

文章编号: 0253-2239(2004)05-705-4

## 横向可分原子激光的传输\*

殷建玲<sup>1,2</sup> 刘承宜<sup>2,3\*\*</sup> 刘江<sup>1</sup> 杨友源<sup>3</sup> 廖常俊<sup>1</sup> 范广涵<sup>1</sup>

{ 1 华南师范大学信息光电子科技学院, 广州 510631  
2 华南师范大学激光运动医学实验室, 广州 510631  
3 香港教育学院科学系, 香港

**摘要:** 本文在含时量子系统传播子的 ABCD 形式理论的基础上, 进一步讨论原子激光这种品质因子不守恒系统的传输。利用准连续的原子激光在传输过程中所满足薛定谔方程, 并引入某一方向的束宽、发散角、曲率半径和品质因子等光束传输参量来表征横向势能可分且各横向品质因子守恒的原子激光的传输。如果某一方向上品质因子也守恒, 就可以通过解析不同过程品质因子守恒的充要方程, 找到原子激光在各过程中 ABCD 形式的传播子。本文讨论原子激光在从玻色-爱因斯坦凝聚体(BEC)中穿出过程, 在磁化捕获器打开情况下的传输, 以及在自由空间的传输这三个满足横向势能可分且各横向品质因子守恒条件的过程中 ABCD 形式的传播子。本文还将所运用的方法和所得结果与 Yann 等人的方法和结果进行了比较。

**关键词:** 原子激光; 传输; 光束传输参量; 品质因子守恒; ABCD 形式的传播子

中图分类号: TN24 文献标识码: A

## Propagation of the Transverse Separable Atom Laser Beam

Yin Jianling<sup>1,2</sup> Liu Timon Chengyi<sup>2,3</sup> Liu Jiang<sup>1</sup> Yeung Yauyuen<sup>3</sup>  
Liao Changjun<sup>1</sup> Fan Guanghan<sup>1</sup>

{ 1 School for Information and Optoelectronic Science and Engineering, South China  
Normal University, Guangzhou 510631  
2 Laboratory of Laser Sports Medicine, South China Normal University, Guangzhou, 510631  
3 Department of Science, Hong Kong Institute of Education, Hong Kong

(Received 10 March 2003; revised 21 May 2003)

**Abstract:** The propagation of the atom laser beam with non-conservation quality factor is discussed based on the theory of ABCD formulation of propagation of a time-dependent quantum system. The equation for the quasi-continuous atom laser beam wave-function is given by Schrodinger equation, the beam width, divergence curvature radius and quality factor were introduced to represent the atom laser beam whose transverse potential could be separated. For the conservative quality factor system in some direction, the propagator of ABCD formulation can be got. The propagation of the atom laser beam is discussed during the interacting with Bose-Einstein condensation (BEC), the propagation with the trap on and the free propagation with the trap off whose potential can be separated by  $x$  and  $y$ . Authors' methods and results are compared with Yann's.

**Key words:** atom laser beam; propagation; beam propagation parameters; conservative quality factor; propagator of ABCD formulation

\* 国家科技部 2000 年重点攻关计划(00-068)、广东省自然科学基金团队项目(20003061)、广东省“千百十工程”优秀人才培养基金(Q02087)和香港求是基金(Croucher Foundation)资助课题。

\*\* 通信联系人。E-mail: liutcy@scnu.edu.cn

收稿日期: 2003-03-10; 收到修改稿日期: 2003-05-21

## 1 引言

原子激光<sup>[1~3]</sup>自产生以来, 一直是国内外关注的热点, 有关这方面的研究和报道也很多<sup>[4~8]</sup>。对于原子激光传输的研究一般是对一组耦合的 GP (Gross-Pitaevskii) 方程进行数值求解<sup>[3]</sup>, 但这种方法十分复杂, 人们希望找到能在理论上对它进行合

理描述且推导简单的方法。Busch 等<sup>[9]</sup>利用路径积分的方法,得到关联原子激光从玻色-爱因斯坦凝聚中(BEC)中穿出前后初、末态波函数的传播子。Yann 等<sup>[10]</sup>把各个势能项看作是可以利用 ABCD 矩阵来表示的光学系统,利用经典力学的方法得到光线的变换矩阵,从而很好地解释初、末态的束宽之间的关系。Liu 等<sup>[11]</sup>用可以表达成 ABCD 形式的传播子来关联某些含时量子系统初、末状态的波函数。本文在 Liu 等<sup>[11]</sup>工作的基础上,进一步引入某一方向上的束宽、发散角、曲率半径和品质因子这些光束传输参量来研究原子激光这种不对称系统的传输,在不考虑原子激光束内部原子间相互作用的条件下,讨论原子激光从玻色-爱因斯坦凝聚穿出,在磁化捕获器打开情况下的传输,以及在自由空间传输的这些势能满足  $x, y$  分量相互独立且各横向品质因子守恒条件的传输过程,并得到相应的 ABCD 形式的传播子。最后,还与 Yann 等<sup>[10]</sup>的方法进行比较。

