

文章编号: 0253-2239(2005)11-1563-5

## 超短脉冲复宗量拉盖尔-高斯光束<sup>\*</sup>

杨振军<sup>1</sup> 胡 巍<sup>2</sup> 杨振峰<sup>3</sup>

1 河北师范大学物理学院, 石家庄 050016  
2 华南师范大学传输光学实验室, 广州 510631  
3 河北科技大学经济管理学院, 石家庄 050018

**摘要:** 从超短高斯脉冲光束出发, 根据拉盖尔多项式的性质, 用理论解析推导的方法, 给出了一组新的超短脉冲光束的解析解, 称为超短复宗量拉盖尔-高斯脉冲光束。此脉冲光束解的每个频率分量都是复宗量拉盖尔-高斯光束, 时间脉冲的形状是任意的, 具有相同的衍射距离参量, 并且可以描述短于一个光学周期的超短脉冲。对这种超短脉冲光束及其在自由空间中的传输过程进行了较为细致的研究, 分析了超短复宗量拉盖尔-高斯脉冲光束的轴上光强、光强的横向分布、衍射性质、脉冲极性反转、脉冲延迟等。讨论了引入缓变包络近似后出现的时空奇异性。

**关键词:** 物理光学; 超短脉冲光束; 缓变包络近似; 脉冲传输

中图分类号: O436 文献标识码: A

## Ultrashort Pulsed Elegant Laguerre-Gaussian Beams

Yang Zhenjun<sup>1</sup> Hu Wei<sup>2</sup> Yang Zhenfeng<sup>3</sup>

1 College of Physics, Hebei Normal University, Shijiazhuang 050016  
2 Laboratory of Light Transmission Optics, South China Normal University, Guangzhou 510631  
3 School of Economics and Management, Hebei University of Science and Technology, Shijiazhuang 050018

**Abstract:** From the ultrashort pulsed Gaussian beams, based on the properties of Laguerre polynomial, a family of solutions are found in theory, which represents a new family of ultrashort pulsed beams called ultrashort pulsed elegant Laguerre-Gaussian beams. These pulsed beams with arbitrary available frequency all have a nearly elegant Laguerre-Gaussian profile, an arbitrary temporal shape, and an equal diffractive distance. These solutions can be even used to describe the ultrashort pulsed beam whose pulse duration is shorter than one optical oscillation period. The ultrashort pulsed elegant Laguerre-Gaussian beams and their propagation properties in free space have been studied detailedly, such as intensity on the axis, transversal distribution of intensity, diffractive property, pulse polarity reversal, pulse time delay etc. The time and spatial singularity of the pulsed beams is also discussed when the slowly varying envelope approximation is introduced.

**Key words:** physical optics; ultrashort pulsed beams; slowly varying envelope approximation; pulse transmission

### 1 引 言

目前, 人们已经可以产生各种各样的激光光束和激光脉冲, 其中就激光脉冲而言, 已经可以产生接近单周期的激光脉冲。由于脉冲时间非常短, 所以与原来的长脉冲有很多不同的性质。首先是通常的缓变包络近似开始失效, 载波和包络的概念不再存在; 其次, 由于时间空间的耦合而引起许多新的现象, 如时间微分效应, 还有脉冲延时效应、脉冲极性

反转、空间奇异性等等<sup>[1~20]</sup>。

Porras 给出了一组新的超短脉冲光束解析解<sup>[9,10]</sup>, 称为脉冲高斯光束(Pulsed Gaussian beams)。这种脉冲光束是在傍轴条件下得到的, 其空间部分的光强呈高斯形分布, 而时间部分可以是任意的。而且这种脉冲光束的时间和空间部分始终是耦合在一起的, 从而产生了脉冲时间延迟、形变、频移等性质。对于这种超短脉冲光束, 在脉冲宽度极短的情况下(一

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(60278013)、教育部霍英东教育基金会(81058)和国家 863 计划资助课题。

作者简介: 杨振军(1978~), 男, 河北邯郸人, 硕士研究生, 教师, 主要从事超短激光脉冲光束及激光传输等方面的研究。

E-mail: zjyang@vip.163.com

收稿日期: 2005-03-28; 收到修改稿日期: 2005-05-23

一般为不足一个光学振荡周期),应该用复解析信号理论(Complex analytical signal)<sup>[21]</sup>代替经常使用的复数表达式(即,  $e^{i\omega t}$  加复振幅包络的表示方式),否则将会出现空间奇异性,复解析信号理论能够很好的消除奇异性的出现<sup>[10~12]</sup>。

