

文章编号: 0253-2239(2005)10-1415-5

用时域有限差分方法研究非惯性坐标系下 光子晶体传输特性*

朱志宏 叶卫民 季家榕 袁晓东 曾 淳

(国防科技大学光电学院光子晶体研究中心, 长沙 410073)

摘要: 将时域有限差分(FDTD)方法用于非惯性坐标系下光子晶体理论研究,给出了非惯性坐标系下的差分方程和理想匹配层(PML)边界条件。设计了一个包含闭合环行腔和定向耦合器的光子晶体结构。定向耦合器的耦合长度为 $43a$,这样的耦合长度既保证了闭合环行腔的高 Q 值,又保证了必要的频率分辨力。理论计算表明:光子晶体转动时,闭合环行腔里顺时针与逆时针方向传播的光有频差产生,此频差大小与光子晶体的转动角速度有关。

关键词: 光电子学; 光子晶体; 非惯性坐标系; 时域有限差分; 频差

中图分类号: O488 文献标识码: A

Transmission Properties Research of Photonic Crystals in the Non-Inertial Frame Using FDTD Method

Zhu Zhihong Ye Weimin Ji Jiarong Yuan Xiaodong Zeng Chun

(Research Center of Photonic Crystals, National University of Defense Technology, Changsha 410073)

Abstract: The finite-difference time-domain (FDTD) method is developed for analyzing the photonic crystals in the non-inertial frame. The difference equations and the perfectly matched layer absorbing boundary condition equations in the non-inertial frame are given. Designing a photonic crystal structure with a ring cavity and a directional coupler. The length of directional coupler is $43a$, which keep the high quality factor and necessary frequency resolution. The theoretical results indicate that there is frequency tolerance between wave propagating along the clockwise and counter-clockwise in the ring cavity. The frequency tolerance depends on the rotational speed.

Key words: optoelectronics; photonic crystals; non-inertial frame; finite-difference time-domain; frequency tolerance

1 引 言

在过去的几年中,光子晶体^[1,2]因其具有控制光子运动的能力而备受关注^[3,4]。它其实可以理解就是一种周期性电介质。在周期性电介质材料中存在类似于半导体禁带的“光子禁带”^[5~10];如果光的频率在禁带范围内,则它不能在介质中传播。

光子晶体禁带的存在也意味着光在光子晶体中传播有一定的特性,对这些特性进行研究,是光子晶体理论研究的一个重要方面。光子晶体传输特性理论研究的方法有很多种,如传输矩阵法^[11]、分层多

次散射法^[12]和时域有限差分方法(FDTD)^[13~15]等。从各种参考文献中看到,现阶段对光子晶体的理论研究都局限于惯性坐标系中,对于非惯性坐标系则没有涉及。但是,光在惯性系和非惯性系中的行为是不一样的,比如激光陀螺和光纤陀螺就是利用传播方向相反的光在非惯性坐标系中产生的频差测量转动角速度的。由此自然想到,光子晶体环行腔是否有类似性,本文将时域有限差分方法用于非惯性坐标系下光子晶体理论研究,导出了非惯性坐标系下的差分方程和理想匹配层(PML)边界条件,并对设定的光子晶体结构进行了初步的研究。

* 国家安全重大基金项目研究基金资助课题。

作者简介: 朱志宏(1978~),男,湖北人,国防科技大学博士研究生,主要从事光子晶体方面的研究。

E-mail: zzhwex@163.com

收稿日期: 2004-12-15; 收到修改稿日期: 2005-03-21

2 非惯性坐标系下光子晶体中的麦克斯韦方程

光子晶体在非惯性坐标系下的理论研究问题,可以由非惯性坐标系下宏观麦克斯韦方程组^[16]来求解。光子晶体非惯性坐标系下麦克斯韦方程组(一阶近似)为

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\nabla \times [\mathbf{H} - \epsilon(\mathbf{r})(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{E}] = \epsilon(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial t} \left[\mathbf{E} - \frac{\mu_0(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{H}}{\epsilon_r(\mathbf{r})} \right], \quad (2)$$

式中 $\epsilon(\mathbf{r})$ 为光子晶体的介电常量, $\epsilon_r(\mathbf{r})$ 为相对介电常量, 它们都是空间坐标的函数, $\boldsymbol{\Omega}$ 为角速度; 有关非惯性坐标系下光子晶体的理论计算的焦点问题就

是在给定角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ 情况下, 如何由已知的介电常量的分布求解上面的麦克斯韦方程组。

