

文章编号: 0253-2239(2004)03-346-5

# 一种级联马赫-曾德尔滤波器设计的新方法

肖悦娱 何赛灵

(浙江大学现代光学仪器国家重点实验室 光及电磁波研究中心, 杭州 310027)

**摘要:** 级联马赫-曾德尔干涉仪滤波器可实现平顶化的滤波器频谱响应,但是利用传统的传输矩阵法,并不能方便地得到级联马赫-曾德尔干涉仪滤波器中各耦合器的耦合系数。将级联马赫-曾德尔干涉仪滤波器与数字信号处理中的有限脉冲响应滤波器进行了类比,并将数字滤波器的设计方法引入到级联马赫-曾德尔干涉仪滤波器的设计中,将滤波器的传输函数表示成为各耦合器耦合系数的显式函数,同时利用遗传算法,计算了对于给定的滤波器频谱响应,级联马赫-曾德尔干涉仪光滤波器中各耦合器的耦合系数。通过实例证明了利用数字滤波器的设计方法及遗传算法设计级联马赫-曾德尔干涉仪光滤波器,不仅可以得到理想的结果,而且可以提高光滤波器的设计效率。

**关键词:** 导波与光纤光学; 滤波器设计; 数字滤波技术; 马赫-曾德尔干涉仪; 遗传算法

中图分类号: TN252 文献标识码: A

## The Design of Cascaded Mach-Zehnder Interferometer Filter Based on Digital Filter Technique

Xiao Yueyu He Sailing

(State Key Laboratory for Modern Optical Instrumentation, Center for Optical and Electromagnetic Wave Research, Zhejiang University, Hangzhou 310027)

(Received 1 April 2003)

**Abstract:** A cascaded Mach-Zehnder interferometer filter is used to construct a flat-top filter, but couplers' coefficients of the cascaded interferometer-based filter cannot be determined directly by the traditional transfer matrix way. An analogy between the cascaded Mach-Zehnder interferometer-based filter and the finite impulse response filter used in the signal processing is given, the transfer function of the filter can be explicitly expressed by the couplers' coefficients. Thus, some methods commonly used in digital filter design can be used to design the cascaded Mach-Zehnder interferometer-based filter. For a specified frequency response, the couplers' coefficients of the cascaded interferometer-based filter are determined by the genetic algorithm. An example is given to verify the availability and efficiency of this method.

**Key words:** guided wave and fiber optics; filter design; digital filter design technology; Mach-Zehnder interferometer; genetic algorithm

## 1 引言

日益增长的通信容量需求,使得有效地利用光纤带宽显得越来越重要。光滤波器,例如波分复用系统中的解复用器、交错耦合滤波器(interleaver)

等,可以灵活地利用光纤的带宽,从而成为光通信系统的一个重要器件。

在波分复用系统中,常用的滤波器是基于薄膜技术,阵列波导光栅(AWG)或者光纤光栅技术的。随着光纤熔融拉锥技术的成熟,全光纤马赫-曾德尔干涉仪滤波器由于其插入损耗小,与光纤兼容性好以及具有梳状滤波特性等优点而在波分复用系统中而受到广泛关注<sup>[1,2]</sup>。但是,单级马赫-曾德尔干涉

E-mail: yxiao@coer.zju.edu.cn

收稿日期:2002-12-30;收到修改稿日期:2003-04-01

仪滤波器的通带特性是正弦型的,这将提高对激光器及滤波器的要求,不利于实际使用。如果采用多级熔锥方法,形成级联马赫-曾德尔干涉仪滤波器,通过合理优化,可以得到通带近似为方波型的滤波器<sup>[3]</sup>。

目前,对光滤波器研究的主要方法是传输矩阵法,对于给定的滤波器结构参量,这种方法可以有效地分析滤波器的频谱响应,但是,对于给定的滤波器频谱响应滤波器的设计,这种方法不够直接得到滤波器的结构参量。

在数字滤波器的设计领域,各种设计方法已经相当成熟,对于给定的滤波器频谱响应,可以通过很多种方法得到滤波器的传输函数,如加窗法、频率采样法、等波纹法等等。光滤波器的特性与数字滤波器十分相似,所以可以借鉴数字滤波器的各种优化和设计方法,提高光滤波器的设计效率。

