

文章编号: 0253-2239(2005)11-1558-5

## 双轴晶体会聚偏光干涉的理论及实验研究\*

沈为民 张 艺 金永兴 邵中兴 李卫涛

(中国计量学院 光电信息工程系, 杭州 310018)

**摘要:** 晶体会聚偏光干涉图包含了晶体特性的许多信息, 建立偏光干涉图的定量分析方法可以使这些信息得到充分利用。基于双轴晶体折射时满足的波矢关系, 导出两折射光波相位差的精确计算公式。分析了光波在各界面折射时偏振态的变化, 提出了会聚偏光干涉合成振幅的计算方法。针对任意取向的双轴晶体, 计算了完整的偏光干涉图, 反映了相位分布决定等色线、振幅分布决定消光影的规律。用数字图像模拟了干涉图, 并讨论了干涉图的变化情况。对 4 块不同取向的 KTP 晶片进行实验, 实验干涉图与理论干涉图的特征完全一致, 两者仔细对比可判断现有 KTP 晶体色散方程的优劣。

**关键词:** 晶体光学; 双轴晶体; 会聚偏光干涉; 偏振; 色散方程

中图分类号: O436 文献标识码: A

## Theoretical and Experimental Study on the Interference of Convergent Polarized Light for a Biaxial Crystal

Shen Weimin Zhang Yi Jin Yongxing Shao Zhongxing Li Weitao

(Department of Optoelectronic Information Engineering, China Jiliang University, Hangzhou 310018)

**Abstract:** Many important information of a crystal is included in the convergent polarized light interference pattern, and can be completely utilized by numerical analysis of the pattern. Based on the relationship of wave vectors on crystal interface, accurate formulas calculating phase difference between two refracted waves are deduced. Changes of light polarization in each interface are analyzed and the method to calculate total amplitude in convergent polarized light interference is proposed. The conoscopic interference patterns of crystals are calculated for any orientation biaxial crystal, which include information of isochromatic curve and isogyre. The interference patterns are simulated by digital image and the changes of the patterns are discussed. Experiment of the conoscopic interference is completed for four pieces of KTP crystals with different orientation. Comparison of the experimental patterns and theoretical patterns can judge which Sellmeier's equation is best.

**Key words:** crystal optics; biaxial crystal; interference of convergent polarized light; polarization; Sellmeier's equation

### 1 引 言

双轴晶体在光学技术特别是非线性光学领域已得到广泛应用<sup>[1~5]</sup>。一般认为非线性光学系数在主平面内取极值, 故双轴晶体问题主要限于讨论主平面内的情况, 其他情况讨论较少<sup>[1]</sup>。双轴晶体仍有许多性质需要深入研究。例如, 有关 KTP 晶体的折射率不同文献给出不同的数据, 有的相差很大。文献[2]报道了用晶体球法直接测量 KTP 晶体第 I 类相位匹

配曲线, 并与 KTP 晶体的色散方程给出的理论匹配曲线比较, 据此判断 Vanherzeele 的公式优于其他公式。但是他们只是做了由  $1.064 \mu\text{m} \rightarrow 0.532 \mu\text{m}$  的二次谐波产生实验, 至多说明这两个波长下的折射率数据与 Vanherzeele 公式的结果较一致, 其他波长的折射率数据仍有疑问。该文提到用偏光干涉图来确定晶体球的主轴方向, 这是调试晶体器件的常用方法。晶体偏光干涉也是研究、鉴定矿物及岩石的重要方