由于超短脉冲传输的复杂性,已找到的脉冲光束的解析解很少。我们曾从高斯脉冲光束解出发,利用厄米函数的性质,推导出了超短脉冲复宗量厄米高斯光束<sup>[16]</sup>。我们注意到 Zauderer 曾利用高斯光束和拉盖尔多项式的性质推导出了复宗量拉盖尔-高斯光束<sup>[13]</sup>。本文就是从超短高斯脉冲光束解出发,用类似于 Zauderer 的方法给出了一组新的超短脉冲光束的解析解,其空间分布是复宗量拉盖尔-高斯光束(elegant Laguerre-Gaussian beams),时间脉冲的形状是任意的,称为超短脉冲复宗量拉盖尔-高斯光束(Pulsed elegant Laguerre-Gaussian Beams)。此解的每个频率分量都是复宗量拉盖尔-高斯光束,并且具有相同的衍射距离参量,因此脉冲光束是等衍射的。我们对这种超短脉冲光束的等衍射性质、脉冲极性反转、空间奇异性等基本性质进行了分析。

## 2 脉冲光束的基本方程

由麦克斯韦方程和波动方程组出发,引入移动坐标  $\xi = z, \tau = t - z/c$ , 做傅里叶变换后利用人们熟知的傍轴近似条件,可以得到脉冲光束在频率域中的傍轴传输方程:

$$\left[ \nabla_{\perp}^2 - 2ik(\omega) \frac{\partial}{\partial \xi} \right] \tilde{E}(r, z, \omega) = 0, \quad (1)$$

其中  $\nabla_{\perp}^2$  是横向拉普拉斯算子,  $k(\omega) = \omega/c, r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 。由熟知的傍轴方程的高斯光束解,可以得到光场在频率域中的一个高斯脉冲光束解:

$$E(r, z, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i z_R}{q(\omega)} F(\omega) \exp\left\{-i\omega\left[\tau - \frac{r^2}{2cq(\omega)}\right]\right\} d\omega, \quad (2)$$

其中  $q(\omega) = z + i z_R(\omega), z_R(\omega) = k(\omega) \omega_0^2 / 2$  为高斯光束瑞利距离,  $\omega_0$  是光束束宽,

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\tau) \exp(i\omega\tau) d\tau$$

是初始时( $z = 0$ )的轴上光强  $F(\tau)$  的傅里叶变换,也是脉冲光束的光谱分布。由上式可以看出这个积分无一般解。实验中得到的锁模激光光束满足  $z_R$  与频率无关,从而得到解析解:

$$E(r, z, \tau) = -\frac{i z_R}{q} F(\tau'), \quad (3)$$

其中  $F(\tau') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \exp(-i\omega') d\omega, \tau' = \tau - \frac{r^2}{2cq} = t - \frac{z}{c} - \frac{r^2}{2cq}$ 。此即 Porras 给出的高斯脉冲光束解<sup>[9]</sup>。可以看到,这种脉冲的时间和空间部分是始终耦合在一起的,也因此产生了诸如脉冲时间延迟、形变、频移等一些新的效应<sup>[10]</sup>。

## 3 超短脉冲复宗量拉盖尔-高斯光束

我们可以在频率域构造超短复宗量拉盖尔-高斯脉冲光束,即

$$\tilde{E}_n(r, z, \omega) = \left(-\frac{i z_R}{q}\right)^{n+1} L_n\left(\frac{r^2}{\sqrt{2iq/k}}\right) \times \exp\left(ik \frac{r^2}{2q}\right) S(\omega), \quad (4)$$

其中  $L_n(x)$  代表  $n$  阶的拉盖尔多项式。所以  $n$  阶超短脉冲复宗量拉盖尔-高斯光束可以表示为

$$E_n(r, z, \tau) = \left(-\frac{i z_R}{q}\right)^{n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} L_n\left(\frac{r^2}{\sqrt{2iq/k}}\right) \times \exp\left(ik \frac{r^2}{2q}\right) S(\omega) \exp(-i\omega\tau) d\omega, \quad (5)$$