本文通过将级联马赫-曾德尔干涉仪滤波器与数字滤波器中的有限脉冲响应滤波器进行类比,将滤波器的传输函数表示为级联马赫-曾德尔干涉仪中各耦合器耦合系数的显式函数。利用遗传算法,选择合适的耦合系数,可以设计出任意频谱响应的滤波器,如通带平坦化的交错耦合滤波器等。

## 2 数字信号处理方法在光滤波设计中的应用

光通信系统中使用的几种滤波器,如薄膜滤波器,马赫-曾德尔干涉仪滤波器等,其滤波原理都是多光束干涉。这在数字信号处理中相当于系统的脉冲响应,如图 1 所示。

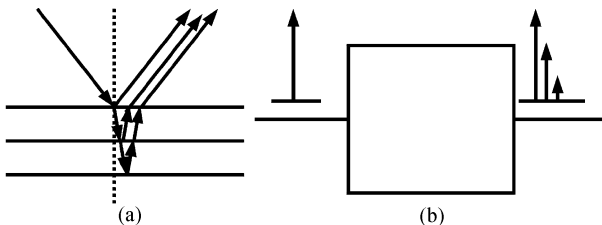


Fig. 1 The comparison of (a) multi-beam interference and (b) impulse response

两列干涉的信号,一列相对于另一列的时延(相位差)就构成了干涉,干涉信号叠加,就构成了滤波器。两个频率和偏振相同的光合成时,其相对相位就决定了是相干加强还是减弱。相对相位  $\phi$  是光程差  $L$  和传播常量  $\beta$  的函数。当多束相同频率和偏振的光束相互叠加时,输出光的场强为

$$E_{out} = E_0 \exp(-j\phi_0) + E_1 \exp(-j\phi_1) + \dots + E_{n-1} \exp(-j\phi_{n-1}), \quad (1)$$

其中  $\phi_n$  是第  $n$  条光路的相位延迟,  $\phi_n = \beta L_n$ 。如果光路单位相位延迟  $\phi_0 = \beta L_0$ , 且  $\phi_n = (n+1)\phi_0$ , 那么就可使用数字信号处理中的  $z$  变换。

令  $z = \exp(j\beta L_0) = \exp(j\omega\tau)$ , (1) 式就变为[且忽略共有的相位因子  $\exp(-j\phi_0)$ ]

$$E_{out}(z) = E_0 + E_1 z^{-1} + E_2 z^{-2} + \dots + E_{n-1} z^{-(n-1)}, \quad (2)$$

$E_i$  是第  $i$  束干涉光的复振幅。

以马赫-曾德尔干涉仪为例,介绍数字信号处理方法在光滤波器设计中的应用。

如图 2 所示的马赫-曾德尔干涉仪有两个输入端,两个输出端,两个耦合率为  $\kappa_1, \kappa_2$  的耦合器和两段连接耦合器的波导(光纤),长度为  $l_1$  和  $l_2$ 。

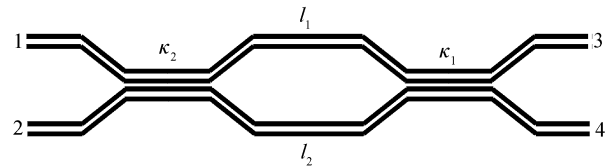


Fig. 2 The structure of a Mach-Zehnder interferometer

从端口 1 输入的信号,在端口 3 的输出为

$$H_{13} = \exp(-j\beta l_1) \times \{c_1 c_2 - s_1 s_2 \exp[-j\beta(l_2 - l_1)]\}, \quad (3)$$

其中  $c_i = \cos \theta_i, s_i = \sin \theta_i$ , 耦合系数  $\theta_i = \kappa_i l_i$ 。

