

文章编号: 0253-2239(2005)01-109-6

# 高斯光束斜入射非平行法布里-珀罗干涉仪后的透射光强分布\*

刘木林 吴正茂 夏光琼\*\*

(西南师范大学物理学院, 重庆 400715)

**摘要:** 基于多光束干涉原理, 推导出了高斯光束斜入射非平行法布里-珀罗干涉仪射后的透射光强表达式, 在此基础上, 着重研究了高斯光束入射角的大小以及法布里-珀罗干涉仪两反射端面的不平行度对透射光强分布的影响。研究表明: 入射角的大小和干涉仪的不平行度对透射光的强度分布、峰值强度的大小和峰值强度的位置有很大的影响; 在入射高斯光束具有较小的腰斑半径或法布里-珀罗干涉仪的两端面的反射率较大时, 必须考虑高斯光束沿传输轴线的衍射效应; 楔角为负的非平行法布里-珀罗出射光斑的光强在“反跳”处急剧下降到零, 可利用这一特点对距离进行精确测量。

**关键词:** 物理光学; 透射光强分布; 多光束干涉; 非平行法布里-珀罗干涉仪; 斜入射; 高斯光束

中图分类号: O451 文献标识码: A

## Transmitting Characteristics of a Gaussian Beam Striking Obliquely on a Nonparallel Fabry-Pérot Interferometer

Liu Mulin Wu Zhengmao Xia Guangqiong

(School of Physics, Southwest Normal University, Chongqing 400715)

**Abstract:** Based on the multi beam interference principle, the intensity expression of the transmitted beam for a Gaussian beam striking obliquely through a nonparallel Fabry-Pérot interferometer has been derived. According to that, the influence of the nonparallelism in Fabry-Pérot interferometer mirrors alignment at a different tilted angle and waist radius on the transmission of a Gaussian beam has been investigated theoretically. The results show that the incident angle and the nonparallelism in Fabry-Pérot interferometer mirrors alignment have important effect on the intensity distribution, the peak intensity and the position of the peak intensity of the transmitted beam; the diffraction effect of the Gaussian beam must be considered when the waist radius of beam is small or the facet reflective index of the Fabry-Pérot interferometer mirror is large; if the wedge angle is negative, the intensity of the transmitted beam will reduce quickly to zero at the recoil position, which can be used to measure accurately the distance.

**Key words:** physical optics; transmitted beam intensity distribution; multi-beam interference; nonparallel Fabry-Pérot interferometer; oblique incidence; Gaussian beam

### 1 引 言

法布里-珀罗干涉仪(FPI)由于在光谱分析、激光谐振腔、传感技术以及光通信等方面的大量应用而受到人们的广泛关注<sup>[1~11]</sup>。由于法布里-珀罗干涉仪的应用常常和激光联系在一起, 而基模激光光束具有高斯分布, 因而人们对高斯光束经过法布

里-珀罗干涉仪后透射光束的分布进行了大量研究<sup>[4~10]</sup>。在众多研究工作中, 人们常常假定高斯光束正入射法布里-珀罗干涉仪或法布里-珀罗干涉仪的两镜面为严格平行<sup>[4~8]</sup>, 但在实际的应用过程中, 高斯光束正入射和法布里-珀罗干涉仪两反射端面严格平行难于实现, 因而有必要对高斯光束斜入射