可以看到,这是由不同频率的超短脉冲复宗量拉盖尔-高斯光束的叠加,如果初始时的光谱分布  $S(\omega)$  已知,那么理论上就可以通过(5)式得到时间域的光强分布。但很可惜的是,这样的积分很复杂,难于得到解析解。

注意到拉盖尔多项式的性质  $L_n(x) = e^x \frac{d^n(x^n e^{-x})}{dx^n}$ , 即  $\frac{dn}{dx^n}(x^n e^{-x}) = L_n(x) e^{-x}$ , 则对于具有  $x^n e^{-x}$  形式的数对  $x$  求  $n$  阶导数可得拉盖尔-高斯函数。对于超短高斯脉冲光束来说则有

$$\tilde{E}_n(r, z, \omega) = \frac{\partial}{\partial z^n} \tilde{E}_0(r, z, \omega),$$

其中  $\tilde{E}(r, z, \omega) = \frac{i z_R}{q} S(\omega) \exp\left(i \frac{\omega r^2}{2cq}\right)$  是高斯脉冲光束在频率域的解。对其做逆傅里叶变换,则可以得到时间域的光强分布:

$$E_n(r, z, \tau) = \frac{\partial^n}{\partial z^n} E_0(r, z, \tau), \quad (6)$$

利用此关系,从时域中电场的超短高斯脉冲光束表达式出发,则可直接推导复宗量拉盖尔-高斯脉冲光束的解析解。Zauderer 曾用这种办法从高斯光束出发推导出了复宗量拉盖尔-高斯光束<sup>[13]</sup>。

下面我们利用 Porrás 给出的超短高斯脉冲光束解来推导复宗量拉盖尔-高斯脉冲光束的表达式。采用归一化单位：横向距离用光束宽度归一，纵向尺度用瑞利距离  $z_R$  归一，时间用光波的振荡周期  $T_0$  归一。Porrás 的超短高斯脉冲光束的普遍表达式变为

$$E(r', z', \tau') = \frac{i}{q'} F \left[ T_0 \left( \tau' - \frac{r'^2}{2\pi q'} \right) \right], \quad (7)$$

其中  $q' = z' + i$ 。

令  $A = -r'^2/2\pi$ ，则(7)式可以写为

$$E(r', z', \tau') = \frac{i}{q'} F \left( T_0 \tau' - \frac{AT_0}{q'} \right), \quad (8)$$

对(8)式中的  $z'$  求  $n$  阶导数可得

$$\frac{\partial^n}{\partial z'^n} E(r', z', \tau') = \sum_{m=0}^n a_m \frac{i(AT_0)^{n-m}}{q'^{m+1}} F^{(n-m)} \left( T_0 \tau' - \frac{AT_0}{q'} \right), \quad (9)$$

其中  $a_m$  是二项式系数，这里  $F^{(n-m)} \left( T_0 \tau' - \frac{AT_0}{q'} \right)$  表示对  $\left( T_0 \tau' - \frac{AT_0}{q'} \right)$  求  $(n-m)$  阶导数。

至此我们就得到了复宗量拉盖尔-高斯脉冲光束的表达式，但注意到此表达式中并未出现拉盖尔多项式项，正如高斯脉冲光束的表达式(3)中也没有出现高斯函数项一样。这是因为(9)式和(3)式都是可以适用于亚周期脉冲或无振荡脉冲<sup>[9]</sup>的形式，只是要求是复解析信号解。在后面我们会看到，对于脉冲宽度长于一个光学周期，我们可以使用复振幅包络加  $e^{-i\omega t}$  的形式，表达式中就会出现拉盖尔项。

### 4 应用举例

本节将  $F(\tau)$  取为泊松谱脉冲<sup>[9,17]</sup> (Poisson spectrum pulse)的形式  $F(\tau) = [it_0/(\tau + it_0)]^\alpha$ ，对已经得到的复宗量拉盖尔-高斯脉冲光束表达式进行研究。这里泊松谱脉冲本身是复解析信号解<sup>[9]</sup>。

按照前面的归一化过程，泊松谱脉冲光束可以表示为：

$$F(r', z', \tau') = \left( \frac{iM}{\tau' + iM - A/T_0 q'} \right)^\alpha, \quad (10)$$

其中  $M = \tau/T_0$ 。对上式中的  $z'$  求  $n$  阶导数，由(9)式的结果可得复宗量拉盖尔-高斯脉冲光束的具体表达式：

$$E_n(r', z', \tau') = \sum_{m=0}^n a_m \frac{iA^m}{q'^{m+1}} \left( \frac{iM}{\tau' + iM - A/q'} \right)^{\alpha-m}, \quad (11)$$