\* 浙江省自然科学基金(102018)资助课题。

作者简介: 沈为民(1961~), 男, 浙江桐庐人, 教授, 主要从事光学与光电子技术的教学与研究工作。

E-mail: swm@cjlu.edu.cn

收稿日期: 2004-12-31; 收到修改稿日期: 2005-03-15

法<sup>[6]</sup>,还可用于其他参量的测量<sup>[7]</sup>。然而,会聚偏光干涉涉及光的斜入射,入射方向(入射角和方位角)是任意的,这给定量分析晶体双折射形成的两偏振光的相位及振幅关系带来很大困难。特别是双轴晶体,两折射光都是非常光,折射率、传播方向、偏振方向的确定都比较复杂。所以,目前对晶体偏光干涉图的分析还比较简单,一般只用简化的模型分析特殊晶体取向下的干涉图<sup>[6~9]</sup>,最多分析了两相干光的相位差对干涉条纹的影响。在相关测量中,主要是利用一些标志性特征如光轴出露点、黑带等,这些特征只有当晶体厚度、取向、会聚光的锥角等满足一定要求时才会显现,晶体偏光干涉的应用因此受到了很大的限制。所以,建立晶体会聚偏光干涉的定量分析方法,对于提高测量精度、扩大测量范围、方便实验方案设计等都具有重要意义。

## 2 干涉图的计算

### 2.1 坐标关系

建立坐标系如图 1 所示,  $o\xi$  轴与晶片垂直,  $o\xi_0$  平行于起偏器透光轴方向,  $o\eta_0$  平行于检偏器透光轴方向。在会聚偏光干涉中投射到晶体的光线形成一圆锥体,入射角  $\psi_0$  相等的光线形成一圆锥面。圆锥面上不同光线对应的入射面不同,  $o\xi\zeta$  表示某一支光线的入射面,它与起偏器透光轴的夹角为  $\beta$  ( $0 \leq \beta \leq 2\pi$ )。所以入射光线的方向须用入射角  $\psi_0$  和方位角  $\beta$  两个参量描写。晶体的主轴坐标系  $oxyz$  (图中未画) 相对表面坐标系的位置代表了晶体取向,通常约定晶体主折射率  $n_x < n_y < n_z$ ,而晶面法线在主轴坐标系的倾角和方位角用  $\theta, \phi$  表示,也即  $\theta$  为  $\zeta$  轴与  $z$  轴夹角,  $\phi$  为  $\zeta$  轴在  $oxy$  坐标面的投影线与  $x$  轴的夹角<sup>[1]</sup>。另外,用  $\alpha$  为  $z$  轴在晶体前表面( $o\xi\eta$  坐标面)的投影线与  $\xi_0$  轴的夹角,这样  $\alpha$  变化代表晶片绕其法线在转动。再令  $\gamma = \alpha - \beta$ ,  $\gamma$  代表  $z$  轴在晶体前表面的投影线与  $\xi$  轴的夹角。

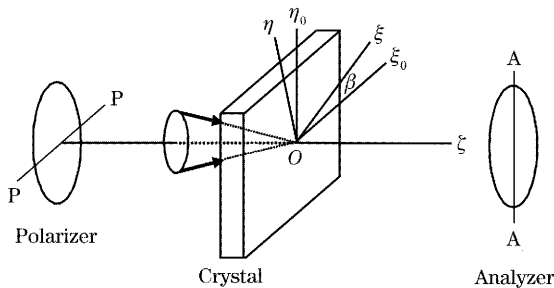


图 1 坐标关系图

Fig. 1 Relationship of coordinate

### 2.2 相位关系

由于干涉图上的点对应于晶体出射光的方向而不是出射点的位置,所以不必计算晶体内折射光的光线方向,只需计算折射波矢的方向。而波矢折射关系比较简单,光在晶体界面折射时,折射光波矢一定在入射面内,并且满足斯涅耳(Snell)关系:

$$n_0 \sin \psi_0 = n_1 \sin \psi_1 = n_2 \sin \psi_2, \quad (1)$$

其中  $n_0, \psi_0$  表示入射介质的折射率和入射角,  $\psi_1, \psi_2$  表示晶体中两折射光波的波矢折射角,  $n_1, n_2$  为相应的折射率。