令  $z = \exp[j\beta(l_2 - l_1)]$ , 且忽略共有的相位因子  $\exp(-j\beta l_1)$ 。

转换到  $Z$  平面,有

$$H_{13}(z) = (c_1 c_2 - s_1 s_2 z^{-1}), \quad (4)$$

对于  $H_{13}$  而言,系统有一个零点:  $z = s_1 s_2 / c_1 c_2$ 。如图 3 所示。

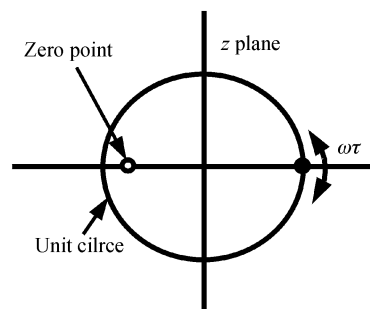


Fig. 3 The  $z$  transform for the frequency response of a Mach-Zehnder interferometer

所以利用  $z$  变换,可以把给定的光滤波器光谱响应  $T(\lambda)$  通过如下步骤得到滤波器传输函数的理

想系数( $b_{ideal}$ ):

1) 根据设计要求,得到给定滤波器的光谱响应  $T(\lambda)$ 。

2) 根据频率响应的周期  $\Delta f$ ,求得

$$\tau = 1/\Delta f, \quad (5)$$

3) 不同频率  $f$  对应的幅度响应值  $|T(\lambda)|$  取决于  $z = \exp(j\omega\tau) = \exp(j2\pi f\tau)$  在单位圆上的辐角,通过  $z$  变换,把光谱响应  $|T(\lambda)|$  转换成  $H(z)$ 。我们把频率  $f$  对应的单位圆上的幅角称为归一化频率(在  $[0, 2\pi]$  内)。且当  $H(z)$  多项式的系数为实数时,幅度响应在  $[0, 2\pi]$  内是关于实轴对称的,所以可以

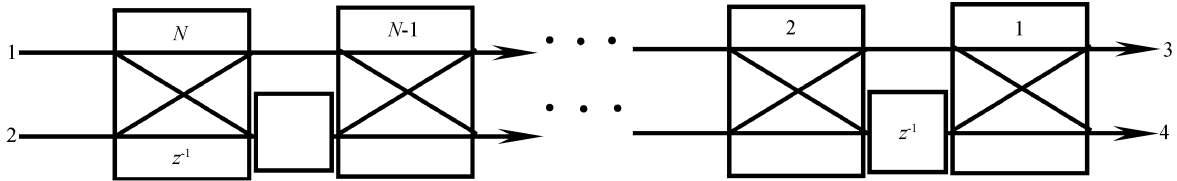


Fig. 4 Diagram for a cascaded Mach-Zehnder interferometer

对于耦合系数为  $\theta$  的耦合器,其传输矩阵为 (13)

$$\begin{bmatrix} E_3 \\ E_4 \end{bmatrix} = \mathbf{H}_{coupler} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -js \\ -js & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

对于一个简单的双延迟线系统,其传输矩阵为

$$\begin{bmatrix} E_3 \\ E_4 \end{bmatrix} = \mathbf{H}_{coupler} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \exp(-j\beta l_1) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp[-j\beta(l_2 - l_1)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

如果令  $z = \exp[j\beta(l_2 - l_1)] = \exp(j\beta\Delta l)$  [且忽略共有的相位因子  $\exp(-j\beta l_1)$ ] 那么

$$\mathbf{H}_{delay} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

对于一个马赫-曾德尔干涉仪,其传输矩阵是

$$\begin{bmatrix} E_3 \\ E_4 \end{bmatrix} = \mathbf{H}_{coupler1} \cdot \mathbf{H}_{delay} \cdot \mathbf{H}_{coupler2} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (c_1 c_2 - s_1 s_2 z^{-1}) & -j(c_1 s_2 + s_1 c_2 z^{-1}) \\ -j(s_1 c_2 + c_1 s_2 z^{-1}) & (-s_1 s_2 + c_1 c_2 z^{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

