

文章编号: 0253-2239(2004)07-957-4

# 大芯径大数值孔径阶跃光纤传导模特征方程求解<sup>\*</sup>

杨 春 夏志超

(东南大学电子工程系, 南京 210096)

**摘要:** 导出了相邻阶第二类变型贝塞尔函数的比值在小宗量的逼近形式, 利用 Lentz-Thompson 方法计算相邻阶第一类贝塞尔函数的比值在小宗量的值, 计算精度为浮点数系统的最低有效位。从而解决了求解大芯径、大数值孔径阶跃光纤的特征方程时, 贝塞尔函数溢出双精度浮点数表示范围的问题。分别对多模石英光纤和大芯径大数值孔径的聚合物光纤的传导模特征方程进行了求解, 石英光纤的传导模特征值计算结果与 Optiwave 公司的软件一致; 对于聚合物光纤, 算法给出了所有模式的计算结果, 其中模式角向序数小于 70 的计算结果与 Optiwave 公司的软件一致, 而 Optiwave 公司的软件不能计算角向序数大于 70 的模式。

**关键词:** 光纤通信技术; 聚合物光纤; 特征方程; 阶跃折射率; 大芯径; 大数值孔径

中图分类号: TN929.11 文献标识码: A

## Propagation Constant Solution for Large Core and High Numerical Aperture Step-Index Multimode Optical Fiber

Yang Chun Xia Zhichao

(Department of Electronic Engineering, Southeast University, Nanjing 210096)

(Received 12 May 2003; revised 28 September 2003)

**Abstract:** Overflow of Bessel functions in numerical solution of characteristic equation with double-precision for large-core and high numerical aperture optical fibers is circumvented by evaluating the ratio of the  $n$ th order to the  $(n-1)$ th order modified Bessel functions of the second kind using a small argument approximation and by evaluating the ratio of  $n$ th order to the  $(n-1)$ th order Bessel function of the first kind using Lentz-Thompson method. The evaluation error of the two methods is not larger than the minimum value of the floating-point system used. Characteristic equations of multimode silica optical fiber and large core polymer optical fiber are solved using this algorithm and compared with commercial optical software (IFO-Grating) from Optiwave Corp. The results for the silica optical fiber are good agreement with the commercial software. Authors' algorithm has solved all guided modes for the large core optical fiber and results for the guided modes with angular mode number smaller than 70 are same to that of IFO-Grating, but IFO-Grating failed to solve the eigenvalue for guided modes with angular mode number larger than 70.

**Key words:** optical fiber communication technology; polymer optical fiber; characteristic equation; step index; large core; high numerical aperture

## 1 引 言

聚合物光纤的芯径和数值孔径很大, 便于连接,

作为短距离网络的一种潜在的优良传输介质正受到广泛的关注和研究<sup>[1~5]</sup>。聚合物光纤的传输特性与石英光纤显著不同, 利用数值方法可以研究模式耦合和差分模式损耗对聚合物光纤带宽的影响, 为此需要求解聚合物光纤的传导模特征方程, 从而得到传导模及其传播常数。

由于聚合物光纤的芯径和数值孔径较大, 传导

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(60007005)、江苏省创新人才(BK2003406)资助课题。

E-mail: yangchun@seu.edu.cn

收稿日期: 2003-05-12; 收到修改稿日期: 2003-09-28

模数量在  $1 \times 10^6$  以上,角向模式序数超过  $1 \times 10^3$ ,求解特征方程时,出现第一类贝塞尔函数和变型贝塞尔函数在大阶数、小宗量时超出双精度浮点数表示范围( $1.98 \times 10^{-323} \sim 1.7 \times 10^{308}$ )的情况。现有的商用光纤软件(例如目前使用较多的美国 Optiwave 公司的软件)在角向模式序数超过 70 时就不能给出正确的模式计算结果,只能用于模式数相对较少的光纤(例如多模石英光纤)的传导模计算。

本文研究大芯径、大数值孔径阶跃多模光纤的传导模本征方程的求解。导出相邻阶变型贝塞尔函数的比值在小宗量的逼近形式,利用 Lentz-Thompson 方法计算相邻阶第一类贝塞尔函数的比值在小宗量的值,并以上述方法为基础建立完整的

光纤本征方程求解算法。分别对芯径为  $62.5 \mu\text{m}$  的石英光纤和芯径为  $980 \mu\text{m}$  的聚合物光纤进行了计算,计算结果与 Optiwave 公司的软件进行了对比。