图 2 表示波矢的折射关系。由于晶体折射率取决于晶体中的波矢方向,而波矢方向又与波矢折射角有关,所以折射率  $n$  与波矢折射角  $\psi$  存在函数关系。在双轴晶体中  $n$  与  $\psi$  的函数关系十分复杂,不能用简单的公式表示出来。所以(1)式需要数值求解,其方法可参阅文献[1]。

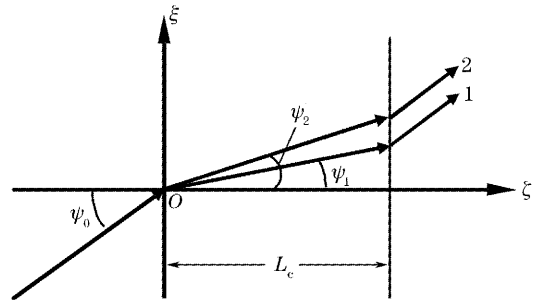


图 2 晶体界面折射时波矢方向的变化

Fig. 2 Changes in direction of wave vector refracting on crystal interface

波矢决定了单色波的相位因子,所以计算相位时只需计算波矢方向的路程,不必知道实际光线的方向。因此图 2 中两光波的相位差为

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} L_c \left( \frac{n_2}{\cos \psi_2} - \frac{n_1}{\cos \psi_1} \right) - \frac{2\pi}{\lambda} n_0 L_c (\tan \psi_2 - \tan \psi_1) \sin \psi_0, \quad (2)$$

其中第一项为晶体内的相位差,第二项为晶体外的相位差。利用(1)式可将(2)式简化为

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} L_c (n_2 \cos \psi_2 - n_1 \cos \psi_1), \quad (3)$$

当由(1)式求出  $n_1, n_2, \psi_1, \psi_2$  时,由上式很容易求出  $\delta$ 。

### 2.3 振幅关系

在晶体会聚偏光干涉中,晶体置于正交偏振器之中,虽然晶体改变了光波的偏振态,部分抵消了正交偏振器带来的消光效应,但由于入射光是多方向的,经过晶体时偏振态的变化情况不同,使得相干光波振幅的空间分布不再是均匀的。两相干光的振幅

分布和相位分布共同决定了晶体会聚偏光干涉的图样。下面分析相干光的振幅分布。

光波在晶体之外仍按平行入射面分量(p波)和垂直入射面分量(s波)分解。光波在入射晶体前的振动方向平行起偏器透光轴,按图1的投影关系,得

$$E_{0p} = \cos \beta, \quad E_{0s} = -\sin \beta, \quad (4)$$

根据电磁场的边值关系可求得晶体中两折射光波的振幅为<sup>[1]</sup>

$$E_1 = 2n_0 \cos \psi_0 \frac{a_{22}E_{0s} - a_{12}E_{0p}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad (5a)$$

$$E_2 = 2n_0 \cos \psi_0 \frac{a_{11}E_{0p} - a_{21}E_{0s}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad (5b)$$

式中  $a_{11}$ 、 $a_{12}$ 、 $a_{21}$ 、 $a_{22}$  是由入射光线方向、晶体取向及晶体主折射率决定的系数,与入射光偏振分量  $E_{0p}$ 、 $E_{0s}$  无关。晶体中两偏振光在晶体后表面也会发生反射与折射,同样也可用电磁场边值关系求得透射光振幅平行入射面和垂直入射面的各分量  $E_{1p}$ 、 $E_{1s}$ 、 $E_{2p}$ 、 $E_{2s}$ ,这里不再赘述。