如果从端口 1 输入,端口 3 输出,其系统函数为

$$H_{13}(z) = c_1 c_2 - s_1 s_2 z^{-1}, \quad (11)$$

同理,如果从端口 1 输入,端口 4 输出,其系统函数为

$$H_{14}(z) = -j(s_1 c_2 + c_1 s_2 z^{-1}), \quad (12)$$

如果是多个耦合器互联,其整体传输矩阵可以表示为各个器件的传输矩阵之积

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_{coupler(1)} \cdot \mathbf{H}_{delay} \cdot \mathbf{H}_{coupler(2)} \cdots$$

把给定光谱响应要求的光滤波器转换成归一化频率在  $[0, \pi]$  内的滤波器。

4) 用数字滤波器的设计方法得到  $H(z)$  的多项式展开式

$$H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_n z^{-n}, \quad (6)$$

$b_i$  即为滤波器传输函数的理想系数  $b_{ideal}$ 。

### 3 级联马赫-曾德尔干涉仪滤波器

级联马赫-曾德尔干涉仪滤波器如图 4 所示,可以用传输矩阵的连乘来描述。

$$\mathbf{H}_{coupler(n-1)} \cdot \mathbf{H}_{delay} \cdot \mathbf{H}_{coupler(n)},$$

由式(11)~(13)类推可得,对于级联马赫-曾德尔干涉仪光滤波器,其传输函数为

$$H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_n z^{-n}, \quad (14)$$

其中  $b_k (k = 0, 1, \dots, n)$  是各个耦合器耦合系数的显式函数,即

$$b_k = g(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n), \quad (15)$$

这里的  $b_k$  就是实际滤波器传输函数的系数,即下文提到的  $b_{real}$ 。

例如当二个耦合器级联时,从端口 1 输入,端口 3 输出,其传输函数中  $b_0 = c_1 c_2 = \cos \theta_1 \cos \theta_2$ ,  $b_1 = -s_1 s_2 = -\sin \theta_1 \sin \theta_2$ 。

### 4 数字滤波器技术在级联马赫-曾德尔干涉仪滤波器设计中的应用

在数字滤波器的设计中,有限冲击响应(FIR)滤波器可表示为

$$H(z) = \sum_{k=0}^N h_k z^{-k}, \quad (16)$$

其中  $h_k$  为有限冲击响应滤波器系统函数第  $k$  阶的系数。级联马赫-曾德尔滤波器的传输函数与数字有限冲击响应滤波器的系统函数的形式是一样的,所以可借鉴有限冲击响应滤波器的设计方法,得到滤波器传输函数理想系数  $b_{ideal}$ 。

有限冲击响应滤波器的设计是对于给定的频率响应,按一定的最佳逼近准则,选取(16)式中的多

项式系数  $h_k$ , 使滤波器的频谱响应满足设计要求。传统的有限冲击响应数字滤波器的设计方法有窗口设计法或频率采样法。在现代滤波器设计中, 发展出一些新的有限冲击响应滤波器设计方法, 如基于 Parks-McClellan 算法的等波纹法<sup>[4]</sup>, 最小二乘法算法<sup>[5]</sup>, 最小  $P$  次归一 (Least  $P$ th-norm) 算法<sup>[6]</sup> 等。其中加窗法 (Window method) 和等波纹法 (Equi-ripple method) 是设计线性相位滤波器普遍采用的两种方法。

窗口设计法得到的频谱响应在频带边缘有较大的误差, 而且这种情况不会随着阶数的增加而改善, 这在数字信号处理中称为吉布思现象<sup>[7]</sup>。基于 Parks-McClellan 算法的等波纹设计法, 可以克服吉布思现象。它通过最大近似误差最小化准则达到有限冲击响应滤波器的最佳逼近。此方法可将误差均匀分布在整个频带内, 从而在满足相同指标的情况下, 得到一个更低阶的滤波器, 这对于双端口输出的光滤波器尤为重要。