3 时域有限差分方法

用时域有限差分方法求解(1)式、(2)式的具体方法是: 将其在直角坐标系中展开成标量场分量的方程组, 然后用二阶精度的数值差商代替微商, 将连续的空间和时间问题离散化, 得到标量场分量的差分方程组。可以证明, 对于二维情形, 非惯性坐标系下依然可以分解为 TM 模(电场分量沿介质柱方向)和 TE 模(磁场分量沿介质柱方向)。

以二维光子晶体的 TM 模为例, 可以推导出它的差分方程为

$$\begin{aligned} E_z^{n+1}(i, j) = & E_z^n(i, j) + \frac{0.5\Omega y \mu_0 [H_y^{n+1/2}(i+1/2, j) + H_y^{n+1/2}(i-1/2, j)]}{\epsilon_r(i, j)} + \\ & \frac{0.5\Omega x \mu_0 [H_x^{n+1/2}(i, j+1/2) + H_x^{n+1/2}(i, j-1/2)]}{\epsilon_r(i, j)} - \\ & \frac{0.5\Omega y \mu_0 [H_y^{n-1/2}(i+1/2, j) + H_y^{n-1/2}(i-1/2, j)]}{\epsilon_r(i, j)} + \\ & \frac{0.5\Omega x \mu_0 [H_x^{n-1/2}(i, j+1/2) + H_x^{n-1/2}(i, j-1/2)]}{\epsilon_r(i, j)} + \\ & \frac{\Delta t}{\epsilon(i, j) \Delta x} [H_y^{n+1/2}(i+1/2, j) - H_y^{n+1/2}(i-1/2, j)] - \\ & \frac{\Delta t}{\epsilon(i, j) \Delta y} [H_x^{n+1/2}(i+1/2, j) - H_x^{n+1/2}(i, j-1/2)] - \\ & \frac{0.5\Omega y \Delta t}{\epsilon(i, j) \Delta x} [\epsilon(i+1, j) E_z^n(i+1, j) + \epsilon(i, j) E_z^n(i, j)] + \\ & \frac{0.5\Omega y \Delta t}{\epsilon(i, j) \Delta x} [\epsilon(i-1, j) E_z^n(i-1, j) + \epsilon(i, j) E_z^n(i, j)] - \\ & \frac{0.5\Omega x \Delta t}{\epsilon(i, j) \Delta y} [\epsilon(i, j+1) E_z^n(i, j+1) + \epsilon(i, j) E_z^n(i, j)] + \\ & \frac{0.5\Omega x \Delta t}{\epsilon(i, j) \Delta y} [\epsilon(i, j-1) E_z^n(i, j-1) + \epsilon(i, j) E_z^n(i, j)], \quad (3) \end{aligned}$$

$$H_x^{n+1/2}(i, j+1/2) = H_x^{n-1/2}(i, j+1/2) - \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta y} [E_z^n(i, j+1) - E_z^n(i, j)], \quad (4)$$

$$H_y^{n+1/2}(i+1/2, j) = H_y^{n-1/2}(i+1/2, j) - \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta x} [E_z^n(i+1, j) - E_z^n(i, j)], \quad (5)$$

式中 $E_z^{n+1}(i, j)$ 表示网格标号为 (i, j) 处第 $n+1$ 个时间步长时的电场分量的 E_z 值, 其他场分量类似。 Ω 为转动角速度, $\Delta t, \Delta x, \Delta y$ 为离散时间步长和空间步长, $\epsilon(i, j)$ 为网格标号为 (i, j) 处的有效介电常量, 它的值由面积投影的权重来确定。

4 激励源和边界条件的设置

用理想匹配层截断光子晶体边界。理想匹配层是一种假想的能产生电损耗和磁损耗的各向异性媒质, 当光入射到理想匹配层时, 在分界面上将不产生反射, 并且光在理想匹配层中传播时幅度将按指数衰减, 因此当幅度衰减到一定程度的时候, 可以用理

想导体来截断理想匹配层。将 E_x 分解为 E_{zx} 和 E_{zy} 分量满足如下方程：
两个分量，这样在理想匹配层媒质中 TM 模的电磁

$$\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (E_{zx} + \Omega y \mu_0 H_y) + \sigma_x (E_{zx} + \Omega y \mu_0 H_y) = \frac{\partial}{\partial x} (H_y - \Omega y \epsilon_0 (E_{zx} + E_{zy})), \quad (6)$$

$$\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (E_{zy} + \Omega x \mu_0 H_x) + \sigma_y (E_{zy} + \Omega x \mu_0 H_x) = -\frac{\partial}{\partial y} (H_x - \Omega x \epsilon_0 (E_{zx} + E_{zy})), \quad (7)$$

$$\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} + \sigma_y^* H_x = -\frac{\partial}{\partial y} (E_{zx} + E_{zy}), \quad (8)$$

$$\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} + \sigma_x^* H_y = \frac{\partial}{\partial x} (E_{zx} + E_{zy}), \quad (9)$$