光从晶体后表面射出时,其s波与  $\eta$  方向平行,而p波经透镜折射后与  $\xi$  方向平行。经检偏器后,原光波1与光波2对应的振幅分别为

$$A_1 = E'_{1s} \cos \beta + E'_{1p} \sin \beta, \quad (6a)$$

$$A_2 = E'_{2s} \cos \beta + E'_{2p} \sin \beta, \quad (6b)$$

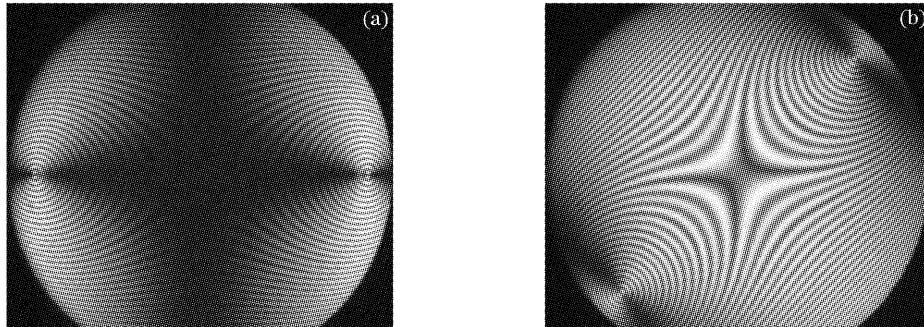


图3 1#样品实验干涉图。(a)  $\alpha=0^\circ$ , (b)  $\alpha=45^\circ$

Fig. 3 Experimental interference patterns of No. 1 specimen. (a)  $\alpha=0^\circ$ , (b)  $\alpha=45^\circ$

用前面讲述的方法计算理论干涉图,可以发现理论干涉和实验干涉图的特征以及晶片转动时的变化规律完全相同。但采用不同文献报道的KTP色散方程计算的折射率数据,干涉图的中央部分的强度分布或者干涉图中的条纹数会有明显差异。图4即为1#样品当晶片转过  $45^\circ$  时的计算干涉图,图4(a)中的折射率由 Vanherzeele 的公式<sup>[10]</sup> 计算得到,而图4(b)中的折射率对应于 Fan 的公式<sup>[11]</sup>。与图3(b)对比可以发现,Fan 的公式导出的结果无论是

两波叠加形成干涉,其振幅  $A$  由下式确定

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \delta. \quad (7)$$

### 3 KTP晶体的会聚偏光干涉图

我们加工了4块不同方向、不同厚度的KTP晶片,参量为:1#样品,  $\theta=\phi=0^\circ$ ,厚0.915 mm;2#样品,  $\theta=19^\circ$ ,  $\phi=0^\circ$ ,厚0.905 mm;3#样品,  $\theta=90^\circ$ ,  $\phi=23.5^\circ$ ,厚0.874 mm;4#样品,  $\theta=73^\circ$ ,  $\phi=35^\circ$ ,厚0.804 mm。定向精度  $\pm 0.1^\circ$ ,厚度测量精度  $\pm 0.001$  mm。实验用单色光源,波长为  $\lambda=589.3$  nm。下面讨论不同样品的偏光干涉图。

#### 3.1 晶体表面与z轴垂直的情形

对于KTP晶体, $z$ 轴为两光轴的锐角平分线。当 $z$ 轴垂直晶体表面时, $z$ 轴与 $\zeta$ 轴重合,  $\theta=0^\circ$ 。1#样品就对应这种情况,图3是其实验干涉图。图3(a)对应 $x$ 轴平行起偏器透光轴方向的情况。在水平方向有一黑带,穿过两个光轴出露点,在光轴出露点附近黑带很细。另一条黑带与之正交,交点位于干涉图中心即 $z$ 轴出露点,这条黑带很宽。干涉条纹环绕两个光轴出露点,成 $\infty$ 状。晶片转动时十字黑带从中心分裂形成两个弯曲的黑带,图3(b)对应晶片转过  $45^\circ$  时的情况,此时黑带远离中央区域,对比度最好。

条纹数目还是条纹形状,或者是强度分布,都十分吻合。而 Vanherzeele 的公式导出的结果在中央区域强度分布明显不同。若采用文献[2]列举的其他公式则差异更大。实际上,只要  $n_x$  或  $n_y$  变化  $1 \times 10^{-4}$ ,就能清楚看出条纹的变化。所以,如果比较多个波长下理论与实验干涉图,就可以准确地判断色散方程的优劣。