## 2 基本理论

本文讨论可以连续输出 0.1 s 的准连续原子激光<sup>[3]</sup>:被不对称磁化捕获器  $\omega_{\perp} = \omega_x = \omega_z, \omega_y = \lambda\omega_{\perp}$  捕获的玻色-爱因斯坦凝聚物,如果被连续射频(rf)辐射,其中的原子就会从束缚态的磁次能级跃迁到非束缚态的磁次能级并在重力作用下加速下落,形成原子激光。

原子激光在传输过程中满足薛定谔方程<sup>[3]</sup>

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(x, y, z, t)\rangle = \mathbf{H}' |\psi(x, y, z, t)\rangle, \quad (1)$$

$$\mathbf{H}' = \mathbf{H}_0 + \mathbf{V}, \quad \mathbf{H}_0 = \mathbf{p}^2/2m,$$

其中  $m$  为原子的质量。在空间坐标表象中,动量  $\mathbf{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}$ ,  $\mathbf{r}$  是波束的位置。由于原子激光具有良好的方向性并且是准连续的,故波函数的横向和纵向可以分离开<sup>[10,12]</sup>

$$\psi(x, y, z, t) = \phi(x, y, z, t) \exp\left[\frac{i}{\hbar}\sigma(z, t)\right],$$

本文讨论势能也可以分离的情况,即

$$\mathbf{V}(x, y, z, t) = \mathbf{V}_d(x=0, y=0, z, t) + \mathbf{V}_{\text{trans}}(x, y, z, t).$$

这样,(1)式在傍轴近似下可以写为

$$-\frac{\partial}{\partial t}\sigma(z, t) = -\frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2}\sigma(z, t) + \frac{1}{2m} \left[ \frac{\partial}{\partial z}\sigma(z, t) \right]^2 + \mathbf{V}_d(x=0, y=0, z, t), \quad (2)$$

$$i\hbar(\partial/\partial t) |\phi_{\text{id}}(x, y, t)\rangle = \mathbf{H} |\phi_{\text{id}}(x, y, t)\rangle, \quad (3)$$

式中

$$\mathbf{H} = \left[ -(\hbar^2/2m) \nabla_{\perp}^2 + \mathbf{V}_{\text{id}}^{\text{trans}}(x, y, t) \right],$$

由于原子激光在重力作用下传输,故  $z$  是时间  $t$  的函数,横向分布函数和横向势能可以分别写成  $\phi_{\text{id}}(x, y, t)$  和  $\mathbf{V}_{\text{id}}^{\text{trans}}(x, y, t)$ ,以下所提到的波函数都是指横向分布函数。

由于

$$\psi(x, y, z, t) = \phi(x, y, z, t) \exp\left[\frac{i}{\hbar}\sigma(z, t)\right],$$

所以动力学变量的平均值可以写为

$$\langle F \rangle = \langle \psi | F | \psi \rangle = \langle \phi_{\text{id}} | F | \phi_{\text{id}} \rangle.$$

我们只要知道了横向波函数的演化就可以知道原子激光在末状态的一些特征量,如,动力学变量的平均值、光强等,此即本文研究(3)式而非(1)式的原因。原子激光是相干原子束,它的传输可视为物质波的传输,故可以借鉴光束参量来表征原子激光的传输<sup>[11]</sup>。对于势能不对称的系统,前文定义的总品质因子<sup>[11]</sup>是不守恒的。如果势能  $\mathbf{V}_{\text{id}}^{\text{trans}}(x, y, t)$  的  $x$  和  $y$  方向的分量相互独立

$$\mathbf{V}_{\text{id}}^{\text{trans}}(x, y, t) = \mathbf{V}(x, t) + \mathbf{V}(y, t),$$