\* 教育部科学技术重点项目(03140)和重庆市应用基础研究项目(2003-7983)资助课题。

作者简介: 刘木林(1971~), 男, 江西九江人, 硕士研究生, 主要从事激光与光纤通信方面的研究工作。

\*\* 通信联系人。E-mail: gqxia@swnu.edu.cn。

收稿日期: 2003-12-28; 收到修改稿日期: 2004-02-26

(本文的研究针对入射角小于  $1^\circ$ ) 非平行法布里-珀罗干涉仪后光束的情况进行研究。Lee 等<sup>[9,10]</sup> 在忽略高斯光束沿传播路径上的衍射对光斑强度分布影响的条件下, 采用传输函数的方法对此进行了研究。显然, 利用这种模型对于入射光斑较小, 法布里-珀罗干涉仪的端面反射系数  $r$  较大时是不合理的。本文利用多光束干涉原理, 从高斯光束的传播方程出发, 研究了在不同入射角下, 非平行法布里-珀罗干涉仪镜面的不平行度(由楔角  $\epsilon$  来标定, 考虑实际应用的情形, 本文楔角的取值小于  $0.01^\circ$ ) 对高斯光束的透射光分布的影响。

## 2 理论分析

在自由空间沿  $z$  轴传输的高斯光束可表示为<sup>[4]</sup>

$$E(x, y, z) = A \frac{w_0}{w(z)} \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{w^2(z)}\right] \times \exp\left\{-i\left[\beta z - \arctan\left(\frac{z}{f}\right)\right]\right\} \exp\left[-i\frac{\beta(x^2 + y^2)}{2R(z)}\right], \quad (1)$$

式中  $A$  为高斯光束束腰中心的振幅,  $w_0$  为高斯光束的腰斑半径, 及

$$\beta = 2\pi n/\lambda, \quad (2)$$

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + (z/f)^2}, \quad (3)$$

$$R(z) = z[1 + (f/z)^2] = z + f^2/z, \quad (4)$$

$$f = n\pi w_0^2/\lambda. \quad (5)$$

这里  $R(z)$  和  $w(z)$  分别为相对于束腰中心传输了距离  $z$  后高斯光束等相位面的曲率半径和光斑半径,  $n$  为非平行法布里-珀罗干涉仪两端面之间介质的折射率(本文假设两端面之间的介质为真空, 即  $n = 1$ ),  $\beta$  为传播常量,  $\lambda$  为光在真空中的波长。

图 1 为一振动方向垂直于  $xz$  平面的高斯光束以与非平行法布里-珀罗干涉仪的出射端面  $M_2$  的法线方向成  $\theta$  角射入非平行法布里-珀罗干涉仪的光路图(考虑到入射端面  $M_1$  的厚度非常小, 因此忽略了光线在通过  $M_1$  时由于折射引起的侧移), 图中  $r_1, r_2$  分别为端面  $M_1, M_2$  的反射系数,  $z_0$  为入射处的光斑中心到束腰中心的距离,  $L$  为非平行法布里-珀罗干涉仪从入射点到第一个出射点的距离, 由图 1 可知非平行法布里-珀罗干涉仪在该出射点处的腔长为  $L\cos(\theta - \epsilon)$ ,  $\epsilon$  为非平行法布里-珀罗干涉仪两反射端面所成的楔角。如楔角  $\epsilon$  是由入射面  $M_1$  绕楔形的顶点逆时针旋转到出射面  $M_2$ , 则楔角  $\epsilon$  为正值, 如图 1(a) 所示。反之楔角  $\epsilon$  为负值, 如图 1(b) 所示。以图中与  $z$  轴相垂直的平面  $M'$  为考察面,  $o'$  为入射高斯光束传输轴与考察面  $M'$  的交点,  $o''$  的距离为  $L_0$ 。如图所示, 入射高斯光束在非平行法布里-珀罗干涉仪中经过  $m(m = 0, 1, 2, \dots)$  次往返反射后的出射光束为第  $(m+1)$  次光束, 其传输轴与考察面  $M'$  的交点为  $x'_m$ (其中  $o'$  与  $x'_0$  点重合), 其场分布为  $E_m$ , 光强分布为  $E_m E_m^*$ 。