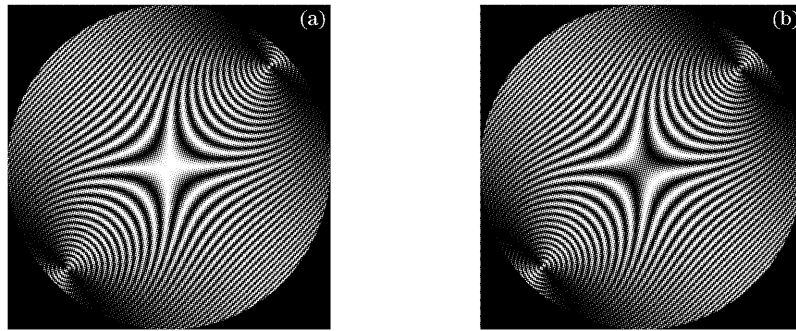


图 4 1# 样品理论干涉图( $\alpha=45^\circ$ )。(a)基于 Vanherzeele 公式的结果, (b)基于 Fan 公式的结果

Fig. 4 Theoretical interference patterns of No. 1 specimen ( $\alpha=45^\circ$ ). (a) Based on Vanherzeele's formula, (b) Based on Fan's formula

### 3.2 晶体表面与两光轴之一垂直的情形

图 5(a)为 2# 样品的偏光干涉图( $\alpha=45^\circ$ ),与图 4(b)比较,相当于将视域中心移到一个光轴出露点。用不同的色散方程计算出的光轴方向有所不同,大致在  $18^\circ\sim 19^\circ$ 。2# 样品是按文献[12]的数据设计的,取  $\theta=19.0^\circ$ 。而按 Fan 的公式计算,光轴方

向  $\theta=18.5^\circ$ ,理论上可以从光轴出露点的位置来判断谁优谁劣,但实际由于 CCD 摄像中很难准确确定视域中心(与垂直晶面的光线方向相对应的点)的绝对位置,所以作这样的判断是很难的。而不同公式计算出的干涉图样却有明显差异,按 Fan 的公式计算的干涉图如图 5(b)所示,与实验图最吻合。

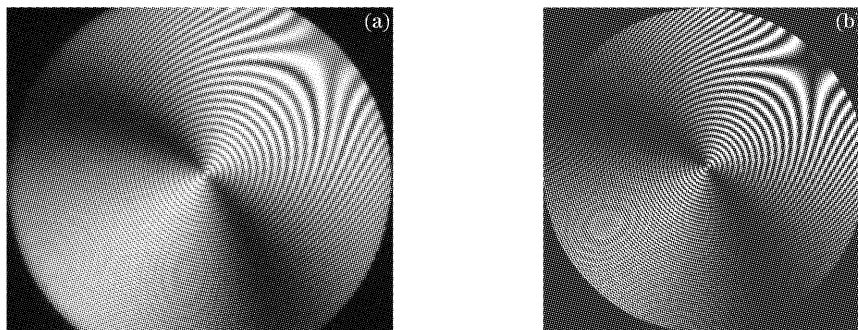


图 5 2# 样品锥光干涉图( $\alpha=45^\circ$ )。(a)实验干涉图, (b)理论干涉图

Fig. 5 Conoscopic interference patterns of No. 2 specimen ( $\alpha=45^\circ$ ). (a) Experimental interference pattern, (b) theoretical interference pattern

### 3.3 其他情况的偏光干涉图

3# 样品按  $1.064\ \mu\text{m}\rightarrow 0.532\ \mu\text{m}$  的倍频晶体的方向加工,  $\theta=90^\circ$  意味着  $z$  轴平行晶片表面。虽

然干涉图中看不到光轴出露点,但可看到两个对称方向,其中一个对称方向与光轴面平行。晶片转动时干涉图也跟着转动,  $\alpha=45^\circ$  时对比度最好,偏光干