## 2 传导模本征方程的数值解法

阶跃光纤的折射率分布为

$$n(r) = \begin{cases} n_1 & r \leq a \\ n_2 & r > a \end{cases}$$

其中  $a$  为光纤的半径,  $n_1$ 、 $n_2$  分别为纤芯和包层的折射率。

阶跃光纤的传导模本征方程如下式<sup>[6]</sup>所示:

$$\left[ \frac{J'_\nu(U)}{U J_\nu(U)} + \frac{K'_\nu(W)}{W K_\nu(W)} \right] \left[ \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \frac{J'_\nu(U)}{U J_\nu(U)} + \frac{K'_\nu(W)}{W K_\nu(W)} \right] = \nu^2 \left( \frac{1}{U^2} + \frac{1}{W^2} \right) \left( \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \frac{1}{U^2} + \frac{1}{W^2} \right), \quad (1)$$

式中  $\nu$  为角向模式序数,  $\epsilon_1$  和  $\epsilon_2$  分别为纤芯和包层的介电常量,  $J_\nu(U)$  为  $\nu$  阶第一类贝塞尔函数,  $K_\nu$  为  $\nu$  阶第二类变型贝塞耳函数。真空波数  $k = \omega/c_0$ ,  $c_0$  为真空光速,  $\beta$  为模式传播常数。

$$U^2 = (k^2 n_1^2 - \beta^2) a^2, \quad (2)$$

$$W^2 = (\beta^2 - k^2 n_2^2) a^2, \quad (3)$$

$$V^2 = U^2 + W^2, \quad (4)$$

为便于数值求解, HE 模的本征方程化为<sup>[7]</sup>

$$\frac{J_{\nu-1}(U)}{J_\nu(U)} = -\frac{\epsilon_1 U K'_\nu}{\epsilon_2 W K_\nu} + U \left\{ \frac{\nu}{U^2} - \left[ \left( \frac{-\Delta \epsilon K'_\nu}{\epsilon_1 W K_\nu} \right)^2 + \nu^2 \left( \frac{1}{U^2} + \frac{1}{W^2} \right) \left( \frac{1}{U^2} + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \frac{1}{W^2} \right) \right]^{1/2} \right\}, \quad (5)$$

EH 模的本征方程为

$$\frac{J_{\nu+1}(U)}{J_\nu(U)} = \frac{\epsilon_1 U K'_\nu}{\epsilon_2 W K_\nu} + U \left\{ \frac{\nu}{U^2} - \left[ \left( \frac{-\Delta \epsilon K'_\nu}{\epsilon_1 W K_\nu} \right)^2 + \nu^2 \left( \frac{1}{U^2} + \frac{1}{W^2} \right) \left( \frac{1}{U^2} + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \frac{1}{W^2} \right) \right]^{1/2} \right\}. \quad (6)$$

图 1 为光纤传导模数值求解的示意图,曲线 A 为(5)式左边,曲线 B 为(5)式右边,曲线 C 为(6)式左边,曲线 D 为(6)式右边。在  $U$  值属于  $(0, V)$  的

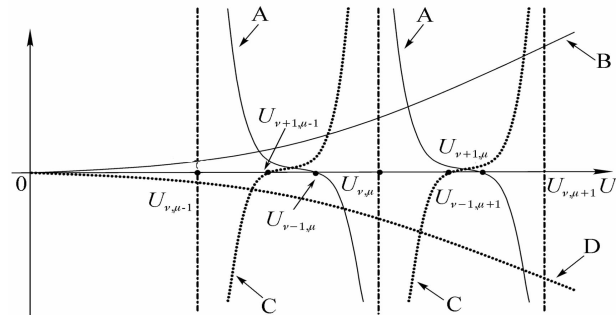


Fig. 1 Illustration of eigenvalue equation solution. Solid line for HE modes and dotted line for EH modes. Curve A is the left side of (5). Curve B is the right side of (5). Curve C is the left side of (6). Curve D is the right side of (6)

范围内,曲线 A 和曲线 B 的第  $\mu$  个交点对应于(5)式的根,即  $\text{HE}_{\nu, \mu}$  模;曲线 C 和曲线 D 的第  $\mu$  个交点对应于(6)式的根,即  $\text{EH}_{\nu, \mu}$  模。 $\nu$  为角向模式序数,  $\nu=0$  时解出 TE 和 TM 模,  $\nu \geq 1$  时解出混合模 HE 和 EH。 $\mu$  为径向模式序数。