相应的横向波函数就可以写为

$$\phi_{\text{id}}(x, y, t) = f(x, t)g(y, t),$$

则薛定谔方程(3)式可以写成关于  $x$  和  $y$  的两个方程,且每个方向上的物理量都可以独立地进行处理。故引入某一方向的光束参量:

$$W_i^2 = (4/I) \langle (i - \langle i \rangle)^2 \rangle,$$

$$\Theta_i^2 = (4/\hbar I) \langle (p_i - \langle p_i \rangle)^2 \rangle,$$

$$W_i^2/R_i = (2/\hbar I) \langle (i - \langle i \rangle) p_i + p_i (i - \langle i \rangle) \rangle,$$

$$Q_i^4 = \frac{1}{4} \left( W_i^2 \Theta_i^2 + \frac{W_i^4}{R_i^2} \right),$$

$$i = x, y$$

其中束宽  $W_i$  仍表征空间坐标表象中波函数的形状,发散角  $\Theta_i$  表征空间动量表象中波函数的形状,曲率半径  $R_i$  标度束宽随时间的变化,品质因子反映某一方向上的测不准关系。原子激光是中心对称系统,  $\langle i \rangle = \langle p_i \rangle = 0$ 。仿照前文的方法<sup>[11,13,14]</sup>可以得到类似的结论,如

$$i\hbar \frac{d}{dt} \langle F \rangle = i\hbar \left\langle \frac{\partial F}{\partial t} \right\rangle + \langle [F, H] \rangle, \quad (4)$$

$$\frac{dW_i^2}{dt} = \frac{2\hbar}{m} \frac{W_i^2}{R_i}, \quad (5)$$

$$\frac{dQ_i^4}{dt} = \frac{W_i^2}{4} \frac{d\Theta_i^2}{dt} - \frac{m^2}{8\hbar^2} \frac{dW_i^2}{dt} \left( \frac{d^2 W_i^2}{dt^2} - \frac{2\hbar^2}{m^2} \Theta_i^2 \right), \quad (6)$$

(4)式为动力学变量平均值的进化方程,利用(6)式

可以判断某一方向的品质因子是否守恒。如果系统在某一方向的品质因子守恒(能否守恒与势能的具体形式有关),就可以引入复数曲率半径<sup>[12]</sup>

$$q_i^{-1} = R_i^{-1} + 2iQ_i^2 W_i^{-2},$$

并利用(5)式和(6)式得到某一方向上品质因子守恒的充要条件

$$\frac{dQ_i^2}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{m}{\hbar} \frac{dq_i}{dt} = 1 - q_i^2 \frac{d\Theta_i^2}{dW_i^2}, \quad (7)$$

仿照前文<sup>[11]</sup>,如果进一步引入 Rucatti 代换

$$\frac{1}{q(t)} = \frac{m}{\hbar u(t)} \frac{du(t)}{dt},$$

就可以把不同时刻某一方向上的复数曲率半径用

ABCD 参量关联起来

$$q_i^{-1} = (C + Dq_{i1}^{-1})(A + Bq_{i1}^{-1})^{-1}, \quad (8)$$

引入某一方向的演化算子  $U_i(t, 0)$ , 使得

$$|f_j(x_j, t_j)\rangle = U_{ij}(t_j, 0) |\varphi(0)\rangle,$$

$$|g_j(y_j, t_j)\rangle = U_{ij}(t_j, 0) |\varphi(0)\rangle,$$

其中  $j = 1, 2$ 。线性变换算子

$$T_i(t_2, t_1) = U_{i2}(t_2, 0) U_{i1}^+(t_1, 0),$$

利用海森堡图像的定义和光束参量的定义<sup>[7]</sup>可以得到它在空间坐标表象中的表示

$$K_i(i_2, i_1; t_2, t_1) = \langle i_2 | T_i(t_2, t_1) | i_1 \rangle,$$

即相应的传播子

$$f_2(x_2, t_2) = \int K_x(x_2, x_1; t_2, t_1) f_1(x_1, t_1) dx_1, \quad (9)$$

$$g_2(y_2, t_2) = \int K_y(y_2, y_1; t_2, t_1) g_1(y_1, t_1) dy_1, \quad (10)$$

利用前文的方法<sup>[11]</sup>可以把传播子表示成 ABCD 形式

$$K_x(x_2, x_1; t_2, t_1) = (-i/Bh)^{1/2} \exp[-i(\pi/Bh)(Ax_1^2 - 2x_1x_2 + Dx_2^2)], \quad (11)$$

$$K_y(y_2, y_1; t_2, t_1) = (-i/Bh)^{1/2} \exp[-i(\pi/Bh)(Ay_1^2 - 2y_1y_2 + Dy_2^2)], \quad (12)$$

显然,对于横向势能的  $x$  和  $y$  方向分量相互独立且横向波函数满足  $\varphi_{\text{id}}(x, y, t) = f(x, t)g(y, t)$  的条件时,通过引入某一方向上的光束传输参量,就可以处理由于势能的不对称而引起总品质因子不守恒,但某一方向品质因子守恒的含时量子系统。