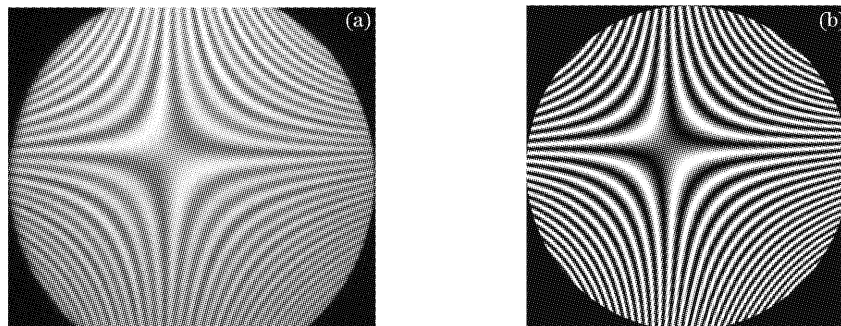


图 6 3# 样品锥光干涉图( $\alpha=45^\circ$ )。(a)实验干涉图, (b)理论干涉图

Fig. 6 Conoscopic interference patterns of No. 3 specimen ( $\alpha=45^\circ$ ). (a) Experimental interference pattern, (b) theoretical interference pattern

涉图如图 6 所示,其中图 6(a)为实验图,图 6(b)为按 Fan 的公式的计算图。

4# 样品晶体的方向没有特别意义,干涉图也找不到明显的特征点与特征方向,但条纹粗细、条纹形

状及绕行方向仍有规律可循。 $\alpha=45^\circ$ 时其偏光干涉图如图 7 所示,其中图 7(a)为实验图,图 7(b)为按 Fan 的公式的计算图。

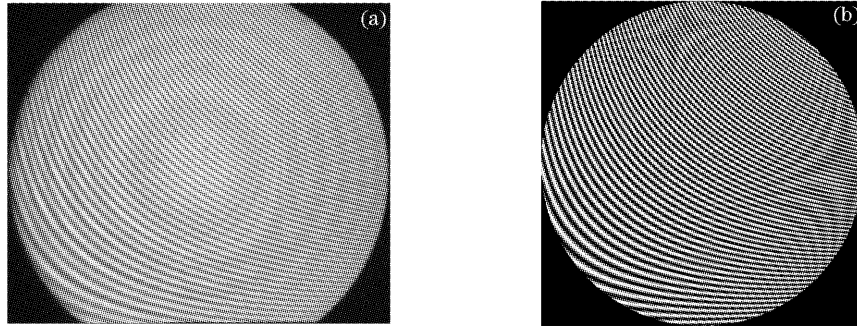


图 7 4# 样品锥光干涉图( $\alpha=45^\circ$ )。(a)实验干涉图,(b)理论干涉图

Fig. 7 Conoscopic interference patterns of No. 4 specimen ( $\alpha=45^\circ$ ). (a) Experimental interference pattern, (b) theoretical interference pattern

## 4 结 论

晶体会聚偏光干涉中两相干光的相位差与入射光的波长及方向、晶体的主折射率、取向、厚度等有关,与起偏器、检偏器的方向无关。而振幅分布与起偏器、检偏器、晶体的相对取向直接相关,但与光的波长及晶体厚度无关。4 块样品毫无例外地与按 Fan 的公式计算的干涉图一致,说明 Fan 的公式至少在  $\lambda=589.3\text{ nm}$  附近优于其他公式。用理论干涉图与实验图对比的方法鉴别折射率,方法简单,灵敏度也高,折射率变化  $10^{-4}$ ,干涉图会有明显变化。且晶片加工容易,所用材料很少,鉴别成本低。