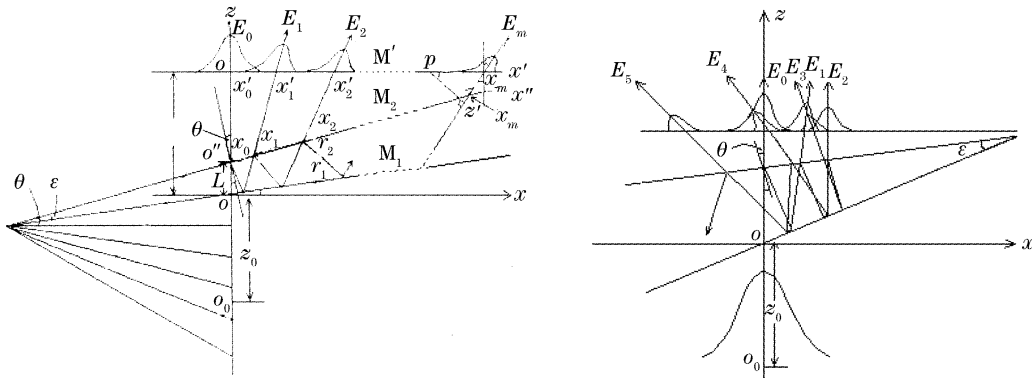


图 1 高斯光束斜入射非平行法布里-珀罗标准具的光路图。(a) 楔角  $\epsilon$  为正值, (b) 楔角  $\epsilon$  为负值  
Fig. 1 Schematic of a Gaussian beam striking obliquely on a nonparallel Fabry-Pérot interferometer.

(a) positive wedge angle  $\epsilon$ , (b) negative wedge angle  $\epsilon$

对于第  $(m+1)$  次出射的次光束, 如图 1(a) 所示, 其传输轴线相对入射光束的传输轴线偏转了一个  $2m\epsilon$  角, 其在  $M_2$  平面上的光斑中心沿  $o''x''$  方向相对于  $o''$  点移动的距离为  $\Delta x_m$ ,  $\Delta x_m$  为图 1 中点  $o''$

与点  $x_m$  之间的距离。光束相对于入射处多传输的距离为  $\Delta z_m$ ,  $\Delta z_m$  为图 1(a) 中光斑中心由入射点传输到  $x_m$  所经过的距离, 利用与文献[12]中类似的几何推导方法可得到  $\Delta x_m, \Delta z_m$ :

$$\Delta x_m = \frac{L \cos(\theta - \varepsilon) \cos \theta / \sin \varepsilon}{\cos(\theta + 2m\varepsilon)} - \frac{L \cos(\theta - \varepsilon)}{\sin \varepsilon}, \quad (6)$$

$$\Delta z_m = \frac{L \cos(\theta - \varepsilon) \cos \theta}{\sin \theta} \times [\tan(\theta + 2m\varepsilon) - \tan(\theta - \varepsilon)]. \quad (7)$$

而在考察面  $M'$  上, 第  $(m+1)$  次出射的次光束的光斑中心沿  $o'x'$  相对于  $o'$  点移动的距离为  $\Delta x'_m$ ,  $\Delta x'_m$  为图 1 中点  $o'$  到  $x'$  的距离, 光束的光斑中心相对于入射处  $o$  点多传输的距离为  $\Delta z'_m$ , 由 (6) 式、(7) 式) 可推得  $\Delta x'_m$ 、 $\Delta z'_m$ :

$$\Delta x'_m = \Delta x_m \cos \theta + (L_0 - L - \Delta x_m \sin \theta) \tan(2m\varepsilon), \quad (8)$$

$$\Delta z'_m = z_0 + \Delta z_m + (L_0 - L - \Delta x_m \sin \theta) / \cos(2m\varepsilon), \quad (9)$$