对于大芯径、大数值孔径的光纤,传导模的数量多达几十万至数百万,要求精确解出所有的模式并且不能多根也不能漏根。因此需要确定每个根的范围,然后在单根区间内用对分法快速求根。对于 HE 模式,第  $\mu$  个根在  $J_\nu$  的第  $\mu-1$  个零点  $U_{\nu-1, \mu-1}$  与  $J_{\nu-1}$  的第  $\mu$  个零点  $U_{\nu-1, \mu}$  之间。对于 EH 模式,第  $\mu$  个根在  $J_\nu$  的第  $\mu$  个零点  $U_{\nu, \mu}$  与  $J_{\nu+1}$  的第  $\mu$  个零点  $U_{\nu+1, \mu}$  之间。 $J_\nu(U)$  求零点的难题经过 30 多年的研究已有过很多论文讨论,其中 Lentz-Thompson 方法<sup>[8-10]</sup>可以快速得到给定宗量附近的零点。本文利用 Lentz-Thompson 方法,得到第一个零点后,利

用第一类贝塞尔函数零点的不等式  $(U_{\nu,\mu+1} - U_{\nu,\mu} > \pi)^{[10]}$ , 将  $U = U_{\nu,\mu} + \pi$  作为初始值去迭代计算下一个零点  $U_{\nu,\mu+1}$ , 反复下去直至解出  $(0, V)$  范围内所有的零点。这样就可以确定  $(0, V)$  范围内特征方程的所有单根区间, 从而不会漏根。另外, 光纤的传导模必须满足条件  $kn_2 < \beta < kn_1$ , 当解出的模式传播常数不满足此条件时必须舍去, 以保证解不会多根。

### 3 相邻阶贝塞尔函数比值的计算

用(5)式、(6)式求解传导模时, 需要计算相邻阶第一类贝塞尔函数的比值以及相邻阶第二类变型贝塞尔函数的比值。对常用的阶跃聚合物光纤(半径  $\alpha = 490 \mu\text{m}$ , 数值孔径  $NA = 0.5$ , 波长  $\lambda = 650 \text{ nm}$ ),

模式角向序数  $\nu$  的范围约为  $U$  值的范围  $(0, 2380)$ 。在大部分宗量范围内, 贝塞尔函数值超出了双精度浮点数的表示范围  $(1.98 \times 10^{-323} \sim 1.7 \times 10^{308})$ , 因而不能采用先分别计算相邻阶贝塞尔函数的值, 再相除求得比值的方法。因此必须对特征方程中相邻阶第一类贝塞尔函数的比值以及相邻阶第二类变型贝塞尔函数的比值作整体逼近。

#### 3.1 $K_{\nu+1}/K_\nu$ 的计算

第二类变型贝塞尔函数  $K_\nu(W)$  在阶数  $\nu$  较大时, 在小宗量的值会超出  $1.7 \times 10^{308}$  而上溢, 在大宗量的值会小于  $1.98 \times 10^{-323}$  而下溢。为了计算  $K_{\nu+1}/K_\nu$ , 利用第二类变型贝塞尔函数的递推公式  $K_{\nu-1} - K_{\nu+1} = -(2\nu/W)K_\nu$ , 得到连分式:

$$\frac{K_{\nu+1}(W)}{K_\nu(W)} = \frac{2\nu}{W} + \frac{1}{\frac{2(\nu-1)}{W} + \frac{1}{\frac{2(\nu-2)}{W} + \dots + \frac{1}{\frac{2}{W} + \frac{K_0(W)}{K_1(W)}}}}, \quad (7)$$

因此  $K_{\nu+1}/K_\nu$  的溢出问题简化为  $K_0/K_1$  的溢出问题。 $K_0/K_1$  的计算分为三个区间进行:

1)  $10^{-304} < W < 697$ ,  $K_0$  和  $K_1$  均不溢出。 $K_0$  和  $K_1$  分别用双精度程序进行计算后求比值  $K_0/K_1$ 。

2)  $W < 10^{-304}$ ,  $K_1$  上溢。在此区间内,  $\frac{d}{dW} \left( \frac{K_0/K_1}{2/W} \right) > 0$ , 因此  $\frac{K_0/K_1}{2/W}$  是单调增函数, 又因为  $W = 10^{-304}$  时  $\frac{K_0/K_1}{2/W} \ll 10^{-304}$ , 从而得到  $W < 10^{-304}$  时  $\frac{K_0/K_1}{2/W} \ll 10^{-304}$ 。因此(7)式中忽略  $K_0/K_1$