以 E_{zx} 为例，由(6)式可以导出其指数差分方程如下：

$$\begin{aligned} E_{zx}^{n+1}(i, j) = & -0.5\Omega y \mu_0 [H_y^{n+1/2}(i+1/2, j) + H_y^{n+1/2}(i-1/2, j)] + \\ & \exp\left(-\frac{\sigma_x}{\epsilon_0} \Delta t\right) \{E_{zx}^n(i, j) + 0.5\Omega y \mu_0 [H_y^{n-1/2}(i+1/2, j) + H_y^{n-1/2}(i-1/2, j)]\} + \\ & \frac{1 - \exp[-(\sigma_x/\epsilon_0)\Delta t]}{\sigma_x \Delta x} [H_y^{n+1/2}(i+1/2, j) - H_y^{n+1/2}(i-1/2, j)] - \\ & \frac{0.5\Omega y \epsilon_0 \{1 - \exp[-(\sigma_x/\epsilon_0)\Delta t]\}}{\sigma_x \Delta x} [E_{zx}^n(i+1, j) + E_{zx}^n(i, j) + E_{zy}^n(i+1, j) + E_{zy}^n(i, j)] + \\ & \frac{0.05\Omega x \epsilon_0 \{1 - \exp[-(\sigma_x/\epsilon_0)\Delta t]\}}{\sigma_x \Delta x} [E_{zx}^n(i-1, j) + E_{zx}^n(i, j) + E_{zy}^n(i-1, j) + E_{zy}^n(i, j)], \end{aligned} \quad (10)$$

其他电磁分量的指数差分方程与上类似。

5 计算结果及分析

对于图 1 所对应的完整二维方型光子晶体：晶格常数为 a ，基质为空气，介质柱半径为 r ，介电常量为 ϵ ；取 $r=0.25a$ ， $a=10^{-6}$ m，介质柱的相对介电常量为 4.55。以 TM 模为研究对象，用平面波方法可以求得它的能带图如图 2 所示(图中 a 为晶格长度， c 为真空中的光速， ω 为光的角频率， π 为圆周率)，从图 2 中可以看出，TM 模完全禁带位于归一化频率 $[\omega a/(2\pi c)]$ 为 0.394 和 0.445 之间。所以我们考虑的光波频率主要在 0.394 到 0.445 这个范围。

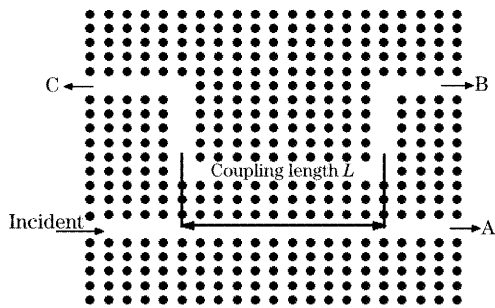


图 1 二维方型光子晶体耦合波导俯视图

Fig. 1 Top view of the 2D square-lattice photonic crystal with coupling waveguide

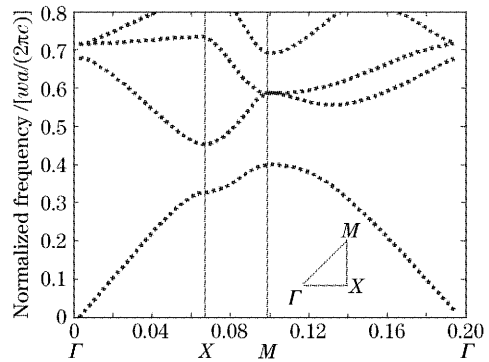


图 2 二维方型光子晶体的 TM 模带结构

Fig. 2 The photonic band structure for TM mode of the 2D square-lattice photonic crystal

选取中心归一化频率为 0.4 的窄带近似单频源沿图 1 中箭头方向和位置入射(无转动)，连续改变波导耦合长度，得到波导出口 A、B 和 C 处的透射率如图 3 所示(“data A”表示 A 口的透射率，其他类似)。从图中可以看出，对于不同的耦合长度，三个波导出口流出能量比例不同。

设计图 4 所示的光子晶体结构，它包含一个闭合环形腔(腔边长为 $49a$ 和 $39a$)和一个定向耦合器，根据图 3 的透射率随耦合长度的变化曲线，选取耦合器的耦合长度为 $43a$ ，这时从 A、B 和 C 口流出的能量的比例为：100.000:1.960:0.185，这样既保证了闭合环