### 3 应 用

原子激光产生以后,先要通过辐射面以下的部分玻色-爱因斯坦凝聚体,光束中的原子和玻色-爱因斯坦凝聚体中原子会产生相互作用;光束内部的原子之间也会产生相互作用;处于非束缚态的磁次能级上的原子还会受到二次塞曼效应的影响;原子有静止质量,故还需考虑到重力的影响,所以,这个过程的总势能为

$$\mathbf{V}_{\text{total}}(x, y, z, t) = \mathbf{U} |\varphi_{\text{BEC}}(x, y, z, t)|^2 + \mathbf{U} |\varphi(x, y, z, t)|^2 + \mathbf{V}_{\text{QE}}(\mathbf{r}) - mgz, \quad (13)$$

式中各项分别对应上述各个作用所产生的势能。由于光束内部原子之间的相互作用比光束中原子和玻

色-爱因斯坦凝聚体中原子间的相互作用大约小三个量级<sup>[9]</sup>,故本文不考虑光束内部原子间的相互作用;二次塞曼效应也远小于光束中原子和玻色-爱因斯坦凝聚体中原子间的相互作用,也可以忽略。因此,在托马斯-费米(TF)近似严格成立的条件下,原子激光在穿出玻色-爱因斯坦凝聚体的过程中,横向势能表示为

$$\mathbf{V}_{\text{id}}^{\text{trans}}(x, y, t) = \mu \left( 1 - \frac{x^2}{R_x^2} - \frac{y^2}{R_y^2} \right), \quad (14)$$

显然,由于磁化捕获器的不对称性( $R_x \neq R_y$ ),故总品质因子不守恒。但如果将(14)代入(6)式可以发现,其品质因子在  $x, y$  方向分别守恒且势能的  $x$  和  $y$  方向的分量相互独立,满足前述条件,因而,可以利用前述方法来讨论原子激光的传输:把(14)式代入(7)式就可以得到使  $x$  方向品质因子守恒的充要条件

$$\frac{m}{\hbar} \frac{dq_x}{dt} = 1 + \frac{2\mu m}{\hbar^2 R_x^2} q_x^2, \quad (15)$$

解之,可得原子激光在这个过程中  $x$  方向的 ABCD 参量:

$$\mathbf{M}_{x1}(t_1) = \begin{bmatrix} A_{x1} & B_{x1} \\ C_{x1} & D_{x1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh\left(\sqrt{\frac{2\mu}{m}} \frac{t_1}{R_x}\right) & \frac{\hbar R_x}{\sqrt{2\mu m}} \sinh\left(\sqrt{\frac{2\mu}{m}} \frac{t_1}{R_x}\right) \\ \frac{\sqrt{2\mu m}}{\hbar R_x} \sinh\left(\sqrt{\frac{2\mu}{m}} \frac{t_1}{R_x}\right) & \cosh\left(\sqrt{\frac{2\mu}{m}} \frac{t_1}{R_x}\right) \end{bmatrix}, \quad (16)$$

同理,只需用  $R_y$  替换(16)式中的  $R_x$ ,就得到  $y$  轴方向的 ABCD 参量。将所得到的 ABCD 参量代入(11)式和(9)式就得到 ABCD 形式的传播子和末态的波函数。

原子激光经历上述过程后,就进入自由空间。如果磁化捕获器仍然打开,就要考虑二次塞曼效应的影响,忽略高阶小量和  $y$  方向的小量后,横向势能为

$$V_{\text{id}}^{\text{trans}}(x, y, t) \approx -\frac{m}{2}\Omega^2 x^2, \quad (17)$$

且品质因子在  $x, y$  方向上也守恒。故可得此过程中  $x, y$  方向的变换矩阵分别为

$$\mathbf{M}_{x2}(t_2) = \begin{bmatrix} \cosh(\Omega t_2) & \frac{\hbar}{m\Omega} \sinh(\Omega t_2) \\ \frac{m\Omega}{\hbar} \sinh(\Omega t_2) & \cosh(\Omega t_2) \end{bmatrix}, \quad (18)$$

$$\mathbf{M}(t_3) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\hbar}{m} t_3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (19)$$