其中  $a_m$  是二项式系数。(11)式即为复宗量拉盖尔-高斯脉冲光束的具体表达式。

下面对(11)式的一些基本性质进行一些定性的分析。我们注意到复宗量拉盖尔-高斯脉冲光束的表达式(5)中有系数  $(-iz_R/q)^{n+1}$ ，所以存在相移  $\psi(z) = (n+1)\arctan(z/z_R)$ ，其相移比高斯光束的戈维相移(Gouy Phase Shift)  $\tau(z) = \arctan(z/z_R)$  大，与同阶数的厄米高斯光束光束的相移  $\psi(z) = (m+n+1)\arctan(z/z_R)$  相同。相移导致了光束传输时轴上脉冲形状的变化。对于高斯脉冲光束，脉冲光束传输时会出现脉冲极性反转的现象<sup>[5,9]</sup>。图1给出了复宗量拉盖尔-高斯脉冲光束在传输时轴上 ( $r=0$ ) 脉冲形状变化示意图。

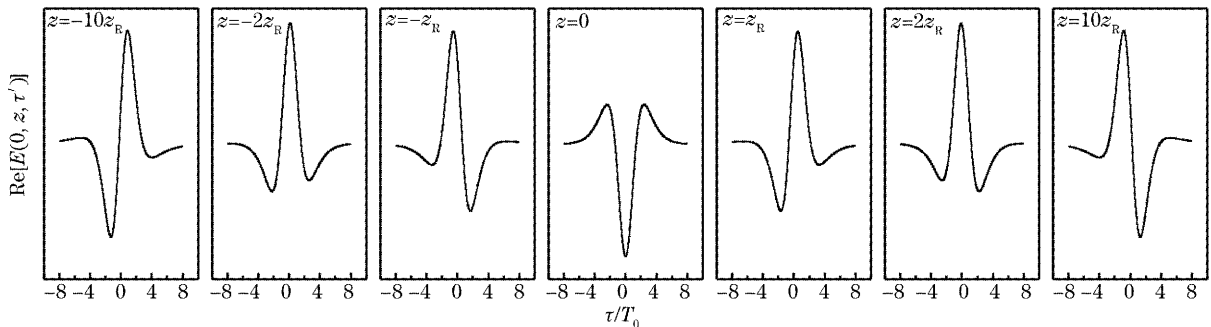


图1 复宗量拉盖尔-高斯脉冲光束在轴上传输时实部的脉冲形状变化示意图。参量为： $n=2, r=0, z=0, \alpha=20$

Fig. 1 The pulse shape variation of the real part of the ultrashort pulsed elegant Laguerre-Gaussian beam at different distance. Parameters:  $n=2, r=0, z=0, \alpha=20$

从图1可以看到复宗量拉盖尔-高斯脉冲光束的相移导致脉冲的形状发生了显著的变化，脉冲极性多次反转。而且拉盖尔多项式的阶数越高，相移越大，极性反转的次数也越多。冯等人已经在实验

中观察到了超短太赫兹脉冲的戈维相移<sup>[5]</sup>。

虽然我们的表达式(11)中没有出现拉盖尔多项式项，但复宗量拉盖尔-高斯脉冲光束的横向空间分布是非常接近拉盖尔-高斯函数的分布形式。图2

中给出复宗量拉盖尔-高斯脉冲光束和拉盖尔-高斯函数的对比。图 2(a)和图 2(b)分别是  $n=4, 6$  时复宗量拉盖尔-高斯脉冲光束和拉盖尔-高斯函数的横向空间分布。从图中可以清楚地看到我们得到的空间分布的确是拉盖尔-高斯形的。选择恰当的参量,复宗量拉盖尔-高斯脉冲光束和拉盖尔-高斯函数基

本重合。实际上,由于超短脉冲的时空耦合影响,高斯脉冲光束[(3)式]和复宗量拉盖尔-高斯脉冲光束[(11)式]的空间横向分布并不是严格的高斯或拉盖尔-高斯分布。只有在脉冲宽度变大时,时空耦合减弱,横向空间分布才趋近严格的高斯或拉盖尔-高斯分布。