以上两种设计方法得到的都是线性相位滤波器。如果不需要线性相位响应, 则可采用最小  $P$  次归一设计法等得到更低阶数的滤波器。

## 5 基于遗传算法的级联马赫-曾德尔滤波器的实现

利用上述有限冲击响应数字滤波器的设计方法, 可以将给定的频谱响应转换成滤波器系统函数的理想系数  $b_{ideal}$ 。由(14)式、(15)式可知, 级联马赫-曾德尔干涉仪传输函数的实际系数  $b_{ideal}$  是耦合系数的三角函数的非线性表达式, 级联马赫-曾德尔光滤波器的设计准则是使  $b_{real}$  等于  $b_{ideal}$ 。如要获得耦合系数, 需要求解复杂的多元三角函数方程组。虽然理论上可通过解析法来求取各个耦合器的耦合系数, 但是复杂的多元三角函数方程组的求解相当繁琐, 当级数较多时几乎无法实现。

多元的三角函数方程组的解空间是具有多峰分

布性质的解空间, 不能采用爬山法等局部最优搜索方法, 本文采用遗传算法进行全局最优解的搜索。遗传算法是一个利用随机化技术对一个被编码的参数集空间进行高效搜索的方法。它不是单点搜索法, 而是同时对搜索空间的不同区域进行采样和评估, 从而构成一个不断进化的群体序列。这一特点使其具有良好的全局搜索性能, 减小了陷于局部最优解的风险。遗传算法采用概率的变迁规则来引导其搜索过程朝着搜索空间的更优的解区域移动, 有着明确的搜索方向, 因此收敛很快。

级联马赫-曾德尔光滤波器的优化设计的目标是获取一组各个耦合器的耦合系数, 使  $b_{real}$  尽可能接近  $b_{ideal}$ , 因此遗传优化算法的评估函数为

$$F(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) = \sum_i [b_i^{real}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) - b_i^{ideal}]^2 = \min, \quad (17)$$

遗传算法的具体实现过程, 可参考文献[8]。

与直接在频域上优化得到耦合器的耦合系数相比, 本文给出的优化过程的优点在于: 滤波器频谱响应  $H(z)$  的展开式系数  $b_{ideal}$  可以用成熟的数字滤波器设计方法得到, 且  $b_{ideal}$  是耦合器系数  $\theta_n$  的显函数, 与频率无关。

## 6 设计实例

利用级联马赫-曾德尔干涉仪, 设计一个波长交错滤波器<sup>[9]</sup>, 中心波长为 1550 nm, 波长间隔为 4 nm。

根据(5)式, 可以得到

$$L_0 = \frac{\Delta f \cdot n_g}{c} = \frac{\lambda_0^2}{n_g \Delta \lambda} = 400 \mu\text{m}, \quad (18)$$

这里取  $n_g = 1.5$ 。

在  $[0, \pi]$  内的归一化频率对应的波长范围为  $[1550 \text{ nm}, 1552 \text{ nm}]$ 。

相应的有限冲击响应滤波器, 截止频率为  $\omega_c = 0.5\pi$ , 阶数  $M=7$ 。采用最优等波纹设计法, 可得理想的滤波器传输函数系数  $b_{ideal}$  为

$$b_{ideal} = [0.00168, -0.1160, 0.1165, 0.4616, 0.4616, 0.1165, -0.1160, 0.0168];$$

利用遗传算法, 搜索得到的实际滤波器的系数为

$$b_{real} = [0.0158, -0.1048, 0.1143, 0.4590, 0.4665, 0.1186, -0.1063, 0.0175];$$