而产生的计算误差非常小, 仅可能对浮点数的最低有效位产生影响。

3)  $W > 697$ ,  $K_0$  下溢。此时可以计算带指数的贝塞尔函数(Exponential Scaled Bessel Function)  $e^W K_\nu(W)$ , 在双精度浮点数的范围内,  $e^W K_0(W)$  和  $e^W K_1(W)$  都不溢出。 $e^W K_0(W)$  和  $e^W K_1(W)$  分别用双精度程序进行计算后求比值  $K_0/K_1$ 。

得到  $K_0/K_1$  计算值后, 代入(7)式即可得  $K_{\nu+1}/K_\nu$  的计算值, 计算误差为浮点数系统的最低有效位。

#### 3.2 $J_{\nu+1}(U)/J_\nu(U)$ 的计算

对第一类贝塞尔函数  $J_\nu(U)$  在阶数  $\nu$  较大而宗量  $U$  较小时, 函数小于  $1.98 \times 10^{-323}$  而下溢出, 因此要对  $J_{\nu+1}(U)/J_\nu(U)$  进行数值逼近, 这可以利用 Modified Lentz 或 Lentz-Thompson 方法计算下面

的连分式得到<sup>[9]</sup>

$$J_\nu(U)/J_{\nu-1}(U) = \frac{1}{2\nu/U - \frac{1}{2(\nu+1)/U - \frac{1}{2(\nu+2)/U - \dots}}}, \quad (8)$$

(8)式可以用迭代算法实现, 当宗量  $U < |\nu|$  时收敛很快, 可以迅速迭代到指定精度。

### 4 光纤传导模计算

利用以上算法分别对石英多模光纤(芯径  $62.5 \mu\text{m}$ ,  $n_1 = 1.46$ ,  $NA = 0.2$ , 波长  $\lambda = 1300 \text{ nm}$ )和聚合物光纤(芯径  $980 \mu\text{m}$ ,  $n_1 = 1.492$ ,  $NA = 0.5$ , 波长  $\lambda = 650 \text{ nm}$ )进行了特征方程求解。模式传播常数换算成有效折射率  $n_e = \beta/k$ , 与 Optiwave Corporation 公司的软件 IFO-Grating 4.0 的计算结果进行了对比。将有效折射率从大到小排列后, 在表 1 中列出了其中最大的 10 个有效折射率和最小的 10 个有效折射率。最小的有效折射率对应于临近截止的模式, 它决定了所有传导模的总数和模式序号。对比石英光纤的 IFO-Grating 的计算结果与本论文的计算结果, 发现所有传导模的模式序号是一致的, IFO-Grating 的模式有效折射率的计算结果是本论文计算结果的四舍五入, 这表明本论文

的算法是精确的。对比大芯径、大数值孔径聚合物光纤的计算结果,发现 IFO-Grating 对于模式角向序数大于 70 的模式不能给出正确的计算结果(计算结果皆为 1.492),而本论文的算法能够精确地计算

所有的模式。综合两种光纤的计算结果,表明本论文的算法能够精确地求解大芯径、大数值孔径阶跃光纤的传导模特征方程。

Table 1 Numerical eigenvalue solutions of two optical fiber samples compared with IFO-Grating 4.0