在图 1(a) 中, 考察  $o'x'$  上的任一点  $p$ ,  $p$  离  $o'$  的距离  $x'$ , 则  $p$  点到第  $(m+1)$  次出射的次光束的传输轴线的距离  $pz'$  为

$$X_m = |(x' - \Delta x'_m) \cos(2m\varepsilon)|, \quad (10)$$

相应的光束轴线传输到  $z'$  点的距离为

$$Z_m = \Delta x'_m + (x' - \Delta x'_m) \sin(2m\varepsilon), \quad (11)$$

由高斯光束的传输方程并考虑高斯光束在法布里-珀罗干涉仪中的来回传播, 可推导出第  $(m+1)$  次出射的次光束在  $p$  点所产生的光场:

$$E_m(X_m, y, Z_m) = K(r_1 r_2)^m \frac{w_0}{w(Z_m)} \exp\left[-\frac{X_m^2 + y^2}{w^2(Z_m)}\right] \times \exp\left\{-i\left[\beta Z_m - \arctan\left(\frac{Z_m}{f}\right)\right]\right\} \times \exp\left[-i\frac{\beta(X_m^2 + y^2)}{2R(Z_m)}\right], \quad (12)$$

其中

$$K = A \sqrt{(1 - r_1^2)(1 - r_2^2)}, \quad (13)$$

因此,  $p$  点总的透射光场为各次光束在该点所产生的光场之和, 即

$$E_t = \sum_{m=0}^N E_m(X_m, y, Z_m), \quad (14)$$

从图 1 中可以看出, 当  $2m\varepsilon + \theta \geq \pi/2$  时, 在腔中往返  $m$  次后的光束不再从端面  $M_2$  出射, 而从腔的侧面逃逸, 因此可得

$$N = \left\lfloor \frac{\pi}{4\varepsilon} - \frac{\theta}{2\varepsilon} \right\rfloor, \quad (15)$$

$\lfloor \rfloor$  表示取整, 则  $p$  点的光强为

$$I = E_t E_t^* = k^2 \sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^N (r_1 r_2)^{m+n} \frac{w_0^2}{w(Z_m) w(Z_n)} \exp\left[-\frac{X_m^2 + y^2}{w^2(Z_m)}\right] \exp\left[-\frac{X_n^2 + y^2}{w^2(Z_n)}\right] \times \cos\left\{\beta(Z_n - Z_m) + \arctan\left(\frac{Z_m}{f}\right) - \arctan\left(\frac{Z_n}{f}\right) + \frac{\beta}{2}\left[\frac{X_n + y^2}{R(Z_n)} - \frac{X_m^2 + y^2}{R(Z_m)}\right]\right\}, \quad (16)$$

以上的推导及所得各式对于楔角  $\varepsilon$  为负值时同样适用, 当  $\varepsilon$  为零时我们已在文献[4]中作了相关研究。由于  $p$  点为  $o'x'$  轴上的任意一点, 通过改变  $x'$  的大小, 即可得到  $M'$  面上任意点的光强, 从而可对其透射光束的分布进行研究。

当楔角为负值时, 如图 1(b) 所示, 随着高斯光束在非平行法布里-珀罗干涉仪腔内多次往返反射, 出射次光束出射点的位置先逐渐往  $o'x'$  轴的正方向偏, 在往返反射  $m$  次后, 当  $\theta + 2m\varepsilon \leq 0$  时, 这时次光束出射点的位置将反过来向  $o'x'$  轴的负方向偏移, 光束在此处出现“反跳”, 由 (8) 式可知反跳点离  $o'$  的距离  $x'_c$ :

$$x'_c = \Delta x_m \cos \theta + (L_0 - L - \Delta x_m \sin \theta) \tan(2m\varepsilon), \quad (17)$$

其中

$$m_c = \left\lfloor -\frac{\theta}{2\varepsilon} \right\rfloor. \quad (18)$$

我们知道当光束在平行法布里-珀罗干涉仪腔内传输满足共振条件时, 这时腔的透过率最大, 而对于楔形腔, 腔内往返次数不等的光束之间是无法严格满足共振条件的, 但如果邻近出射次光束之间在考察面上的相位接近  $2\pi$  的整数倍时, 非平行法布里-珀罗干涉仪的透射性最好, 出射光束的的峰值强度最强, 称此时光束在非平行的法布里-珀罗干涉仪腔内的传输满足准共振条件, 把满足此条件的频率称为准共振频率  $\omega_m$ , 光波的频率  $\omega$  偏离  $\omega_m$  的大小即为频率失谐, 用  $\Omega$  表示:

$$\Omega = \omega - \omega_m, \quad (19)$$

结合 (19) 式和 (16) 式即可讨论失谐大小对透射光强的影响。

### 3 结果与讨论

图 2 给出了不同腰斑大小的高斯光束经过具有不同楔角的非平行法布里-珀罗干涉仪后透射光强沿  $o'x'$  的分布图,这里,为了简化仅讨论一维分布的情形。其中图 2(a1)、图 2(a2)为大光斑入射高斯光束的透射光强分布图,入射光束腰斑处的半峰全宽(FWHM)  $D = 6 \text{ mm}$ ,它的腰斑半径大小  $\omega_0 = D/1.665$ ,图 2(b1)、图 2(b2)、图 2(c1)、图 2(c2)中入射光斑的半峰全宽为  $D = 1 \text{ mm}$ 。计算时所用其它的数据为: $\theta = 5 \text{ mrad}$ ,  $r_1^2 = r_2^2 = 0.99$ ,  $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ ,  $L = 9.998806 \text{ mm}$ ,  $L_0 = 0.2 \text{ m}$ ,  $z_0 = 0$ ,  $A = 1$ 。从图 2 中可看出,当楔角为正值时,图 2(a1)中出射光斑在  $o'$  稍偏右位置形成一主峰,在主峰计算中,为了使光束在非平行法布里-珀罗干涉仪中传输满足准共振条件, $L$  的大小作微小的适当调整。主峰的右侧形成了一系列的次峰,次峰的强度沿  $o'x'$  的正方向越来越小而使光斑右侧的强度逐渐平滑地下降。当楔角为负值时[图 2(a2)],在  $o'x'$  的零值附近形成的光强分布大体

与楔角为正时相同,但光斑右侧的强度随  $o'x'$  的正方向不是越来越平滑地下降,而是形成幅度越来越大的振荡,当振荡到某一值时,光强突然下降到零。从图 2(a2)中的放大部分看,在主峰的顶端也出现了振荡。由上文的理论分析可知,这是由于在楔角为负时,沿  $o'x'$  的出射位置先左偏后右偏的出射次光束之间在考察面上的相位复杂,互相干涉后的强度分布也极为复杂的缘故。如入射光斑变小为  $D = 1 \text{ mm}$ [其光强分布如图 2(b1)、图 2(b2)、图 2(c1)、图 2(c2)所示],当楔角为正时,光强分布为单峰结构,峰值的右侧不如左侧陡峭,而且光强逐渐衰减到零,比较图 2(b1)、图 2(c1)可知,出射光束的峰值强度随楔角的增大而减小;当楔角为负时[如图 2(b2)、图 2(c2)所示],楔角的绝对值越大,光强振荡得越剧烈,由图中的放大部分可见,出射光束有很多个次峰,“反跳”处的光强随楔角的绝对值增大而增大, $\epsilon$  达到一定值时,“反跳”处的光强为光斑峰值强度。