行腔的 Q 值,又保证了必要的频率分辨率。

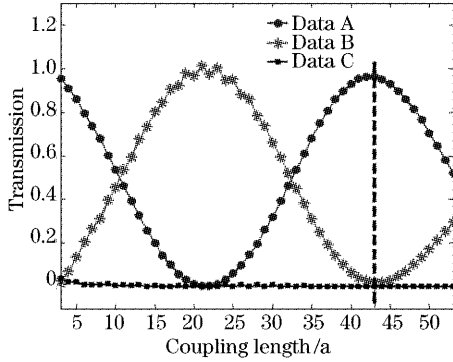


图 3 透射率随耦合长度的变化

Fig. 3 Transmission versus coupling length

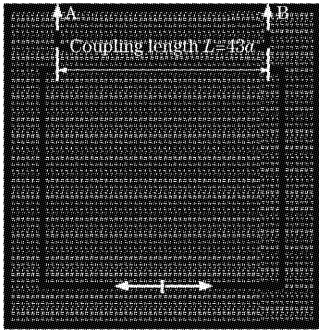


图 4 光子晶体结构俯视图(周期)

Fig. 4 Top view of photonic crystal structure

(62×56 periods)

设图 4 所示光子晶体结构的归一化转动角速度 ($\Omega a/c$) 为零(转轴垂直于光子晶体平面,转轴的位置不影响结果),将中心归一化频率为 0.4 的窄带偶极子源置于闭合环行腔所示位置。这样,沿顺时针传播的光波被耦合器耦合至波导出口 B,沿逆时针传播的光波被耦合器耦合至波导出口 A。某一时刻($Nt=9100$)的光场分布如图 5 所示。从光场图可以直观地看出,两束沿相反方向传播的光的光场分布具有完全对称性。从波导出口出来的光的频谱

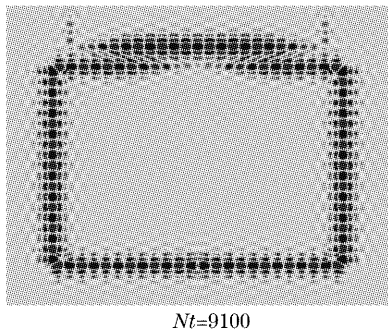


图 5 电场强度分布(无转动)

Fig. 5 Distribution of electric fields (no turn)

如图 6 所示(data A 为出口 A 处的频谱,data B 为出口 B 处的频谱)。由图中可以看出,被耦合出来的光的中心频率就是所加源的中心频率 0.40,并且两出口的光的频谱完全重合。

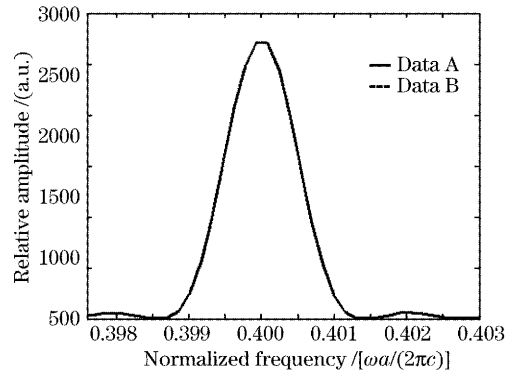


图 6 电场振幅-频率分布

Fig. 6 Amplitude of electric field versus normalized frequency

当图 4 所示光子晶体结构的归一化转动角速度为 -5×10^{-5} (顺时针为正)。某一时刻($Nt=9100$)的光场分布如图 7 所示。

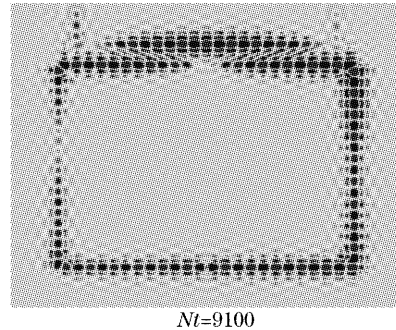


图 7 电场强度分布(有转动)

Fig. 7 Distribution of electric fields strength (turn)