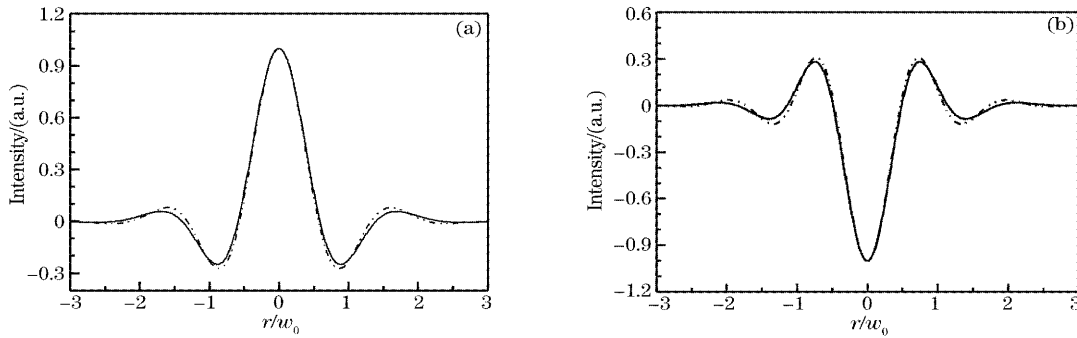


图 2 复宗量拉盖尔-高斯脉冲光束和拉盖尔-高斯函数的横向空间强度分布的对比。图中实线为复宗量拉盖尔-高斯脉冲光束,虚点线为拉盖尔-高斯函数,参量:(a)  $n=4, \tau=0, z=0, \alpha=20$ , (b)  $n=6, \tau=0, z=0, \alpha=20$

Fig. 2 Comparison of the transversal spatial intensity between the pulsed elegant Laguerre-Gaussian beam and the Laguerre-Gaussian function. The solid curves represent the pulsed elegant Laguerre-Gaussian beam; and the dash-dotted curves represent the Laguerre-Gaussian function. Parameters: (a)  $n=4, \tau=0, z=0, \alpha=20$ , (b)  $n=6, \tau=0, z=0, \alpha=20$

当  $\alpha \rightarrow \infty$  时,泊松谱脉冲趋近于高斯脉冲<sup>[9]</sup>,于是可以得到的复宗量拉盖尔-高斯脉冲光束,

$$E_n(r', z', \tau') = \frac{i}{q} \exp\left(-\frac{ir'^2}{q}\right) \exp(2\pi i r' \tau') \sum_{m=0}^n a_m (n-m)! \left(-\frac{1}{2\pi}\right)^{n-m} \frac{(T_0 r'^2)^{n-m}}{q'^n} L_{(n-m)}\left(T_0 \tau' - \frac{AT_0}{q'}\right), \quad (12)$$

其中  $a_m$  的值由二项式系数确定。

从(12)式可以清晰的看到拉盖尔项的出现。但在这里需要说明的是,由于泊松谱脉冲是复解析信号的,所以对于极短的脉冲光束(可以和载波的周期相比拟时),利用泊松谱脉冲得到的(11)式是没有空间奇异性的,而利用高斯脉冲形式得到的复宗量拉盖尔-高斯脉冲光束,即(12)式,是有空间奇异性的。图 3 是在初始时刻初始位置  $n=4$  时,且脉冲宽度为一个光学周期,分别由(11)式和(12)式得到的复宗量拉盖尔-高斯脉冲光束光场横向强度分布。从图中可以清楚地看到由(12)式得到的复宗量拉盖尔-高斯脉冲光束的空间奇异性非常强烈。解决空间奇异性的办法是使用复解析信号,但计算一般都相当麻烦。对于空间奇异性已有较多文献进行过研究<sup>[10~12,21]</sup>,这里就不再讨论。

等衍射脉冲光束(如,高斯脉冲光束)的传输中,会出现轴外脉冲的时间延迟等效应。我们注意到复宗量拉盖尔-高斯脉冲光束也同样具有这样的效应。图 4 给出了式中  $n=4$  时,脉冲传输一个瑞利距离后的时间延迟。实线是  $r=0$  处的时间波形,虚点线是  $r=2w_0$  时的时间波形,点线是  $r=4w_0$  时的时间波