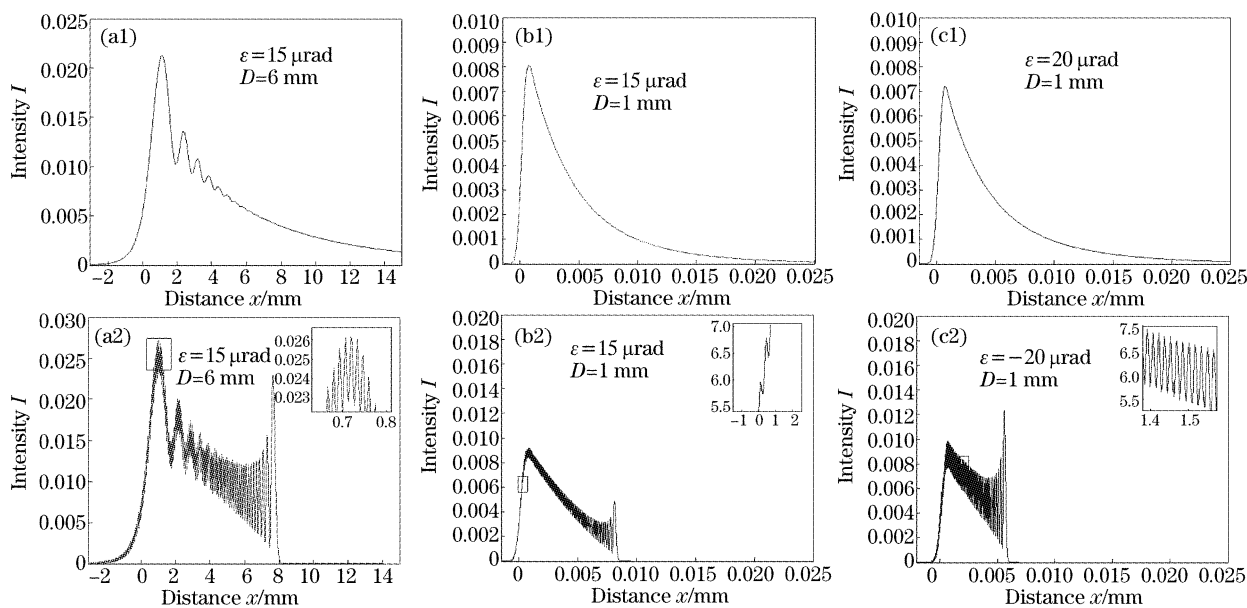


图 2 总的透射光强沿  $o'x'$  的分布图

Fig. 2 Intensity profile of the total transmitted beam along  $o'x'$  coordinate

利用文献[10]中给出的数据所模拟得到的透射光强的分布图与文献[10]中的结果图 7、图 8 相比较发现,当入射高斯光束的光斑半径较大时所得到的和文献[10]相同,但当入射高斯光束的腰斑半径较小时,我们所得到的结果与文献[10]的结果相差较大。这是由于在文献[10]中忽略了高斯光束沿传播路径上的衍射对光斑强度分布的影响,从而导致该文中理论结果与实验结果存在较大的偏差。

在图 3、图 4 中分别给出了透射光的峰值强度和峰值强度位置随楔角  $\epsilon$  的变化曲线。从图 3 中可以看出:随着楔角值的增大,峰值强度总体呈现下降的趋势。峰值强度先下降得较快,然后随着  $\epsilon$  的进一步增大,峰值强度的下降趋缓,最后曲线趋于平坦。在图 4 中,峰值强度位置的两条曲线都分为两段,它们的变化趋势大体相同。开始时,随着负楔角  $\epsilon$  的绝对值的减少,峰值沿  $o'x'$  的正方向偏离零点

越大,  $\epsilon$  达到某一值时, 峰值位置突然下跳到零附近, 且随之出现小幅波动, 然后缓慢向零值靠近。结合图 3、图 4 还可看出, 在相同的楔角  $\epsilon$  下,  $\theta$  角越大, 光斑的峰值强度越小, 峰值强度的位置在负楔角范围内所形成跳跃性变化却越大。从上文的分析可知, “反跳”处的光强较强是由于此处有较多相位差接近  $2\pi$  整数倍的次光束相长干涉所致, 且楔角的绝对值越大, “反跳”的位置出现得越早, “反跳”处的出射次光束在腔内往返的次数越少, 因此干涉后的强度也越大。而  $\theta$  角越小, 在  $\epsilon$  为负时, 使得“反跳”出现得更早; 在  $\epsilon$  为正时, 使次光束之间的重叠部分增大, 准共振作用加强。楔角  $\epsilon$  和入射角  $\theta$  角的共同作用导致图 3、图 4 所示的结果。