对应的各个耦合器耦合系数为

$$\theta = [3.8288, 2.0862, 3.4116, 4.3933, 4.1724, 0.0491, 5.17878, 2.2089].$$

频谱响应如图 5 所示。

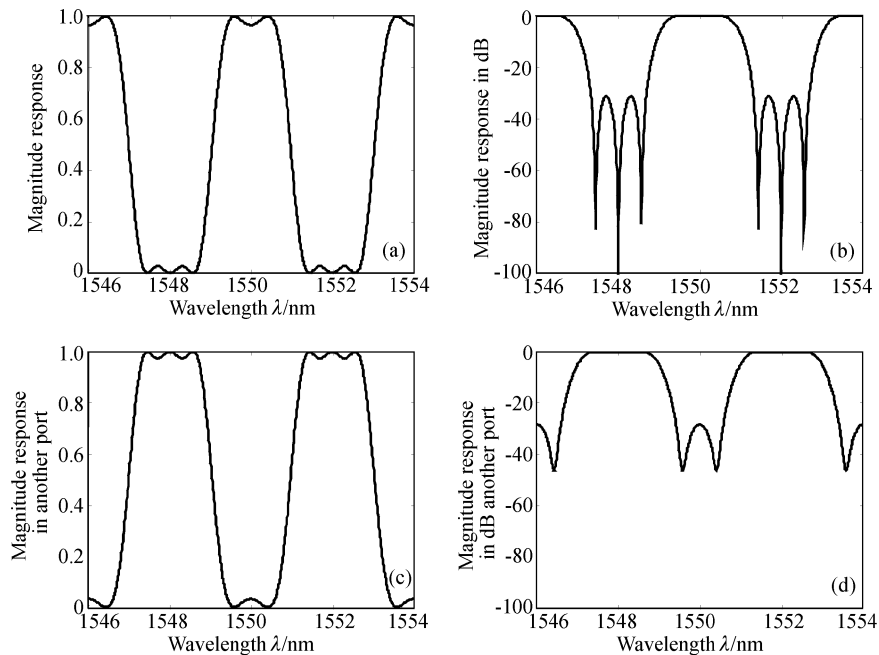


Fig. 5 The spectral response for an interleaver (based on a cascaded Mach-Zehnder interometer) designed with the genetic algorithm

**结论** 级联马赫-曾德尔干涉仪型滤波器,经过合理的优化,可得到平顶化的滤波器和其他的光通信器件。本文将它与数字信号处理中的有限冲击响应滤波器进行了类比,并将数字滤波器的设计方法引入到光滤波器的设计中。同时利用遗传算法,计算了对于平顶化波长交错滤波器,级联马赫-曾德尔干涉仪光滤波器中各个耦合器的系数,通过实例证明了利用数字滤波器的设计方法设计级联马赫-曾德尔干涉仪光滤波器,不仅可以得到理想的结果,而且可以提高光滤波器的设计效率。

### 参 考 文 献

- 1 Feng Dejun, Kai Guiyun, Liu Zhiguo *et al.*. Study of all-fiber reflected Mach-Zehnder interferometric multi-wavelength filter. *Acta Optica Sinica* (光学学报), 2002, **22**(3):332~335 (in Chinese)
- 2 Zhou Guang, Zhao Chunliu, Huang Yonglin *et al.*. Improvement of the capability of nonsymmetrical Mach-Zehnder interferometric interleaver using fiber loop. *Acta Optica Sinica* (光学学报), 2002, **22**(6):702~705 (in Chinese)
- 3 Oguma M, Jinguji K, Kitoh T *et al.*. Flat-passband interleaver filter with 200 GHz channel spacing based on planar lightwave circuit-type lattice structure. *Electron. Lett.*, 2000, **36**(15):1299~1230
- 4 McClellan J H, Parks T W. A unified approach to the design of optimal FIR linear-phase digital filters. *IEEE Trans. Circuit Theory*, 1973, **20**(6):697~701
- 5 Lin Y C, Lee J H, Chen C K *et al.*. A weighted least square algorithm for quasi-equiripple FIR and IIR digital filter design. *IEEE Trans. Signal Processing*, 1992, **40**(3):551~558
- 6 Lu W S, Cui Y, Kirlin R L. Least  $P$ th optimization for the design of 1-D filters with arbitrary amplitude and phase response. *ICASSP-93*, 1993, **3**:61~64
- 7 Oppenheim A V, Schafer R W, Buck J R. *Discrete-Time Signal Processing* (离散时间信号处理). Second Edition. Liu Shutang Transl. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 2001 (in Chinese)
- 8 Zhou Ming, Sun Shulin. *Genetic Algorithm Theory and Applications*. Beijing: National Defence Industry Press, 1999 (in Chinese)
- 9 Zhang Ruifeng, Ge Chunfeng. Interleaver. *J. Optoelectronics · Laser* (光电子 · 激光), 2002, **13**(6): 652~656 (in Chinese)