Silica fiber, core diameter $62.5 \mu\text{m}$ , $n_1 = 1.46$ , $NA = 0.2$ , $\lambda = 1300 \text{ nm}$				PMMA fiber, core diameter $980 \mu\text{m}$ , $n_1 = 1.492$ , $NA = 0.5$ , $\lambda = 650 \text{ nm}$			
Mode		This paper	IFO-grating	Mode		This paper	IFO-grating
10 Largest $n_c$	HE(1,1)	1.459918609986935	1.4599186	10 largest $n_c$	HE(1,1)	1.491999913682853	1.4919999
	TE(0,1)	1.459793507593288	1.4597935		TE(0,1)	1.491999780874107	1.4919998
	HE(2,1)	1.459793378006813	1.4597934		HE(2,1)	1.491999780863713	1.4919998
	TM(0,1)	1.459793264841554	1.4597933		TM(0,1)	1.491999780853336	1.4919998
	EH(1,1)	1.459628864389815	1.4596289		EH(1,1)	1.491999606344710	1.4919996
	HE(3,1)	1.459628833990232	1.4596288		HE(3,1)	1.491999606344672	1.4919996
	HE(1,2)	1.459571230297439	1.4595712		HE(1,2)	1.491999545200032	1.4919995
	EH(2,1)	1.459427224097663	1.4594272		EH(2,1)	1.491999392434140	1.4919994
	HE(4,1)	1.459427154814974	1.4594272		HE(4,1)	1.491999392434061	1.4919994
	TE(0,2)	1.459307928908112	1.4593079		TE(0,2)	1.491999265422858	1.4919993
10 smallest $n_c$	EH(8,6)	1.446777052653189	1.4467771	10 smallest $n_c$	HE(678,447)	1.405727671421649	1.492 for all modes with $\nu > 70$
	HE(10,6)	1.446772497362891	1.4467725		HE(1443,178)	1.405727257473781	
	EH(24,1)	1.446670126717240	1.4466701		HE(750,418)	1.405727128880894	
	HE(26,1)	1.446656816965111	1.4466568		HE(1273,230)	1.405727128038742	
	EH(20,2)	1.446450213204982	1.4466502		HE(147,683)	1.405727087670240	
	HE(22,2)	1.446438894845878	1.4464389		HE(2043,37)	1.405727052959524	
	EH(6,7)	1.446373763858685	1.4463738		HE(1628,127)	1.405726508172424	
	HE(8,7)	1.446370266377960	1.4463703		HE(720,430)	1.405726000832921	
	EH(11,5)	1.446260444570683	1.4462604		HE(210,653)	1.405725891797746	
	HE(13,5)	1.446254097419707	1.4462541		HE(1099,288)	1.405725889484990	

结论 用数值方法求解大芯径、大数值孔径阶跃光纤的传导模特征方程,计算模式的传播常量。利用第一类贝塞尔函数的零点来确定单根的区间,然后用对分法进行快速求解。用连分式对相邻阶第二类变型贝塞尔函数的比值和相邻阶第一类贝塞尔函数的比值在小宗量做了高精度的逼近,解决了溢出问题,从而能够对大芯径、大数值孔径光纤的传导模特征方程进行求解。本论文算法的程序简单,运行速度快,计算误差为浮点数系统的最低有效位。

### 参 考 文 献

- 1 Yang Chun, Sun Xiaohan, Zhang Mingde *et al.*. *High Technol. Lett.* (高技术通讯), 2000, **10**(2): 107~110 (in Chinese)
- 2 Yang Chun, Sun Xiaohan, Wang Yunming *et al.*.  $1 \times 7$  cylindrical mixing-rod plastic optical fiber coupler. *Acta Optica Sinica* (光学学报), 2001, **21**(9): 1116~1122 (in Chinese)
- 3 van den Boom H P A, Li W, van Bennekom P K *et al.*. High-capacity transmission over polymer optical fiber. *IEEE J. Selected Topics in Quant. Electron.*, 2001, **7**(3): 461~470

- 4 Li Gubo, Ge Wenping, Hao Sujun *et al.*. Adjustable coupling effect of plastic fiber dual taper and semisphere cavity. *Acta Optica Sinica* (光学学报), 2003, **23**(8): 941~944 (in Chinese)
- 5 Ge Wenping, Li Zhonghui, Yin Zongmin *et al.*. A novel  $1 \times 4$  plastic optical fiber power coupler. *Acta Optica Sinica* (光学学报), 2003, **23**(8): 961~963 (in Chinese)
- 6 Okoshi T, Kikuchi K. *Optical Fibers*. Beijing: Posts and Telecom Press, Chinese Edition, 1989. 72~73
- 7 Zhu Shiguo, Fu Kexiang. *Theoretical and Experimental Research on Optical Fibers*. Chengdu: Sichuan University Press, 1992. 68~69; Kapany N S, Burke J J. *Optical Waveguides*. New York and London: Academic Press, 1972
- 8 Segura J, Gil A. ELF and GNOME: Two tiny codes to evaluate the real zeros of the Bessel functions of the first kind for real orders. *Computer Physics Communications*, 1999, **117**(3): 250~262
- 9 Javier Segura. A global newton method for the zeros of cylinder functions. *Numerical Algorithms*, 1998, **18**(3~4): 259~276
- 10 Lentz W J. Generating Bessel functions in Mie scattering calculations using continued fractions. *Appl. Opt.*, 1976, **15**(3): 668~671