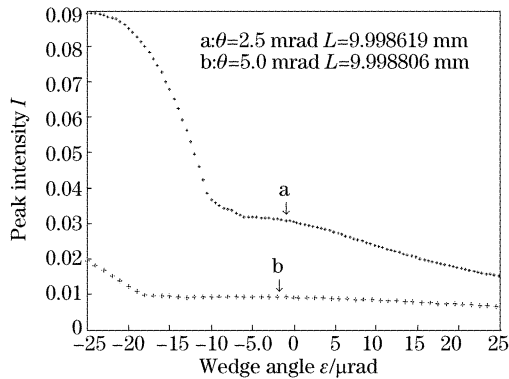


图 3 总的透射光束的峰值强度随楔角  $\epsilon$  的变化  
Fig. 3 Variation of the peak intensity of the total transmitted beam with the wedge angle  $\epsilon$

图 5 给出了峰值强度随对法布里-珀罗干涉仪腔

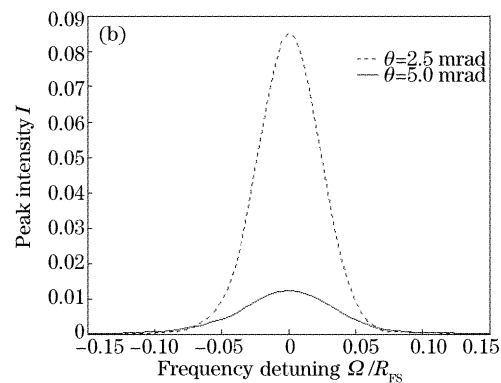
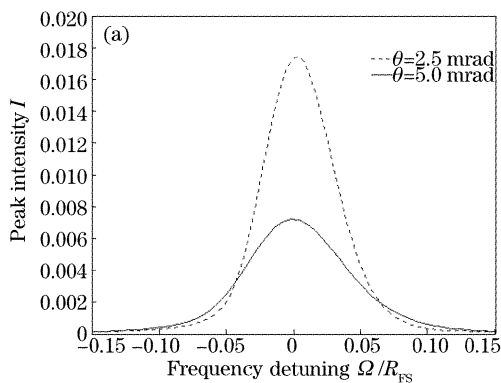


图 5 透射光束的峰值强度随频率失谐量的变化曲线。(a) 楔角  $\epsilon=20 \mu\text{rad}$ , (b) 楔角  $\epsilon=-20 \mu\text{rad}$

Fig. 5 Influence of frequency detuning on the peak intensity of the total transmission beam, where (a) wedge angle  $\epsilon=20 \mu\text{rad}$ , (b) wedge angle  $\epsilon=-20 \mu\text{rad}$

### 4 结 论

本文基于多光束干涉原理, 从高斯光束在自由空间的传输方程出发, 推导了高斯光束斜入射一非平行法布里-珀罗干涉仪后的透射光强表达式。数

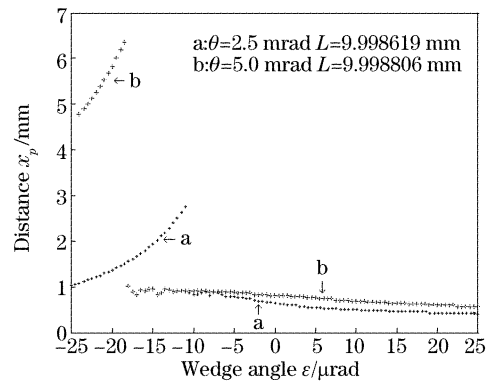


图 4 当  $\theta$  取不同值时, 峰值强度位置  $x_p$  随楔角  $\epsilon$  的变化曲线

Fig. 4 Influence of the wedge angle  $\epsilon$  at different angle  $\theta$  on  $x_p$  ( $x$  coordinate of the peak intensity of the total transmitted beam)

