferometry [J]. *Optik*, 2000, **111**(12): 563~564