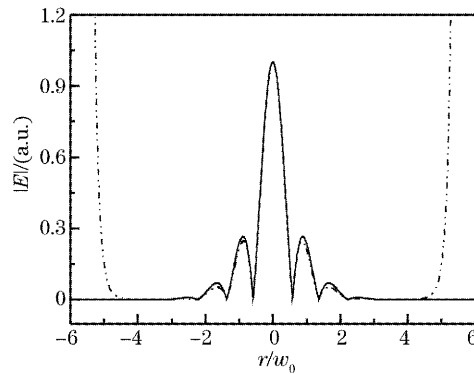


图 3 复宗量拉盖尔-高斯脉冲光束的脉冲宽度为一个光学周期时的光场横向强度分布。实线是由(11)式得到的;虚点线是由(12)式得到的。参量:  
 $n=4, \tau=0, z=0, \alpha=60$

Fig. 3 The transversal intensity distribution of the pulsed elegant Laguerre-Gaussian beam with one optical oscillation period. The solid curve is plotted according to Eq. (11); the dash-dotted curve is plotted according to Eq. (12). Parameters:  $n=4, \tau=0, z=0, \alpha=60$

形。可以看到离轴越远,脉冲的时间延时越大。通过计算可以证明,延时量的大小决定于光束的波前

曲率,和高斯脉冲光束的情况一致。上述情况是在  $z > 0$  时,时间延迟向后沿;如果是  $z < 0$ ,那么时间延迟则向前沿。

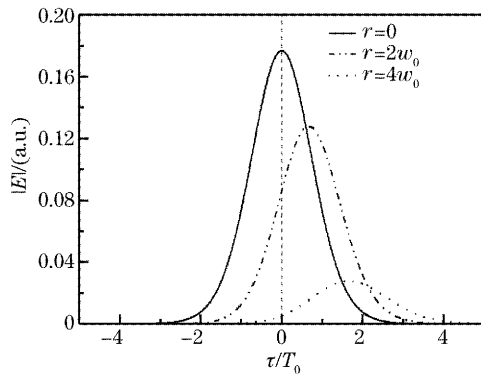


图 4  $n=4$  时复宗量拉盖尔-高斯脉冲光束传输一个瑞利距离后的时间延迟。其他参量同图 2

Fig. 4 The time delay of the pulsed elegant Laguerre-Gaussian beam for  $n=4$  at one Rayleigh distance. The other parameters are the same as in Fig. 2

## 5 结 论

本文从高斯脉冲光束出发,给出了一组新的超短脉冲光束解,其空间分布是复宗量拉盖尔-高斯光束,时间脉冲的形状是任意的,称为超短复宗量拉盖尔-高斯脉冲光束解。此解的每个频率分量都是复宗量拉盖尔-高斯光束,并且具有相同的衍射距离参量,因此脉冲光束是等衍射的。文中对这种超短脉冲光束的一些基本性质进行了分析。并给出了复宗量拉盖尔-高斯脉冲光束的轴上光强、艾维相移、光强的横向分布、脉冲延迟、空间奇异性等。研究结果表明,复宗量拉盖尔-高斯脉冲光束的传输性质与高斯脉冲光束以及超短脉冲复宗量厄米高斯光束的性质基本类似,这为寻找超短脉冲光束的普遍性质提供了理论依据。