由(18)式和(19)式可以看出,原子激光在  $x$  方向的传输相当于经过了一个厚透镜,而在  $y$  方向则可以看作是在自由空间中的传输。

当磁化捕获器关闭后,原子激光仅在重力势能的作用下做自由传输,故这个过程的 ABCD 参量在  $x, y$  方向上都与(19)式相同。由于这个过程横向对称,故 ABCD 参量还可以用前文的方法<sup>[11]</sup>得到,结果与本文相同,并且对波函数在横向是否可以分离没有要求。

**讨论** 本文借鉴某一方向的束宽、发散角、曲率半径和品质因子这些描述光子激光的传输参量来表征原子激光的传输,采用量子力学的方法进行理论推导,在忽略原子激光内部原子间的相互作用的近似下,得到了原子激光在势能满足的  $x$  和  $y$  分量相互独立且这两个方向的品质因子守恒的三个过程中 ABCD 形式的传播子。

Yann 等<sup>[10]</sup>得到的是不同势能项所产生的 ABCD 参量,且假设的高斯形式的波函数是横向可分的,符合本文的要求;在本文所讨论的三个不同过程中起主要作用的势能分别与 Yann 等讨论的三个势能项相对应,故两者的结论可以进行比较。由(16)可知,如果  $t_1^2 \approx 2(R_z - z_0)/g \rightarrow 0$ , (16)式就可以化为与 Yann 等的结果完全相同的矩阵,(18)式、(19)式与 Yann 等人的结果相同;对于品质因子守恒的系统,只需把  $N$  个 ABCD 矩阵相乘即可得到  $N$  个系统相连的传播子之间的关系,与 Yann 的结果相同。

以上结论证明了本文推导的正确性。另外,本文的方法对原子激光波函数的形式没有要求,仅要求横向可以分离;本文得到的(16)式对于穿出时间是否很短( $t \rightarrow 0$ )都是适用的;原子激光在不同传输过程中所满足的方程只是势能项不同。因而本文的方法可以用于研究各种原子激光束的传输以及在不同过程或介质中的传输,故本文方法的应用范围更广,所得到的结果更具普适性。

### 参 考 文 献

- 1 Mewes M O, Andrews M R, Kurn D M *et al.*. Output coupler for Bose-Einstein condensed atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 1997, **78**(4):582~585
- 2 Hagley E W, Deng L, Kozuma M *et al.*. A well-collimated quasi-continuous atom laser. *Science*, 1999, **283**(5408):1706~1709
- 3 Bloch I, Hansch T W, Esslinger T *et al.*. Atom laser with a output coupler. *Phys. Rev. Lett.*, 1999, **82**(15):3008~3011
- 4 Li Shiqun, Zhou Yidong, Huang Hu. The atom laser-a coherent atom beam generator. *Physics*, 1998, **27**(1):11~17
- 5 He Xiangyang, Liu Qing. The atom laser. *Modern Physics*, 2002, **14**(2):25~26
- 6 Wang Xiaohui, Hou Jidong, Chen Xuzong *et al.*. Design and setting up of a practical optical system for cesium atomic fountain. *Acta Optica Sinica* (光学学报), 2000, **20**(11):1441~1448 (in Chinese)
- 7 Wang Jin, Liu Xiaojun, Li Jiaomei *et al.*. Laser trapping of rubidium atoms. *Acta Optica Sinica* (光学学报), 2000, **20**(6):862~864 (in Chinese)
- 8 Zeng Qinglin, Huo Yunsheng, Cai Weiyan *et al.*. Atom lithography in red far-detuning high power standing wave. *Acta Optica Sinica* (光学学报), 2001, **21**(8):918~922 (in Chinese)
- 9 Busch T, K? hl M, Esslinger T *et al.*. Transverse mode of an atom laser. *Phys. Rev. (A)*, 2002, **65**():043615
- 10 Yann L C, Thywissen J L, Rangwala S A *et al.*. Atom laser divergence. *Phys. Rev. Lett.*, 2001, **87**(17):170403-1~170403-4
- 11 Liu T C Y, Liu J, Yin J L *et al.*. ABCD formulation of propagator of a time-dependent quantum system. *Acta Physica Sinica* (物理学报), 2002, **51**(1):21 (in Chinese)
- 12 Wiseman H M. Defining the (atom) laser. *Phys. Rev. (A)*, 1997, **56**(3):2068~2084
- 13 Liu T C Y, Hu W, Lu G S *et al.*. Diffraction integral of effective ABCD system. *Acta Optica Sinica* (光学学报), 2000, **21**(11):1280~(in Chinese)
- 14 Liu T C Y, Deng D M, Hu W *et al.*. Schrodinger formulation research for light beam propagation in media of complex refractive index. *Acta Physica Sinica* (物理学报), 2002, **51**(3):524~(in Chinese)