从光场图可以直观地看出,两束沿相反方向传播的光的光场分布不具有对称性,这是由于光子晶体结构的转动角速度造成的。从波导出口出来的光的频谱

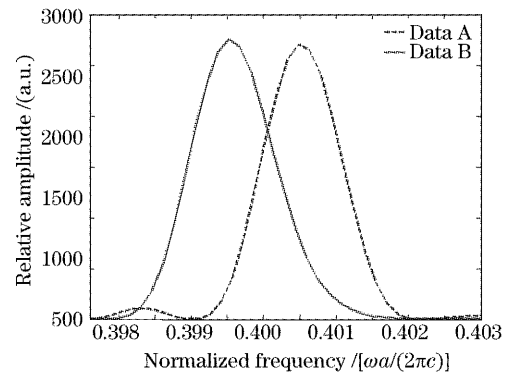


图 8 电场振幅-频率分布

Fig. 8 Amplitude of electric field versus normalized frequency

谱如图 8 所示。由图 8 可知,被耦合出来的光的中心频率偏离了所加源的中心频率 0.40,频率变成了 0.39955 和 0.40045,频差为 0.0009。此频差大小与角速度大小有关。

6 结 论

光子晶体转动时,顺时针逆时针方向传播的光有频差产生,此频差大小与光子晶体的转动角速度有关系,所以,知道了频差大小就能知道光子晶体结构的转动角速度。用光子晶体作为测量转动角速度的核心元件,具有易于集成,光运行的顺时针逆时针光子晶体波导回路的形状可以多样化,还有可以用集成的耦合器来代替对精度要求极高的激光陀螺中的反射镜等优点。

参 考 文 献

- Eli Yablonovitch. Inhibited spontaneous emission in solid-state physics and electronics[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1987, **58**(20): 2059~2062
- Sajeev John. Strong localization of photons in certain disordered dielectric superlattices[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1987, **58**(23): 2486~2489
- J. D. Joannopoulos, P. R. Villeneuve S. Fan. Photonic crystals: putting a new twist on light[J]. *Nature*, 1997, **386**(6621): 143~149
- I. Abram, G. Bourdon. Photonic-well microcavities for spontaneous emission control [J]. *Phys. Rev. (A)*, 1996, **54**(8): 3476~3479
- K. M. Ho, C. T. Chen, C. M. Soukoulis. Existence of a photonic gap in periodic dielectric structures[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1990, **65**(25): 3152~3155
- M. M. Sigalas, C. T. Chan, K. M. Ho *et al.*. Metallic photonic band-gap materials[J]. *Phys. Rev. (B)*, 1995, **52**(10): 11744~11751
- Jin Chongjun, Qin Bai, Yang Sen *et al.*. Two dimensional photonic band structure: triangular non-bravais lattice[J]. *Acta Optica Sinica*, 1997, **17**(4): 409~413 (in Chinese)
金崇君,秦 柏,杨 森等. 三角形复式晶格的光子带结构研究[J]. *光学学报*, 1997, **17**(4): 409~413
- Qin Bai, Jin Chongjun, Qin Ruhu *et al.*. Experimental study of photonic crystal - triangular lattices[J]. *Acta Optica Sinica*, 1999, **19**(2): 239~244 (in Chinese)
秦 柏,金崇君,秦汝虎等. 微波光子晶体的实验研究[J]. *光学学报*, 1999, **19**(2): 239~244
- John D. Joannopoulos, Robert D Meade, Joshua N. Winn. *Photonic Crystals: Molding the Flow of Light* [M]. Princeton: Princeton University Press, 1995
- Attiha Mekis, J. C. Chen, I. Kurland *et al.*. High transmission through sharp bends in photonic crystal waveguides[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1996, **77**(18): 3787~3790
- J. B. Pendry, A. MacKinnon. Calculation of photon dispersion relations[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1992, **69**(19): 2772~2775
- Ye Weimin, Yuan Xiaodong, Ji Jiarong *et al.*. Calculation of guided modes and leaky modes in photonic crystal slabs[J]. *Chin. Phys. Lett.*, 2004, **21**(8): 1545~1548
- K. S. Yee. Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media [J]. *IEEE Trans. Antennas Propagation*, 1966, **17**(5): 302~307
- Gerrit Mur. Absorbing boundary conditions for the finite-difference approximation of the time domain electromagnetic field equations [J]. *IEEE Trans. Electromagnetic Compatibility*, 1981, **23**(4): 377~382
- Zhu Zhihong, Ye Weiming, Yuan Xiaodong *et al.*. The characteristic properties of transmission research of 2-D photonic crystals using the finite-difference time-domain (FDTD) method [J]. *Acta Optica Sinica*, 2003, **23**(5): 511~514 (in Chinese)
朱志宏,叶卫民,袁晓东等. 用时域有限差分方法研究二维光子晶体传输特性[J]. *光学学报*, 2003, **23**(5): 511~514
- W. W. Chow, J. Gea-Banacloche, L. M. Pedrotti *et al.*. The ring laser gyro[J]. *Rev. Modern Phys.*, 1985, **57**(1): 61~104