## 参 考 文 献

- Shen Weimin, Jin Yongxing, Shao Zhongxing. Reflection and refraction on the surface of a biaxial crystal[J]. *Acta Physica Sinica*, 2003, **52**(12): 3049~3054 (in Chinese)  
沈为民,金永兴,邵中兴. 光在双轴晶体表面的反射与折射[J]. *物理学报*, 2003, **52**(12): 3049~3054
- Yan Jiang, Xie Shenwu, Li Haowen *et al.*. Direct measurement of type I phase-matching curve of KTP crystal using sphere method [J]. *Acta Optica Sinica*, 2001, **21**(2): 134~138 (in Chinese)  
阎江,谢绳武,李浩文等. 晶体球法直接测量 KTP 晶体第 I 类相位匹配曲线[J]. *光学学报*, 2001, **21**(2): 134~138
- Wang Zhengping, Du Chenlin, Teng Bing *et al.*. Third harmonic generation property of 1064 nm in nonlinear optical crystal  $\text{BiB}_3\text{O}_6$  of low symmetry[J]. *Acta Optica Sinica*, 2003, **23**(11): 1300~1305 (in Chinese)  
王正平,杜晨林,滕冰等. 低对称性非线性光学晶体硼酸铋( $\text{BiBO}$ )的 1064 nm 三倍频性质[J]. *光学学报*, 2003, **23**(11): 1300~1305
- Xu Degang, Yao Jianquan, Chen Jin *et al.*. High stabilization 85 W all-solid-state green laser operation[J]. *Chin. J. Lasers*, 2004, **31**(4): 385~389 (in Chinese)  
徐德刚,姚建铨,陈进等. 85 W 高稳定全固态绿光激光器的研究[J]. *中国激光*, 2004, **31**(4): 385~389
- Feng Yan, Bi Yong, Zhang Hongbo *et al.*. 20 W diode dumped external frequency doubled Nd:YAG green laser[J]. *Acta Optica Sinica*, 2003, **23**(4): 469~471 (in Chinese)  
冯衍,毕勇,张鸿博等. 20 W 腔外倍频全固态 Nd:YAG 绿光激光器[J]. *光学学报*, 2003, **23**(4): 469~471
- Li Dehui. *Crystal Optics* [M]. Beijing: China Geology Press, 1993. 66~98 (in Chinese)  
李德惠. 晶体光学[M]. 北京:地质出版社, 1993. 66~98
- Gao Xiang, Zhang Guoxiong, Li Zhen. Application of conoscopic interference in geometric profilometry[J]. *Acta Optica Sinica*, 2002, **22**(4): 452~455 (in Chinese)  
高翔,张国雄,李真. 偏光干涉在物体几何形貌检测中的应用[J]. *光学学报*, 2002, **22**(4): 452~455
- Jin Shiqi. *Crystal Optics* [M]. Beijing: Science Press, 1995. 191~207 (in Chinese)  
金石琦. 晶体光学[M]. 北京:科学出版社, 1995. 191~207
- Cai Luzhong, Wang Yongqian. Graphic determination of reflection ray in uniaxial crystals and analysis of the interference of convergent polarized light[J]. *College Physics*, 2001, **20**(1): 6~11 (in Chinese)  
蔡履中,王永钤. 单轴晶体中光折射的图解计算及会聚偏振光干涉的定量分析[J]. *大学物理*, 2001, **20**(1): 6~11
- Herman Vanherzele, J. D. Bierlein, F. C. Zumsteg. Index of refraction measurements and parametric generation in hydrothermally-grown  $\text{KTiOPO}_4$  [J]. *Appl. Opt.*, 1988, **27**(16): 3314~3316
- Tso Yee Fan, C. E. Huang, B. Q. Hu *et al.*. Second harmonic generation and accurate index of refraction measurements in flux-grown  $\text{KTiOPO}_4$  [J]. *Appl. Opt.*, 1987, **26**(12): 2390~2394
- K. Kato. Parametric oscillation at 3.2  $\mu\text{m}$  in KTP pumped at 1.064  $\mu\text{m}$  [J]. *IEEE J. Quantum Electron.*, 1991, **27**(5): 1137~1140