## 参 考 文 献

- Kaplan A E. Diffraction-induced transformation of near-cycle and subcycle pulses[J]. *J. Opt. Soc. Am. (B)*, 1998, **15**(3): 951~955
- Ranka J K, Ranka A L. Breakdown of the slowly-varying envelope approximation in the self-focusing of ultrashort pulses[J]. *Opt. Lett.*, 1998, **23**(7): 534~536
- Brabec T, Krausz F. Nonlinear optics pulse propagation in the single-cycle regime[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1997, **78**(17): 3282~3285
- Caron C F R, Potvliege R M. Free-space propagation of ultrashort pulses; space-time couplings in Gaussian pulse beams[J]. *J. Modern Optics*, 1999, **46**(13): 1881~1891
- Feng S, Winful H G. Guoy shift and temporal reshaping of focused single-cycle electromagnetic pulses[J]. *Opt. Lett.*, 1998, **23**(5): 385~387
- Feng S, Winful H G. Spatiotemporal structure of isodiffracting ultrashort electromagnetic pulses[J]. *Phys. Rev. (E)*, 2000, **61**(1): 862~873
- Wang Zhongyang, Zhang Zhengquan, Xu Zhizhan *et al.*. Space-time profiles of an ultrashort pulsed Gaussian beam[J]. *IEEE J. Quantum Electron.*, 1997, **33**(4): 566~573
- Wang Zhongyang, Xu Zhizhan, Zhang Zhengquan. Diffraction integral formulas of the pulsed wave field in the temporal domain[J]. *Opt. Lett.*, 1997, **22**(6): 354~356
- Porras M A. Nonsinusoidal few-cycle pulsed light beams in free space[J]. *J. Opt. Soc. Am. (B)*, 1999, **16**(9): 1468~1474
- Porras M A. Ultrashort pulsed Gaussian light beams[J]. *Phys. Rev. (E)*, 1998, **58**(1): 1086~1093
- Fu Xiquan, Guo Hong, Hu Wei *et al.*. Invalidation of the slowly-varying envelope approximation and producing and eliminating of the spatial singularity for ultrashort pulsed beam propagation in free space[J]. *Acta Physica Sinica*, 2001, **50**(9): 1693~1698 (in Chinese)
- 傅喜泉,郭弘,胡巍等. 超短脉冲光束传输缓变包络近似理论的失效和空间奇异性的形成与消除[J]. *物理学报*, 2001, **50**(9): 1693~1698
- Yang Zhenjun, Hu Wei, Fu Xiquan *et al.*. The production and elimination of the spatial singularity for ultrashort chirped pulse beam propagation in free space[J]. *Acta Physica Sinica*, 2003, **52**(8): 1920~1924 (in Chinese)
- 杨振军,胡巍,傅喜泉等. 超短啁啾脉冲光束空间奇异性的形成与消除[J]. *物理学报*, 2003, **52**(8): 1920~1924
- Zauderer Erich. Complex argument Hermite-Gaussian and Laguerre-Gaussian beams[J]. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 1986, **3**(4): 465~469
- Yang Zhenjun, Lu Guangshan, Hu Wei. Compensation of medium dispersion by the spatially induced group velocity dispersion[J]. *Acta Optica Sinica*, 2004, **24**(7): 916~921 (in Chinese)
- 杨振军,卢光山,胡巍. 利用空间诱导色散补偿介质色散[J]. *光学学报*, 2004, **24**(7): 916~921
- Lu Daquan, Hu Wei, Zheng Yizhou *et al.*. The influence of vectorial effects in the non-paraxial propagation of ultrashort pulsed beam in free space[J]. *Acta Optica Sinica*, 2004, **24**(1): 52~56 (in Chinese)
- 陆大全,胡巍,郑一周等. 矢量效应对超短脉冲光束非傍轴传输的影响[J]. *光学学报*, 2004, **24**(1): 52~56
- Yang Zhenjun, Hu Wei, Zheng Yizhou *et al.*. The ultrashort pulsed elegant Hermite-Gaussian beams[J]. *Acta Optica Sinica*, 2004, **24**(11): 1571~1576 (in Chinese)
- 杨振军,胡巍,郑一周等. 超短脉冲复宗量厄米高斯光束[J]. *光学学报*, 2004, **24**(11): 1571~1576
- R. W. Ziolkowski. Localized transmission of electromagnetic energy[J]. *Phys. Rev. (A)*, 1989, **39**: 2005~2033
- Daquan Lu, Wei Hu, Yizhou Zheng *et al.*. The nonparaxial property of chirped pulsed beam[J]. *Chin. Opt. Lett.*, 2003, **1**(9): 556~558
- Zeng Zhinan, Li Ruxin, Xu Zhizhan. Effect of the absolute carrier phase of a few-cycle laser pulses on the generation of attosecond pulse[J]. *Acta Optica Sinica*, 2003, **23**(3): 317~320 (in Chinese)
- 曾志男,李儒新,徐至展. 激光脉冲绝对相位对产生阿秒脉冲的影响[J]. *光学学报*, 2003, **23**(3): 317~320
- Guo Qi, Li Huagang. Influence of beam widths on the induced focusing of optical beams in self-defocusing nonlinear media[J]. *Acta Optica Sinica*, 2003, **23**(9): 1127~1132 (in Chinese)
- 郭旗,李华刚. 光束束宽对自散焦介质中诱导光束聚焦的影响[J]. *光学学报*, 2003, **23**(9): 1127~1132
- Born M., Wolf E.. *Principles of Optics* [M]. 7th ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1999. 557~562