的自由光谱范围( $R_{FS}$ )进行归一化后的频率失谐的变化曲线。可看出峰值强度随频率失谐量的变化近似为高斯型, 在楔角的绝对值为相等的条件下, 楔角为负时出射光斑的峰值强度比楔角为正时的大; 当楔角一定时,  $\theta$  角越小, 出射光斑的峰值强度越大, 曲线的半极大宽度也越小(峰值强度随频率失谐量的变化更陡峭)。从图 5 中还可出, 透射光束的峰值强度随失谐量的增大而迅速下降, 因此, 为得到好的透射特性, 入射光束的频率与法布里-珀罗干涉仪腔的共振频率间的频率失谐量的绝对值必须小于  $R_{FS}/F^{[10]}$  [ $F$  为法布里-珀罗干涉仪腔的精细度,  $F = \pi \sqrt{R}/(1-R)$ ]。

值模拟了透射光束的分布, 讨论了系统参量对透射光斑的峰值强度、峰值强度位置的影响; 并把所得的结果与相关文献里的结果进行了比较, 结果表明: 在入射高斯光束具有较小的腰斑半径或法布里-珀罗

干涉仪的两端面的反射率较大时,必须考虑高斯光束沿传输轴线的衍射效应。另外,由于楔角为负的非平行法布里-珀罗干涉仪出射光斑的光强在“反跳”处急剧下降到零,可利用这一特点对距离进行精确测量。

### 参 考 文 献

- 1 Xia G Q, Wu Z M, Chen J G. Time delay of a chirped light pulse after transmitting a Fabry-Perot interferometer[J]. *Chin. Phys. Lett.*, 2002, **19**(2): 201~202
- 2 Yuan S, Man W N, Yu J *et al.*. Time delay Properties of a Fabry-Perot interferometer [J]. *Chin. Phys. Lett.*, 2001, **18**(3): 364~366
- 3 Wu Z M, Xia G Q, Chen J G. Computer model of time response of Fabry-Perot etalon filters to short optical pulses[J]. *J. Opt. Commun.*, 1997, **18**(1): 19~23
- 4 Wu Z M, Xia G Q, Zhou H Q *et al.*. Transmission of Gaussian beam after incidenting nonnormally on a Fabry-Perot etalon[J]. *Opt. & Laser Technol.*, 2003, **35**(1): 1~4
- 5 Wu Z M, Xia G Q. Transmission of Gaussian beam after incidenting nonnormally on a Fabry-Perot etalon: a nonresonant case[J]. *Opt. & Laser Technol.*, 2003, **35**(2): 123~126
- 6 Safia H A, Tahtamouni R A, Aljarayesh I A *et al.*. Transmission of a Gaussian beam through a Fabry-Perot interferometer [J]. *Appl. Opt.*, 1994, **33**(18): 3805~3811
- 7 Nichelatti E, Salvetti G. Spatial and spectral response of a Fabry-Perot interferometer illuminated by a Gaussian beam[J]. *Appl. Opt.*, 1995, **34**(22): 4703~4712
- 8 Moreno F, González F. Transmission of a Gaussian beam of low divergence through a high-finesse Fabry-Pérot device[J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1992, **9**(12): 2173~2175
- 9 Lee J Y, Hahn J W, Lee H W. Spatiospectral transmission of a plane-mirror Fabry-Pérot interferometer with nonuniform finite-size diffraction beam illuminations[J]. *J. Opt. Soc. Am. (A)*, 2002, **19**(5): 973~984
- 10 Lee J Y, Kim J W, Yoo Y S *et al.*. Spatial-domain cavity ringdown from a high-finesse plane Fabry-Perot cavity[J]. *J. Appl. Phys.*, 2002, **91**(2): 582~594
- 11 Saari H, Mannila R, Antila J *et al.*. Miniaturised gas sensor using a micromachined Fabry-Perot interferometer[J]. *Preparing for the Future*, 2000, **10**(3): 4~5
- 12 Borm M, Wolf E. *Principle of Optics* [M]. New York: Pergamon Press, 1989, 351~360